Matemáticas Preuniversitarias

Efraín Soto Apolinar

TÉRMINOS DE USO

Soto Apolinar, Efraín.
Matemáticas Preuniversitarias
Primera edición.
México. 2010.

El contenido de este libro corresponde a los cursos de Matemáticas para Bachillerato.

Apreciado lector, usted puede sentirse libre de utilizar la información que se encuentra en este material, bajo las siguientes condiciones:

Atribución: Debe dar crédito al autor del libro, independientemente del medio que se utilice para su divulgación (impresa, electrónica, en línea, etc.)

Uso no comercial: No se permite el uso de este material ni de su contenido con fines comerciales y/o lucro en forma alguna. Puede utilizarlo con fines educativos o de divulgación de las ciencias. Se permite el uso por instituciones educativas públicas o privadas sin fines de lucro, con la condición de que no se aplique cargo, ni en especie ni en moneda, ni en cualquier otra forma, a los usuarios finales de este material, sean estos profesores, autoridades educativas, estudiantes o público en general interesado en la enseñanza y/o el aprendizaje de las matemáticas.

No Modificar: No se permite alterar, transformar, modificar, en forma alguna este material. Usted tiene permiso para utilizarlo «*como está y es*». No se permite ni agregar, ni eliminar, ni modificar: palabras, u oraciones, o párrafos, o páginas, o subsecciones, o secciones, o capítulos o combinaciones de las anteriores o parte alguna del libro.

Permisos: Puede contactar al autor de este material directamente a la cuenta de correo electrónico que aparece en los créditos. Si usted tiene una copia de este libro en formato PDF y desea publicarlo en algún sitio de Internet, primero solicite permiso al autor a través de un mensaje a la cuenta de correo electrónico que aparece en los créditos. No requiere de permiso alguno para imprimir una copia de este material para uso personal.

Responsabilidad: Ni el autor, ni el editor son responsables de cualquier pérdida o riesgo o daño (causal, incidental o cualquier otro), ocasionado debido al uso o interpretación de las definiciones que se incluyen en este diccionario.

Prefacio

Este libro de matemáticas preuniversitarias es una recopilación de los libros *Matemáticas para Bachillerato I, II, III, IV, V,* y *VI* escritos por el mismo autor, basado en los programas de estudio de la dirección general de bachillerato (DGB). El contenido del libro está dividido en partes, la parte I corresponde al primer semestre, la parte II corresponde al segundo semestre y así sucesivamente.

Cada parte consta de varios capítulos y a su vez cada uno de estos capítulos contiene secciones donde se incluyen ejemplos resueltos de los problemas más comúnes que encontrarás en un curso de matemáticas preuniversitarias de ese semestre en particular.

Además de los temas sugeridos por los programas de la DGB se incluyen los siguientes: desigualdades (parte I), y elipse e hipérbola (parte III).

La enseñanza de las matemáticas en todos los niveles académicos ha ganado una fama de permanecer en crisis durante mucho tiempo ya. Como respuesta a esta situación se han desarrollado investigaciones en el área de matemática educativa en todo el mundo.

Con frecuencia se enseñan las matemáticas de manera aislada, como si el estudiante fuera matemático: se dan conceptos, se enuncian teoremas, se demuestran éstos, se deducen corolarios, etc. La mayor parte de la evidencia empírica indica que esta forma de enseñanza ocasiona confusión en los estudiantes, poca comprensión y alto nivel de reprobados.

En este libro nos hemos dado a la tarea de utilizar otra forma de trabajo, con la intención de dar al estudiante la imagen de unas matemáticas útiles, contrario a la imagen infértil que obtiene el estudiante cuando recibe enseñanza de las matemáticas de manera formal.

En este libro se muestran muchos «*trucos*» que te ayudarán a resolver problemas y entender el porqué de cada procedimiento. La idea es que cada vez más personas entiendan las matemáticas tan bien que sean capaces de explicarlas a otra persona o de utilizarlas para resolver problemas cotidianos.

Espero que este material sea de utilidad para tu mejor aprendizaje de las matemáticas.

Efrain Soto Apolinar.
Monterrey, N.L. México.
2010.

Índice de contenidos

Parte I

Álgebra

Capítulo 1

Introducción al Álgebra

Por aprender...

Por qué es importante...

En el aprendizaje de cualquier ciencia, es importante concer la terminología con la que estamos hablando. El material que estudiaremos en esta unidad servirá de base para entender el álgebra.

1.1 Problemas Aritméticos

En esta sección vamos a estudiar primero los distintos conjuntos de números que se definen en matemáticas. Después, al conocerlos mejor, podremos resolver distintos problemas aritméticos.

Para simplificar el estudio de los números, los matemáticos los han clasificado de la siguiente manera:

Definición 1

Números naturales
Son los números que utilizamos para contar. El conjunto de los números naturales se denota por $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

Nótese que el cero no es un número natural, porque cuando alguien no posee nada, no tiene necesidad de contar.

En el lenguaje matemático, escribimos: $1 \in \mathbb{N}$ para indicar que el número 1 está dentro del conjunto de los números naturales, es decir, el número 1 es un elemento de ese conjunto.

El símbolo: $\in$ se lee: «*...es un elemento del conjunto...*»

Para indicar que un número dado NO es un numero natural escribimos, por ejemplo: $\pi \notin \mathbb{N}$. Esto nos está diciendo en palabras: «*El número π NO es un número natural*».

De manera semejante, el símbolo $\notin$ se lee: «*...no es un elemento del conjunto...*»

Comentario

Es una buena idea notar que cuando sumamos dos números naturales, el resultado es otro número natural. Nunca obtendremos un número con decimales.

Definición 2

Números enteros
Es el conjunto formado por todos los números naturales, el cero y los números naturales dotados del signo negativo. El conjunto de los números enteros se denota por $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

Es importante notar que todos los números naturales son también números enteros, pero no todos los números enteros son números naturales.

Por ejemplo, el número -5 es un número entero que no es un número natural.

Comentario

De nuevo, cuando sumamos dos números enteros, el resultado es otro número entero.

Definición 3

Números racionales
Es el conjunto formado por todos los números que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, siendo el denominador distinto de cero. El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ x | x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Algunos ejemplos de números racionales son los siguientes:

$$\frac{1}{2} \qquad -\frac{3}{7} \qquad \frac{21}{22} \qquad \frac{7}{2} \qquad \frac{1}{10}$$

Pero no todas las fracciones se consideran números racionales. Para que un número sea considerado número racional, se requiere que tanto en el numerador como en el denominador tengamos un número entero, aunque sea negativo.

Por ejemplo, los siguientes números **no** son racionales, a pesar de que son fracciones:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \frac{10}{0} \qquad \frac{\pi}{4}$$

Otra cosa importante consiste en que en el denominador no aparezca el cero. ¿Por qué?

Ya debes saber que no es posible dividir por cero.

Por ejemplo, cuando queremos dividir 10 entre cero, no podemos encontrar una solución.

Cuando dividimos cero entre diez, sí podemos encontrar una solución. Piensa en términos de manzanas: «*si tengo cero manzanas y las voy a repartir entre diez niños, ¿cuántas manzanas les daré a cada niño?*» La respuesta es obvia, como tengo cero manzanas, a cada niño le corresponden cero manzanas.

Pero el otro caso: «*si tengo diez manzanas y las voy a repartir entre cero niños, ¿cuántas manzanas les daré a cada niño?*», tenemos un problema: ¿cómo vamos a repartir las manzanas, si para empezar, tenemos cero niños?

Observa que cuando dividimos 10 entre 2, buscamos un número que multiplicado por 2, nos dé como resultado 5.

Cuando dividimos diez entre cero, tenemos que encontrar un número que multiplicado por cero nos dé como resultado diez. Pero ya sabemos que cualquier número multiplicado por cero es igual a cero. Esto significa que no podemos encontrar algún número que multiplicado por cero dé diez. Por eso no podemos realizar la división.

