teorema: $$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\}}{\lim\limits_{n\to\infty}\{b_n\}} = \frac{p}{q}\,.$$

Demostracion:

sea $\varepsilon = \frac{1}{2}|q|$. puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = q \rightarrow \exists N, \in \mathbb{N}$

$\rightarrow |b_n - q| < \frac{1}{2}q$

ademas sabenos que dada $\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\exists N_1 \in \mathbb{N} \rightarrow |a_n - p| < \varepsilon$ $\forall$ $n > N_1$

y $\exists N \in$ $\rightarrow |b_n - q| < \varepsilon$ $\forall$ $n > N_2$

consideremos la exprecion $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{p}{q}\right|$ y hagamos el

siguiente desarrollo desarrollo

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{a_n q - b_n p}{b_n q}\right| = \left|\frac{a_n q - p q + p q - b_n p}{b_n q}\right| =$$

$$\left|\frac{(a_n - p) q + p (b_n - q)}{b_n q}\right| \leq \frac{|a_n - p||q| + |p||b_n - q|}{|b_n||q|}$$

si n>N= max (N N N...). Tenemos por un lado que

$$|b_n| = |b_n - q + q| \geq |q| - |b_n - q| \geq |q| - \frac{1}{2}|q|$$

esto es $|b_n| \geq \frac{1}{2}|q|$ y por otro lado que

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{|p| + |q|}{\frac{1}{2}|q|^2}\,\varepsilon = A\cdot\varepsilon \;\forall\; n \;\max(N_1 N_2 N_3)$$

al llamar $A = \dfrac{|p| + |q|}{\frac{1}{2}|p|^2}$ por lotanto se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\}}{\lim\limits_{n\to\infty}\{b_n\}} = \frac{p}{q}\,.$$ por definicion de limite