Otro caso aparte es la división cero entre cero. Si buscamos un número que multiplicado por cero nos dé como resultado cero, vemos que no hay solamente una solución, sino un número infinito de soluciones, todas distintas. Por ejemplo el número cero, bien sirve como solución de nuestra división, porque $0 \times 0 = 0$, pero igual sirve el número 1 como solución, porque $1 \times 0 = 0$, y así como cualquier número que se te ocurra.

El problema aquí consiste en que cuando dividimos un número entre otro, siempre obtenemos una única solución, pero en este único caso, al dividir cero sobre cero, no obtenemos una única solución, sino muchas.

Es importante mencionar que **no** es que la solución de esta división sea infinito, porque cuando dividimos dos números siempre obtenemos como resultado un único número. Infinito **no** es un número, sino una expresión que nos dice que algo no tiene fin. Por esta razón, no es correcto decir que al dividir entre cero obtenemos infinito como respuesta.

Observa que todos los números enteros son números racionales, porque podemos escribirlos con el denominador igual a 1. Por ejemplo, el número 10, puede representarse como:

$$10 = \frac{10}{1} \in \mathbb{Q}$$

y cumple con la definición de número racional, porque el denominador es distinto de cero.

Comentario	Igual que con los conjuntos de números naturales y enteros, en el conjunto de los números racionales, cuando sumamos dos de sus elementos, obtenemos otro elemento de $\mathbb{Q}$.

Números irracionales

Son todos aquellos números que no se pueden escribir como el cociente de números enteros, siendo el denominador distinto de cero. El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}'$.

$$\mathbb{Q}' = \left\{ x | x \neq \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Definición 4

Observa que ningún número racional es un número irracional y de manera semejante, ningún número irracional es un número racional.

Algunos ejemplos de números irracionales son:

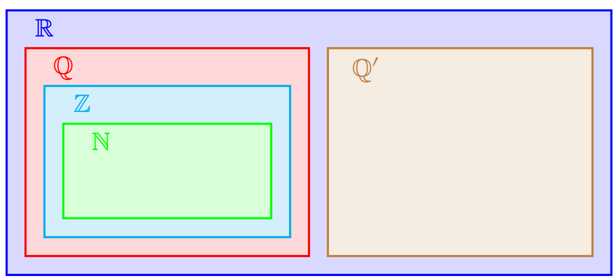
$$\pi, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{6}, \cdots$$

Números reales

Es el conjunto que contiene a todos los números racionales y a todos los números irracionales.

Definición 5

El siguiente diagrama te ayudará a visualizar mejor cómo se relacionan los distintos conjuntos de números que hemos estudiado:



A partir de este diagrama podemos fácilmente darnos cuenta que todos los números naturales pertenecen al conjunto de los números enteros, es decir, todos los números naturales son también números enteros.

Pero todos los números enteros son también números racionales, por lo tanto, todos los números naturales también son números racionales.

Sin embargo, ningún número racional es un número irracional y viceversa. Esto nos indica que ningún número natural pertenece al conjunto de los números irracionales. Esto mismo ocurre con los números enteros.

Y es que si un número es racional no puede ser irracional.

Sin embargo, cuando juntamos a todos los números racionales con todos los números irracionales obtenemos el conjunto de los números reales. Es decir, todos los números que enlistamos (naturales, enteros, racionales e irracionales) son también números reales.

Verifica si es verdadero o falso lo que se dice de los siguientes números. **Ejemplo 1**

- El número $\sqrt{9}$ es un número natural. V
- El número $\dfrac{\pi}{2}$ es un número racional. F
- El número 0 es un número irracional. F

- El número $\frac{1}{5}$ es un número entero. F
- El número $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es un número racional. F
- El número π es un número real. V

Ejemplo 2

Indica en cada caso a qué conjunto debe pertenecer el número que utilizaremos en cada caso. Evidentemente, todos pertenecen al conjunto de los números reales, así que mejor menciona otro de los conjuntos.

- Volumen en mililitros de un vaso. $\mathbb{Q}$
- Área de un círculo de radio 1. $\mathbb{Q}'$
- Peso de una bolsa de frijol con una precisión de gramos. $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Q}$
- Número total de refrescos embotellados en un día en una embotelladora. $\mathbb{N}$
- Número total de hojas impresas en una fotocopiadora. $\mathbb{N}$
- Saldo de una cuenta bancaria, con una precisión de hasta centavos de peso. $\mathbb{Q}$
- Saldo de una cuenta bancaria, con una precisión de miles de pesos. $\mathbb{Z}$
- Velocidad de un coche. $\mathbb{Q}$

Comentario

Cuando sumamos dos números reales, cualesquiera que estos sean, el resultado es otro número real. De manera semejante, cuando multiplicamos dos números reales, el resultado es otro número real.

Definición 6

CERRADURA

Cuando a los elementos de un conjunto se les realiza una operación, y el resultado es algún elemento del mismo conjunto, decimos que ese conjunto es cerrado bajo esa operación.

Por ejemplo, los números naturales son cerrados bajo la suma, porque cuando sumamos dos números naturales obtenemos otro número natural.

De manera semejante, cuando multiplicamos dos números naturales, el resultado es otro número natural. Entonces el conjunto $\mathbb{N}$ también es cerrado bajo la multiplicación.

Enseguida se da la lista de las propiedades más básicas de los números reales. Si a, b, c son números reales, entonces:

Suma	Multiplicación	Propiedad
$a+b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$	Cerradura
$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$	Conmutativa
$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Asociativa
$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$	Neutro
$a+(-a)=0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$	Inverso
$a(b+c)=a\,b+a\,c$		Distributiva

1.2 Problemas Aritméticos

En las matemáticas los números y los conjuntos son la base de toda la demás teoría.

Por eso es importante saber realizar las operaciones básicas con ellos: suma, resta, multiplicación y división, y resolver problemas prácticos con ellos.

Un triángulo tiene una base de 5.1 metros y una altura de 12.25 metros. ¿Cuál es su área? **Ejemplo 3**

- Ya sabemos la fórmula para calcular el área de un triángulo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

- Ahora sustituimos los valores y realizamos las operaciones:

$$\begin{aligned} A &= \frac{b \cdot h}{2} \\ &= \frac{(5.1)(12.25)}{2} \\ &= \frac{62.475}{2} \\ &= 31.2375 \end{aligned}$$

- Es importante recordar que las unidades de área en este caso son los metros cuadrados.

- Entonces, el área del triángulo con una base de 5.1 metros de longitud y una altura de 12.25 metros de longitud es igual a 31.2375 metros cuadrados.

En la mayoría de los problemas cotidianos tenemos que trabajar con las unidades de los objetos con los que estamos trabajando.

Es muy importante recordar al final que las unidades son también parte de la solución.

Otra cosa muy importante es el orden en el cual debemos realizar las operaciones.

En el ejemplo anterior debíamos multiplicar y dividir. En realidad no importa qué operación realices primero, siempre obtenemos el mismo resultado.

Esto se debe a que dividir en realidad significa multiplicar. Por ejemplo, cuando vas a dividir por 2, obtienes el mismo resultado que si multiplicas por $\frac{1}{2}$, si quieres dividir por 3, obtienes lo mismo que si multiplicas por $\frac{1}{3}$, etc.

De manera semejante, sumar y restar son la misma operación. Si quieres restar 2 a un número, obtienes lo mismo que si sumas -2.

En la siguiente lista se muestran las operaciones indicando su prioridad.

Definición 7

PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES

Las operaciones que aparecen al principio son las que debes realizar primero:

✓ ***Lo que aparezca entre paréntesis****, por ejemplo, en la fórmula:*

$$L = L_0 \cdot (1 + \alpha)$$

primero debemos sumar lo que se indica entre paréntesis.

✓ ***Exponenciación y radicación****, por ejemplo en la fórmula:*

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

primero debemos elevar al cuadrado la variable v.

✓ ***Multiplicación y división****, por ejemplo, en la fórmula:*

$$y = 2x + 1$$

primero debemos multiplicar 2 por x y al resultado sumamos 1.

✓ ***Suma y resta****.*

Ejemplo 4

Una estudiante de bachillerato contrató una línea de celular en la que paga $1.45 pesos el primer minuto de llamada local y $0.80 pesos cada minuto adicional. Una vez habló por el celular con su mamá y tardó 15 minutos. Si tenía un saldo de $125.35 pesos antes de iniciar la llamada, ¿qué saldo le quedó después de terminarla?

- En este caso primero debemos calcular el costo de la llamada y finalmente restar ese resultado al saldo que tenía antes de iniciar su llamada.
- Vamos a calcular el costo de la llamada:
- Para esto es importante considerar que el primer minuto costó $1.45 pesos, y el resto, o sea, los otros 14 minutos costaron $0.80 pesos cada uno...
- Definimos C como el costo de la llamada:

$$\begin{aligned} C &= 1.45 + (0.8)(14) \\ &= 12.65 \end{aligned}$$

- La llamada le costó $12.65 pesos, pero ella tenía $125.35 pesos de saldo, entonces,

$$\begin{aligned} \text{le quedaron:} \quad & 125.35 - C \\ = \quad & 125.35 - 12.65 = 112.70 \end{aligned}$$

Siempre que resolvemos un problema también es importante recordar que la solución nos dice algo acerca del problema.

Algunas veces esa solución nos ayuda a entender mejor un proceso o un fenómeno natural.

Los números son importantes porque gracias a ellos hemos tenido un avance tecnológico y científico como el que ahora conocemos.

En las vacaciones nos fuimos a Cerro Azul, Ver., y mi mamá compró varios recuerdos. Diez llaveros para mi tíos, cinco playeras para mis primos, una imagen de la virgen para mi abuelita y para mí, dos libros para que me ponga a estudiar. Los precios de cada artículo están en la siguiente tabla:

Artículo	**Precio**
Llavero	\$12.00 pesos
Playera	\$45.00 pesos
Imagen de la Virgen	\$125.00 pesos
Libro de Matemáticas	\$120.00 pesos

¿Cuánto gastó en los recuerdos de mi pueblo?

Ejemplo 5

- El problema indica que cada llavero cuesta lo mismo, al igual que los demás artículos que compró... Entonces, por los llaveros gastó:

$$\begin{aligned}\text{Número de llaveros} \times \text{Precio/llavero} &= \text{Costo de llaveros}\\ (10)(12) &= 120\end{aligned}$$

- Por las playeras gastó:

$$\begin{aligned}\text{Número de playeras} \times \text{Precio/playera} &= \text{Costo de playeras}\\ (5)(45) &= 225\end{aligned}$$

- Por mis libros gastó:

$$\begin{aligned}\text{Número de libros} \times \text{Precio/libro} &= \text{Costo de libros}\\ (2)(120) &= 240\end{aligned}$$

- En total gastó:

Por los llaveros:	120.00
Por las playeras:	225.00
Por la imagen de la virgen:	125.00
por mis libros:	240.00
	710.00

- En total gastó: \$710.00 pesos.

Algunas veces, conocer algunas propiedades de los números nos ayuda a resolver los problemas de una manera más sencilla. El siguiente ejemplo muestra una anécdota de uno de los mejores matemáticos de la historia de la humanidad.

Carl Friedrich Gauss fue un matemático alemán. A los 8 años, su maestro de primaria le pidió que sumara:

$$1+2+3+4+\cdots+99+100$$

Él utilizó el siguiente procedimiento...

Ejemplo 6

- Primero utilizó la propiedad que dice: "*si sumas varios números, el orden no importa, siempre obtienes el mismo resultado*"...
- Y él definió S como el resultado de la suma que estamos buscando...

- Entonces, esto nos permite escribir:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcccrcr} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

- Pero el 101 se repite cien veces, porque cada lista de números de los primeros dos renglones va del 1 al 100 y del 100 al 1, respectivamente.
- Entonces, podemos obtener ese resultado como:

$$2S = (101)(100)$$

- En palabras, esto significa que 101×100 es igual al doble de la suma que buscamos.
- Si dividimos entre dos, obtenemos la suma que buscamos:

$$S = \frac{(101)(100)}{2} = \frac{10\,100}{2} = 5\,050$$

- Esto indica que: $1+2+3+4+\cdots+99+100 = 5\,050$

Si no crees, entonces haz la misma suma, pero a mano...

Ejemplo 7 Marco puede pintar una barda en 10 horas. Carlos puede pintar la misma barda en 15 horas. Don César encargó a los dos que pintaran la barda juntos. Si avanzan al ritmo que se indica antes, ¿cuánto tiempo tardarán en pintarla?

- Obviamente, Marco avanza más rápido que Carlos, porque tarda menos en pintar toda la barda.
- Nota que no tiene caso suponer que cada uno de ellos pintó la mitad de la barda, porque no avanzan al mismo ritmo al pintar.
- Dado que Marco tarda 10 horas en pintar toda la barda, en una hora hace un décimo del total.
- Por su parte, Carlos tarda 15 horas en terminar toda la barda, por eso en una hora avanza un quinceavo de la barda.
- Pintando juntos en una hora avanzan:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

- Esto significa que los dos juntos avanzan un sexto de la barda y por eso, tardan 6 horas en pintar toda la barda.

El siguiente ejemplo se trata de un truco para calcular el cuadrado de ciertos números...

Ejemplo 8 Calcula los cuadrados de todos los números de dos cifras que terminan en 5 en las unidades.

- Para elevar al cuadrado un número de dos cifras que termina en 5 en las unidades, tomamos el dígito de las decenas y lo multiplicamos por su consecutivo.

- A la derecha del resultado escribimos el número 25.
- Por ejemplo, si quieres elevar el número 35 al cuadrado, el dígito de las decenas es 3, y su consecutivo es el 4...
- Los multiplicamos, y obtenemos: $3 \times 4 = 12$.
- Y ahora escribimos a la derecha del 12 el número 25. El resultado es el cuadrado de 35. Entonces, $35^2 = 1\,225$
- Ahora podemos calcular los cuadrados para llenar la siguiente tabla:

n	k	$k(k+1)$	n^2
15	1	$1 \times 2 = 2$	225
25	2	$2 \times 3 = 6$	625
35	3	$3 \times 4 = 12$	1 225
45	4	$4 \times 5 = 20$	2 025
55	5	$5 \times 6 = 30$	3 025
65	6	$6 \times 7 = 42$	4 225
75	7	$7 \times 8 = 56$	5 625
85	8	$8 \times 9 = 72$	7 225
95	9	$9 \times 10 = 90$	9 025

- Ahora podemos usar este truco para calcular el cuadrado de cualquier número de dos cifras que termina en 5.
- Verifica que en realidad los cálculos son correctos.

Ejemplo 9

Un diseñador industrial debe elegir las dimensiones de un envase de plástico en forma de caja que contendrá un líquido para una máquina. Las dimensiones de los envases se muestran en la siguiente tabla:

Envase	**Largo (cm)**	**Ancho (cm)**	**Fondo (cm)**
A	25	15	32
B	35	10	25
C	20	17	35
D	45	10	15

Él desea encontrar la caja que tenga al menos un volumen de 11 500 cm^3. ¿Cuál de esos envases debe elegir?

- Para saber si un envase de los propuestos cumplirá con la condición de que el volumen sea mayor que 11 500 cm^3, debemos calcular el volumen de cada uno.
- Para calcular el volumen de una caja multiplicamos largo por ancho por fondo.
- Los cálculos se muestran en la siguiente tabla:

Envase	Largo (cm)	Ancho (cm)	Fondo (cm)	Volumen (cm^3)
A	25	15	32	12 000
B	35	10	25	8 750
C	20	17	35	11 900
D	45	10	15	6 750

- Los resultados de la columna de la derecha, que contiene el volumen de cada envase, se obtuvo multiplicando las dimensiones de cada envase, es decir, los valores que aparecen en las otras columnas.
- Por ejemplo, para calcular el volumen del envase D, multiplicamos: $(45)(10)(15) = 6\,750$.
- Entonces, los envases A y C son los posibles candidatos a ser elegidos por el diseñador industrial.

Como puedes ver, la solución a un problema de matemáticas no siempre es única.

En este último ejemplo tenemos dos soluciones posibles al problema.

Otro punto importante a hacer notar es que la solución en este caso no es un número, como suele esperarse de la mayoría de los problemas matemáticos.

En este caso, la solución consiste en indicar qué envases tienen un volumen mayor a 11 500 cm^3.

El siguiente problema se queda como un reto.

Reto 1

Escribe los números del 0 al 10 realizando una o varias de las siguientes operaciones: suma, resta multiplicación, y división, elevar a una potencia o sacar raíz cuadrada, utilizando 4 veces el número 4. Por ejemplo, el número cero y el número dos pueden expresarse como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4-4}{44} \\ 2 &= \frac{4\times 4}{4+4} \end{aligned}$$

Ahora tú, encuentra los números del 0 al 10. Recuerda que es posible juntar números para formar 44, por ejemplo.

Ejercicios 1.2 Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios. No se permite el uso de calculadora.

1) $\sqrt{7}$ es un número natural. F
2) $\sqrt{100}$ es un número entero. V
3) 0 es un número irracional. F
4) π es un número racional. F
5) $\sqrt{\pi}$ es un número real. V
6) π^2 es un número natural. F
7) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ es un número racional. F
8) El conjunto de los números pares es cerrado bajo la suma. V

9) El conjunto de los números impares es cerrado bajo la suma. F

10) El conjunto de los pares es cerrado bajo la multiplicación. V

11) El conjunto de los impares es cerrado bajo la multiplicación. V

12) María tiene que realizar 4 mediciones del volumen contenido en un frasco de licuado. Debe reportar su medición en litros. Indica a qué conjuntos pertenece el resultado de la medición, en general: *naturales, enteros, racionales, irracionales, reales.* Racionales, Reales.

13) Luis compró un cinturón de 28 pulgadas de longitud. Si expresa esa longitud en centimetros obtiene 71.12 cm. Expresa este número en forma de una fracción. *Sugerencia: observa el número de decimales que tiene el número.* $\frac{7112}{100}$

14) ¿A qué conjunto pertenece el número de habitantes de una población? *naturales, enteros, racionales, irracionales, reales.* Naturales, Enteros, Racionales, Reales.

15) Un matemático creó un número menor a uno. Después del punto decimal escribió un uno,después un cero, después otro uno seguido de dos ceros, después otro uno seguido de tres ceros, y así sucesivamente *ad infinitum*. Este número es un número real. ¿A qué otro conjunto de números pertenece este número? Irracionales

16) Luis sale a correr cada mañana. El lunes corrió 12 kilómetros, el martes solamente 11 kilómetros, el miércoles, el jueves y el viernes corrió 15 kilómetros cada día. ¿Qué distancia recorrió en esos cinco días? 62 km.

17) Mi tío gana \$1 200.00 pesos como mago. Generalmente tarda 3 horas y media en su trabajo. En promedio, ¿cuánto gana por minuto? \$5.71 pesos/minuto.

18) El huracán Dean llegó a la ciudad de Chetumal, Q. R., México, con rachas de viento de 250 kilómetros por hora. Eso es equivalente a una velocidad del viento de 70 metros por segundo. La energía de un kilogramo de aire de ese viento se calcula elevando al cuadrado la velocidad del viento (en m/s) y sacando la mitad de ese resultado. ¿Qué energía tenían los vientos del huracán Dean? 2450 Unidades de energía.

19) En mis exámenes de matemáticas he obtenido las siguientes calificaciones: 7, 9, 8, 9.2, 6. ¿Qué promedio tengo hasta el día de hoy? 7.84

20) En tipografía, una línea puede contener entre 80 y 130 letras para que sea legible. En una página, debe haber entre 35 y 50 renglones. ¿Cuáles son los números de letras mínimo y máximo que caben en una página de acuerdo a las reglas tipográficas? Mínimo: 2800 letras; máximo: 2500 letras.

21) Daniela es la responsable del convivio mensual en su salón. Ella recauda \$30.00 pesos de cada uno de sus 21 compañeros (ella también coopera) y con ese dinero compra comida, refrescos y un pastel para festejar a los que cumplieron años en ese mes. Todos quedaban sorprendidos por la comida tan buena que llevaba que le preguntaron cómo organizaba los gastos. Ella contestó: «*Fácil: ocupo un décimo en el pastel, y del dinero que queda, un onceavo corresponde a los refrescos.*» ¿Cuánto dinero ocupa en comprar comida? \$540.00 en comida, \$54.00 en refrescos y \$66 en pastel.

22) Un huevo proporciona 82 calorías. Un niño utiliza 450 calorías cuando juega futbol en el recreo. ¿Cuántos huevos debe ingerir en su ingesta para suministrar las calorías que quemó en el recreo de hoy? 5.487 huevos.

23) El valor simplificado de:

$$\frac{10}{21}+\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{7}{12}\right)$$

es: 61/84.

24) ¿Cuál es el valor de $2^3 + 2^4 + 2^5$? 56

25) En su primer examen, Rubén obtuvo 12 reactivos correctos de un total de 20. En el segundo examen respondió 38 de las 40 preguntas correctamente. ¿En qué porcentaje aumentó su calificación? 35%

26) El corazón de un humano adulto late, en promedio, 70 veces por minuto. ¿Cuántas veces late el corazón de un adulto en un año aproximadamente? Late 36 792 000 veces aprox.

27) Una moneda de \$5.00 pesos pesa alrededor de 7 gramos. ¿Cuántas monedas de \$5.00 pesos igualan tu peso? Depende del peso del estudiante.

28) Una persona camina a razón de un paso por segundo. Si utiliza 30 minutos en su caminata diaria, y cada paso mide 75 cm., ¿qué distancia en metros recorre diariamente en su caminata? 1 350 m

29) Calcula la siguiente suma: $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 200$ 10 100

30) Calcula: $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 99$ 2 500

31) Calcula: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2\,000$ 1 001 000

32) Calcula cada una de las siguiente sumas:

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
1+3 &= 4\\
1+3+5 &= 9\\
1+3+5+7 &= 16\\
1+3+5+7+9 &= 25\\
1+3+5+7+9+11 &= 36\\
1+3+5+7+9+11+13 &= 49\\
1+3+5+7+9+11+13+15 &= 64\\
1+3+5+7+9+11+13+15+17 &= 81\\
1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 &= 100
\end{aligned}$$

¿Encuentras algún patrón en las sumas? Obtenemos los cuadrados perfectos consecutivos sumando impares.

33) Una sucesión de números que aparece frecuentemente en la naturaleza es la llamada «*Sucesión de Fibonacci*». Los primeros 10 términos de esta sucesión son: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Encuentra los primeros 20 términos de esta sucesión. 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765

34) **Reto:** ¿Se puede aplicar el truco de elevar al cuadrado un número de dos cifras que termina en cinco en las unidades a los números de 3 cifras que terminan en 5? Verifica realizando los cálculos sin calculadora. Sí.

1.3 Razones y Proporciones

En la vida real surgen muchas ocasiones en las que deseamos comparar dos cantidades. Para compararlas tenemos muchas opciones válidas, pero la que nos provee de información más rápidamente es la razón, que está relacionada con la proporción.

Definición 8

Razón
Considere los números a y b. La razón de ellos es el cociente obtenido al dividirlos:

$$\frac{a}{b}$$

En otras palabras, la razón de dos números es igual al cociente entre ellos.

Las razones se definen a partir de la división y se explican con fracciones porque en realidad una fracción nos indica una razón.

Por eso tenemos las fracciones equivalentes.

Ejemplo 10

Las fracciones $\frac{2}{7}$ y $\frac{10}{35}$ son equivalentes. Muestra utilizando la definición de proporción que es así.

- De acuerdo a la definición, la fracción $\frac{2}{7}$ indica la proporción de los números 2 y 7.
- Esto significa que en el numerador hay 2 por cada 7 que hay en el denominador de la fracción.
- Si agrego 2 en el numerador, para seguir teniendo la misma proporción, debo agregar siete en el denominador.
$$\frac{2}{7} = \frac{2+2}{7+7} = \frac{4}{7}$$
- Esto es equivalente a multiplicar tanto el numerador como el denominador por 2:
$$\frac{2}{7} = \frac{4}{7} = \frac{(2)(2)}{(7)(2)}$$
- Igual, en lugar de multiplicar por 2 en el numerador y en el denominador, podemos multiplicar por cualquier otro número distinto de cero y obtenemos una fracción equivalente.
- Si multiplicamos por 5 en el numerador y en el denominador, obtenemos:
$$\frac{2}{7} = \frac{(2)(5)}{(7)(5)} = \frac{10}{35}$$
- Esto nos indica que ambas fracciones están en la misma proporción, es decir, son equivalentes.

Ejemplo 11

En las pasadas elecciones de un pueblo el candidato A obtuvo 4 875 votos a su favor, mientras que el candidato B obtuvo 1 625. ¿En qué proporción están sus respectivas votaciones?

- Por definición, debemos dividir el número de votos que obtuvo el candidato A entre el número de votos que obtuvo el candidato B.

$$\frac{\text{Votos del candidato A}}{\text{Votos del candidato B}} = \frac{4\,875}{1\,625} = 3$$

- Este resultado nos indica que el candidato A obtuvo 3 votos por cada voto que obtuvo el candidato B.
- Esta misma información obtenemos si encontramos la razón de los votos del candidato B con respecto al candidato A:

$$\frac{\text{Votos del candidato B}}{\text{Votos del candidato A}} = \frac{1\,625}{4\,875} = \frac{1}{3}$$

- La fracción $1/3$ nos dice que por cada voto que obtuvo del candidato B, el candidato A obtuvo 3.

En este ejemplo se conocían dos datos y éstos no se pueden cambiar. En algunos casos tenemos más información y la proporción nos puede ayudar a calcular un dato desconocido.

Para esto, tenemos que saber que hay varios tipos de proporción.

Definición 9

PROPORCIÓN
Es una igualdad entre dos razones. Por ejemplo,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Esta misma proporción también podemos escribirla como: $a : b :: c : d$.

Definición 10

PROPORCIÓN DIRECTA
Cuando dos cantidades están relacionadas de tal forma que cuando una cantidad crece la otra también crece el mismo número de veces, entonces tenemos una proporción directa.

Ejemplo 12

Un paquete con 600 ml de refresco cuesta \$5.00 pesos. ¿Cuánto cuesta un litro de ese refresco?

- Sabemos que 600 ml de refresco cuestan \$5.00 pesos.
- La sexta parte de 600 ml debe costar la sexta parte de \$5.00 pesos.
- Es decir, 100 ml de ese refresco deben costar \$5.00/6 pesos.
- Un litro de refresco equivalen a 1 000 ml.
- Y 1 000 ml equivalen a 10 veces 100 ml.
- Entonces, 1 litro de ese refresco debe costar 10 veces más que lo que cuestan 100 ml.
- Esto es, 1 litro de ese refresco cuesta: $(10)\cdot(5/6) = 50/6 = \$9.33$ pesos.

Ejemplo 13

Un vendedor de Hot Dogs puede preparar 20 Hot Dogs en 30 minutos. ¿Cuántos puede preparar en 45 minutos?

- Nosotros sabemos que puede preparar 20 hot dogs en 30 minutos.
- Entonces puede preparar el doble de hot dogs en el doble de tiempo.

- Y debe preparar la mitad de hot dogs en la mitad del tiempo.
- Eso significa que puede preparar 10 hot dogs en la mitad de 30 minutos, es decir, en 15 minutos.
- Entonces, si sumamos lo que puede preparar en 30 minutos con lo que puede preparar en 15 minutos, obtenemos lo que puede preparar en 45 minutos.
- En conclusión, puede preparar $20 + 10 = 30$ hot dogs en 45 minutos.

Ejemplo 14

En un asilo se consumen 14 kg de harina por semana (7 días). ¿Cuántos kilogramos de harina se consumen en 30 días?

- En la séptima parte del tiempo se consume la séptima parte de kilogramos de harina.
- Esto significa que en un día se consumen 2 kilogramos de harina.
- En 30 días se consumen 30 veces más de harina que lo que se consume en un día,
- Esto indica que en 30 días se consumen $(2)(30) = 60$ kilogramos de harina.

Los problemas de proporción directa se resuelven de manera más sencilla si utilizamos la regla de 3 directa.

Por ejemplo, en el caso de los Hot Dogs, escribimos en una columna el número de Hot Dogs que puede preparar y en otra la cantidad de minutos que requiere:

	Hot Dogs	$\Rightarrow$	Minutos
Datos conocidos:	20	$\Rightarrow$	30
Para calcular:	x	$\Rightarrow$	45

Para resolver este problema con este segundo método observa que si dividimos 20 (Hot Dogs) entre 30 (minutos) obtenemos la proporción que indica cuántos Hot Dogs prepara el vendedor en un minuto[1]. Si multiplicamos este resultado por 45 (minutos) obtenemos la cantidad de Hot Dogs que prepara en esa cantidad de tiempo.

Entonces,

$$x = (45) \cdot \frac{20}{30} = (\cancel{3})(15) \cdot \left(\frac{2}{\cancel{3}}\right) = 30$$

Sabemos que en el asilo se consumen 14 kg de harina en 7 días, la razón $14 \,/\, 7 = 2$ nos indica que se utilizan 2 kilogramos de harina por día en ese asilo. En 30 días se deben utilizar 30 veces más, es decir, $(30)(2) = 60$ kilogramos de harina.

En forma de regla de tres directa, tenemos:

[1] En realidad, esta proporción nos indica que el vendedor prepara 2 Hot Dogs en 3 minutos, o bien, dos tercios de Hot Dogs en un minuto.

	kg de harina	$\Rightarrow$	Días
Datos conocidos:	14	$\Rightarrow$	7
Para calcular:	x	$\Rightarrow$	30

Y al realizar las operaciones, obtenemos:

$$x = (30)\cdot\left(\frac{14}{7}\right) = (30)(2) = 60$$

Observa que debido a que la multiplicación y la división tienen la misma prioridad como operaciones, en realidad no importa qué operación realicemos primero. Bien podemos primero dividir y después multiplicar, bien podemos primero multiplicar y después dividir... en ambos casos siempre obtendremos el mismo resultado.

Por esto, es una costumbre utilizar la regla de tres directa de la siguiente manera:

	kg de harina	$\Rightarrow$	Días
Datos conocidos:	14	$\Rightarrow$	7
Para calcular:	x	$\Rightarrow$	30

empezamos multiplicando el único número que conocemos del renglón donde se encuentra nuestra incógnita (30) por el número que se encuentra en el otro renglón y en la otra columna (14) y este resultado lo dividimos por el último número conocido (7).

$$x = \frac{(30)(\cancel{14})}{\cancel{7}} = (30)(2) = 60$$

Se queda como ejercicio para ti realizar este procedimiento para el caso del vendedor de Hot Dogs.

Una proporción directa que es utilizada comúnmente es el porcentaje.

Definición 11

PORCENTAJE
Es una proporción de algo a cien. La palabra «porciento» indica cuántos se tomarán por cada cien.

Ejemplo 15

Luisa compró un vestido. Como le hicieron un descuento del 25%, solamente pagó \$180.00 pesos. ¿Cuál es el precio original (sin descuento) de ese vestido?

- Para calcular el precio con descuento del vestido, debieron restar el 25%.
- Definimos con P al precio original (sin descuento) del vestido,
- Entonces, $0.25\,P$ es el descuento que se le hizo,
- Y el precio con descuento es:
$$P - 0.25\,P = 0.75\,P$$
- Esto indica que pagó solamente el 75% del precio original del vestido.
- Y este precio fue de \$180.00 pesos.

- Entonces,

$$0.75\,P = 180 \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{180}{0.75} = \frac{180}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{(4)(\cancel{180})}{\cancel{3}} = (4)(60) = 240$$

- Esto nos dice que el precio sin descuento del vestido era de \$240.00 pesos.
- En efecto, si calculamos el 25% de \$240.00 pesos, entonces debemos sacar la cuarta parte,
- es decir, \$60.00 pesos es el 25% de \$240.00
- A \$240.00 le restamos \$60.00 y obtenemos \$180.00 que es el precio con el 25% de descuento.

Ejemplo 16

Un paquete de cereal contiene 15% más gratis. Si el envase inicialmente contenía 680 gr., ¿cuántos gramos contiene ahora?

- Sabemos que originalmente el envase contenía 680 gramos.
- El 10% de esa cantidad es la décima parte, porque 10 es la décima parte de 100.
- Y el porcentaje se refiere a la proporción por cada cien...
- La décima parte de 680 gr., es 68 gr.
- Entonces, el 10% de 680 es 68.
- La mitad del 10% es el 5%.
- Entonces, el 5% de 680 es la mitad de 68, es decir, 34.
- Si sumamos el 10% de 680 y el 5% de 680 obtenemos el 15% de 680.
- Esto es, el 15% de 680 es $68+34=102$
- Entonces, el envase contiene 102 gramos de más...
- Si originalmente contenía 680 gramos, junto con los 102 gramos gratis (el 15%) obtenemos un nuevo total de 782 gramos.

Definición 12

PROPORCIÓN INVERSA
Dos cantidades están en proporción inversa si al crecer una, la otra decrece, en la misma razón.

Por ejemplo si una aumenta al doble, la otra disminuye a la mitad.

Ejemplo 17

Dos trabajadores tardan 32 horas en pintar una barda. ¿Cuántos trabajadores se requieren para que realicen la tarea en 4 horas?

- Si se asignan el doble de trabajadores deben tardar la mitad del tiempo.

- Entonces, si hay
  - ✓ 4 trabajadores deben tardar 16 horas,
  - ✓ y 8 trabajadores deben tardar 8 horas,
  - ✓ y 16 trabajadores deben tardar 4 horas,...
- Todo esto, suponiendo que los trabajadores siempre trabajan al mismo ritmo y que no se estorban entre ellos para realizar la tarea.

Las proporciones inversas aparecen muy frecuentemente. Sin embargo, debido a que mucha gente no conoce su nombre, no las reconoce como tal.

Ejemplo 18

En un viaje, 300 personas requieren de 975 litros de agua para consumo (elaboración de alimentos y bebidas) durante un día. Si hacemos caso del dicho: «*una persona necesita de dos litros de agua diarios*», ¿para cuántas personas alcanzará el agua?

- La respuesta es inmediata: como cada persona requiere de dos litros, dividimos el número de litros de agua que llevan consigo y obtenemos el resultado de nuestro problema:

$$\frac{975}{2} = 487.5$$

- Esto nos dice en palabras que si cada persona consume dos litros de agua por día, entonces 975 litros podrán dar a 487.5 personas agua en un día.
- Sin embargo debes observar que inicialente había 300 personas asignadas a los 975 litros de agua.
- Esto significa que (en promedio) consumían más de 2 litros de agua:

$$\frac{975}{300} = 3.25$$

- Entonces, este problema tiene relacionadas sus variables con una proporción inversa: cuando aumenta el número de litros de agua que consume diariamente una persona, pueden dar agua a menos personas...
- Y cuando disminuye el número de personas a las que se les va a repartir el agua, pueden que darles más litros de agua a cada uno de ellos.

Estos dos tipos de variaciones no son los únicos. Existen otros tipos de variaciones.

Por mencionar un ejemplo, tenemos la energía que contiene el viento. Cuando la velocidad del viento aumenta al doble, la energía que contiene un kilogramo de ese aire en movimiento aumenta ocho veces. Si se triplica la velocidad del viento, la energía aumenta 27 veces, y si la velocidad incrementa al cuádruplo, la energía se multiplica por 64.

Entonces, si la velocidad del viento se multiplica por k, la energía contenida ahí se multiplica por k^3.

Este tipo de variación se conoce como variación cúbica, por obvias razones[2].

Otro tipo de variación consiste en la variación exponencial. Este tipo de variación es la que se utiliza para determinar la edad de los huesos de dinosaurios y seres que existieron en nuestro planeta hace millones

[2]Observa que el número que utilizaste para multiplicar a la velocidad del viento se elevó al cuadrado para conocer en qué proporción aumentó la energía que contiene.

de años. En este tipo de variación la cantidad que aumenta o disminuye depende de la cantidad que quedaba antes.

Por ejemplo, es posible definir que una proporción exponencial varíe de un día a otro con la mitad de lo que había al día anterior. Si el lunes tenía 16 gramos de una sustancia que varía de esa forma, entonces el martes habrá la mitad, es decir, 8 gr., el miércoles habrá la mitad de lo que quedaba el martes, es decir, 4 gr., el jueves habrá 2 gr., el viernes 1 gr., y así sucesivamente.

Las poblaciones de algunas especies tienen un crecimiento exponencial también[3].

Como puedes ver, las razones y proporciones aparecen en muchas áreas distintas, además de que hay otras formas de variación entre dos cantidades que hemos dejado sin estudiar.

Resuelve cada uno de los siguientes problemas. Identifica primero si se trata de una proporción directa o inversa.

Ejercicios 1.3.0

1) Don Macario compró cubetas a \$12.00 pesos cada una y las está vendiendo a \$20.00 pesos cada una. ¿Cuál es la proporción entre los precios de compra y el precio de venta de las cubetas de Don Macario?
$12/20 = 3/5 = 0.6$

2) ¿Qué indica la proporción del ejercicio anterior? Cada cubeta le cuesta el 60%, es decir, 3/5, del precio de venta.

3) A la gasolina se le aumentó un 5.5% en su precio por litro. Su precio incial era de \$5.32 pesos por litro. ¿Qué precio tiene ahora, después de haber afectado el precio? \$5.61 pesos.

4) Una máquina puede pintar 12 kilómetros de la línea de la carretera federal en una hora. ¿Cuánto tiempo requiere para pintar 108 kilómetros? 9 hr.

5) Carlos compró 12 lápices por \$10.00 pesos. ¿Cuánto debe pagar por 30 lápices? \$25.00 pesos.

6) Tres lápices cuestan \$17.00 pesos. ¿Cuánto debo pagar por doce de esos lápices? \$68.00 pesos.

7) Marco compró un pantalón. Cuando pagó le dijeron que el precio que tenía el pantalón incluía un 15% de descuento. Si el pantalón le costó \$255.00 pesos, ¿cuál era el precio del pantalón sin descuento? \$300.00 pesos.

8) Andrei Jagodzinski es un pianista polaco. En su último contrato ganó 2.3 veces más que en el anterior. ¿En qué porcentaje aumentó su ingreso por concierto? 230%

9) En la película *King Kong en Nueva York*, un gorila fue filmado y al editar en *doble cámara* el gorila aparecía enorme. En la realidad, el gorila medía 1.45 metros. Si de acuerdo a mediciones realizadas en la película, la escala indica que tenía 12 metros de alto, ¿por qué número multiplicaron la altura verdadera del animal? 8.2

10) Si una persona de 1.75 metros de altura hubiera sido aumentada en sus dimensiones al igual que el gorila en la película de King Kong, ¿qué tan alto se vería? 14.48 m

11) De entre 35 000 personas encuestadas, 86% opina que los problemas más serios que enfrenta la humanidad actualmente están relacionadas con problemas ambientales. ¿Cuántas personas en total opinó eso? 30 100

12) Un complemento alimenticio líquido embotellado de 2.5 litros cuesta \$15.00 pesos. ¿Cuánto cuesta una porción de 500 ml? \$3.00 pesos

[3] Dentro de ciertos límites.

13) Un tornillo pesa aproximadamente 15 gramos. ¿Cuántos de esos tornillos hay en una bolsa de un kilogramo? 67 tornillos aprox.

14) Un kilogramo de huevo de gallina contiene 18 huevos. ¿Cuál es el peso aproximado de un huevo de gallina? $55.\bar{5}$ gr aprox.

15) ¿Cuántos huevos habrá, aproximadamente, en 2 kg de huevos? 36 huevos aprox.

16) Considerando la información de los dos ejercicios anteriores, y sabiendo que una tapa de huevo contiene 30 huevos y una caja contiene 12 tapas, ¿cuánto debe pesar una caja de huevos? (ignora que el peso de las tapas y de la caja que los contiene). 20 kg aprox.

17) Un envase de 100 ml tiene 7/8 ocupados con agua. ¿Qué volumen de agua tiene? 87.5 ml de agua.

18) Cuando Doña Pifa compra 12 panes debe pagar \$54.00 pesos. ¿Cuánto debe pagar por 20 de esos panes? \$90.00 pesos

19) Lalito compró un disco duro externo de 160 Gb de capacidad para almacenar la información de su LapTop, porque debía formatearla. La capacidad del disco duro de su LapTop es de 120 Gb. ¿Cuál es la razón de las capacidades de los discos duros? (Simplifica el resultado) Externo:Laptop = 4/3. Laptop:externo = 3/4.

20) La razón de la altura a la base de una puerta es $12:5$. Si ésta tiene una altura de 2.1 metros, ¿cuál es la longitud de su base? 0.875 metros = 87.5 cm.

21) **Química:** Una solución utilizada como tinta para marcar huellas digitales utiliza 2 ml de sales de hierro, 1.33 ml de sales de potasio, 0.17 ml de amonio y 16.5 ml de agua. Encuentra los mililitros que se deben utilizar de cada químico para preparar 2 litros de la solución. Recuerda que 1 litro equivale a 1 000 ml. 200 ml sales de hierro, 133 ml s. potasio, 17 ml amonio y 1650 ml agua.

22) **Química:** En una mina se extrae material que contiene 93% de hierro, 3% de carbón, 2% de azufre y el resto son trazas de otros metales. ¿Cuántos kilogramos de carbón se extraen en una semana (7 días) si diariamente se extrae 2.5 toneladas de material? (Recuerda que una tonelada equivale a 1 000 kg.) 525 kg.

23) **Medicina:** En física la densidad se define como la razón de la masa al volumen. Los dentistas utilizan el mercurio para colocar amalgamas en los dientes que han sufrido de caries leves. Un frasco de 15 ml de mercurio pesa 203.91 gramos. ¿Cuál es la densidad del mercurio? 13.594 gr/ml

24) **Física:** El coeficiente de dilatación lineal térmica en un material se refiere al cociente del incremento en la longitud ΔL de una varilla debido al aumento de temperatura entre su longitud inicial L. Si una varilla de $L = 1$ m aumenta su temperatura de 20°C a 21°C su longitud se incrementa en 0.005 metros. ¿Cuál es el coeficiente de dilatación lineal térmica de ese material? 0.005

25) **Física:** La presión se define como el cociente de la magnitud de la fuerza F al área A sobre la cual se distribuye. ¿Qué información nos da esa razón? Cuántas unidades de fuerza soporta cada unidad de área.

26) **Química:** Se sabe que 18 gr de agua pura contienen 6.0235×10^{23} moléculas de agua. Considerando que una molécula de agua tiene dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno, ¿cuántos átomos de hidrógeno hay en esos 18 gr de agua? 1.2047×10^{24} átomos de H

27) **Química:** Cuando 37.9968 gr de flúor gaseoso reacciona con suficiente hidrógeno gaseoso se producen 40.01268 gr de ácido fluorhídrico. Si se requieren preparar 100 gr de ese ácido, ¿cuántos gramos de flúor se deben hacer reaccionar con hidrógeno? 94.9619 gr.

28) **Química:** La reacción química del ejercicio anterior es la siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(g) & + & F_2(g) & \longrightarrow & 2HF(g) & + & 128 \text{ Kcal} \\ 2.016 \text{ gr} & + & 37.99 \text{ gr} & \longrightarrow & 40.006 \text{ gr} & & \end{array}$$

El último término de la primera ecuación: 128 Kcal, indica que cuando reaccionan 2.016 gr de H_2 (hidrógeno) con 37.99 gr de F_2 (flúor) se producen 128 Kcal además de los 40.006 gr de HF (ácido fluorhídrico). ¿Cuántos gramos de H_2 deben reaccionar para generar 50 Kcal? 0.7875 gr

29) **Reto: (Física)** La aceleración de un objeto se define como el cociente del cambio de velocidad entre el tiempo que requirió ese cambio. Matemáticamente:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{Incremento de velocidad}}{\text{Intervalo de tiempo}}$$

Físicamente, ¿qué información nos dice la aceleración?

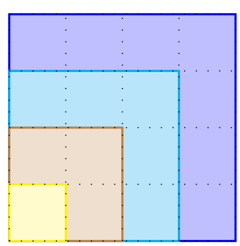
30) **Reto: (Física)** El calor específico de una sustancia es numéricamente igual a la cantidad de calor Q que hay que suministrar por cada unidad de masa m de esa sustancia para aumentar su temperatura un grado centígrado. ¿Qué fórmula calcula el calor específico c de una sustancia si se conocen Q y m? $c = Q/m$

31) **Reto: (Demografía)** La población de un municipio ha crecido durante los últimos diez años a razón de 3% por año. Si la población en el año 2 000 era de 1 250 000, y suponiendo que la población seguirá creciendo a la misma razón, ¿cuál será la población en el año 2 010?

32) **Reto: (Economía)** Durante los últimos cinco años, la inflación en el país X ha crecido en promedio un 5% por año. En el año 2 000 la despensa de la canasta básica para una semana de una familia costaba $750.00 pesos. Si la inflación continúa así, ¿cuánto costará esa despensa en el año 2 010?

33) **Reto: (Matemáticas)** El área de un círculo de radio r puede calcularse con la siguiente fórmula: $A = \pi r^2$. Esta área puede pensarse como el área que barre un radio cuando gira un ángulo de 360°. Encuentra una fórmula para calcular el área de un sector del círculo de ángulo $a°$. $A_x = a\pi r^2/360.$

34) **Reto:** Cuando se incrementan las dimensiones de un cuadrado al doble, el área crece, pero no al doble. Cuando las dimensiones se aumentan al triple, el área de nuevo crece, pero no al triple. ¿Puedes describir cómo crece el área dependiendo del crecimiento de las longitudes de los lados del cuadrado?



1.4 Lenguaje algebraico

Las matemáticas son un lenguaje, hecho por los humanos para los humanos.

Como todo lenguaje, tiene sus reglas, y si conoces sus reglas, podrás entender todas las matemáticas.

Evidentemente, la base está en este lenguaje que nos ayuda a describir con palabras lo que dicen los objetos matemáticos, es decir, las ecuaciones, funciones, gráficas, vectores, etc.

Para poder entender las matemáticas más elementales, debes conocer el significado de las siguientes palabras:

Palabra	**Significa**
Suma	resultado de una suma
Diferencia	resultado de una resta
Producto	resultado de una multiplicación
Cociente	resultado de una división
Doble, triple,...	multiplicar por 2, 3, etc.
Mitad, tercio,...	dividir entre 2, 3, etc.
Cuadrado	resultado de elevar al cuadrado
Cubo	resultado de elevar al cubo
Cuarta potencia	elevar a la potencia 4
Raíz cuadrada	calcular raíz cuadrada
Raíz cúbica	calcular raíz cúbica

En realidad esta lista ya debes conocerla. Cuando una persona te pide: «*suma 3 al número 2*», en realidad entiendes lo que debes hacer.

Sin embargo, algunas palabras prácticamente nunca las utilizamos, a pesar de que ya sabemos realizar la operación.

Ejemplo 19

Traduce a lenguaje matemático, es decir, a una expresión algebraica, el siguiente enunciado:

El doble de un número menos el cuadrado de otro.

- Vamos a trabajar con dos cantidades desconocidas, la primera la llamaremos x y a la segunda y.
- Como ya sabemos, la palabra "*doble*" nos indica que multipliquemos por dos: $2x$ indica el doble del primer número.
- "*El cuadrado del otro*" quiere decir: "*multiplica el número por sí mismo dos veces*", es decir, "*elevalo al cuadrado*".
- Entonces, la expresión algebraica que expresa matemáticamente esa frase es: y^2.
- Finalmente, la frase "*El doble de un número menos el cuadrado de otro*", matemáticamente se escribe:
$$2x - y^2$$
- Con lo que hemos traducido al lenuaje matemático la frase.

Cualquier expresión matemática, por más compleja que parezca, siempre puede expresarse en palabras a través del lenguaje algebraico.

Otras palabras que se usan frecuentemente en el lenguaje algebraico son las siguientes:

Palabra	Significa
Aumentado	más o sumado a
Disminuido	menos o restado de
Razón	cociente
Proporción	cociente
Incrementado	sumado
Semi	mitad de...

Ejemplo 20 Traduce a una expresión matemática la siguiente frase: «*El área de un cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de uno de sus lados.*»

- Primero debemos notar que se está hablando de una fórmula de geometría.
- Necesitamos una literal para denotar el área del cuadrado.
- Por similitud, utilizaremos A.
- Y para denotar la longitud del lado del cuadrado usaremos l.
- Entonces, el área (A) la encontramos elevando al cuadrado la longitud del lado (l):
$$A = l^2$$
- Esta es la fórmula que nos expresa matemáticamente la frase que nos pidieron traducir al lenguaje algebraico.

Seguramente ahora podrás reconocer las fórmulas de geometría como expresiones que nos dan información acerca de las figuras a las cuales corresponden.

La fórmula del área del círculo, por ejemplo: $A = \pi r^2$ nos indica que su área depende solamente de una medida: su radio. Esto es semejante al caso del cuadrado: su área solamente depende de la longitud de uno de sus lados.

Ejemplo 21 Traduce a una expresión matemática la siguiente información:«*Carlos tiene 6 canicas más que Benjamín. Entre los dos tienen en total 78 canicas.*»

- Vamos a utilizar la letra C para denotar la cantidad de canicas que tiene Carlos.
- Y B servirá para denotar la cantidad de canicas que tiene Benjamín.
- Sabemos que Carlos tiene 6 canicas más que Benjamín, así que si sumamos 6 al número B obtenemos lo que tiene Carlos:
$$C = B + 6$$
- Si sumamos las dos cantidades, obtenemos lo que tienen los dos juntos, en este caso, 78 canicas:
$$B + C = 78$$
- Pero ya habíamos encontrado que $C = B + 6$, por lo que podemos escribir también:
$$B + (B + 6) = 78$$

- Cualquiera de las dos ecuaciones sirve como solución al texto dado en el encabezado del ejemplo.
- Más adelante estudiaremos cómo resolver estas ecuaciones.

Es importante que notes que dos ecuaciones distintas en el ejemplo anterior pueden servir para expresar exactamente la misma situación. Cuál utilizar dependerá de la situación en la que nos encontremos.

Observa que algunas veces podemos expresar la misma información de varias maneras distintas. Después de todo, las matemáticas son un lenguaje.

Expresa en forma de una ecuación la siguiente información: «*Un rectángulo tiene un área de 84 metros cuadrados. Sabemos que su base mide 5 metros más que su altura.*»	**Ejemplo 22**

- Denotemos con una literal la altura del rectángulo, por ejemplo, h.
- Para nosotros la letra h representa los metros que mide la altura del rectángulo.
- El texto nos dice que la base mide 5 metros más, es decir, tengo que sumar 5 a la altura para obtener lo que mide la base:
$$b = h + 5$$
- Además, sabemos que el área del rectángulo es igual a 84 metros cuadrados. Entonces:
$$\begin{array}{rcl} \text{Área} & = & \text{base} \times \text{altura} \\ A & = & b \cdot h \quad = \quad (h+5)\cdot h \\ 84 & = & (h+5)\cdot h \end{array}$$
- Esta ecuación expresa matemáticamente el texto que se dio en el encabezado del ejemplo.

El ejemplo anterior nos dice algo importante: las expresiones matemáticas nos dan información acerca de algún proceso. En este caso, la ecuación $(h+5)\cdot h = 84$ nos indica las condiciones para que el área de un rectángulo sea igual a 84 unidades cuadradas si su base mide 5 unidades más que su altura.

No siempre es así de fácil obtener información de una ecuación, pero cuando sea posible, es importante reconocerla porque así tendremos mayor información acerca del problema que estamos resolviendo.

Escribe en palabras la siguiente expresión algebraica: $$\frac{x+y}{x-y}$$	**Ejemplo 23**

- Primero observamos que se trata de la división de dos cantidades,
- La cantidad que está en el numerador es *la suma de dos números*,
- y la cantidad que está en el denominador es *la diferencia de los mismos números*.
- Ahora, debemos recordar que el resultado de una división, en matemáticas se llama: *cociente*.
- Entonces,
$$\frac{x+y}{x-y}$$
se lee:

El cociente de la suma de dos números entre su diferencia.

El lenguaje algebraico es la forma como expresamos los procedimientos para resolver problemas matemáticos de todas sus áreas.

Continuamos con la aplicación del lenguaje algebraico en la solución de problemas aritméticos y geométricos.

1.4.1 Algoritmos aritméticos y geométricos

El lenguaje algebraico nos ayuda a expresar en palabras ecuaciones o a escribir en forma de ecuación una o varias operaciones que debemos realizar con algunas cantidades.

Ejemplo 1

Escribe en forma de expresión algebraica el siguiente juego:
Piensa un número, sumale dos; al resultado multiplícalo por 3, después réstale 6. Calcula la tercera parte de ese resultado y obtienes el número que pensaste.

- Primero debemos definir el número que pensó: x.
- A ese número le van a sumar 2, así obtenemos: $x+2$.
- Al resultado van a multiplicarlo por 3, con lo que obtenemos: $3(x+2)$.
- Después le restan 6, y así se obtiene: $3(x+2)-6$.
- Finalmente, dividimos entre 3, esto se denota por:

$$\frac{3(x+2)-6}{3}$$

- Y terminamos.

Es importante que observes que cuando multiplican por 3, no escriben: $3x+2$, porque en este caso, estamos multiplicando por 3 el número que pensaron y al resultado le sumamos dos.

Para que te convenzas que los resultados son distintos, puedes considerar distintos valores y verás que no obtienes el mismo resultado.

Por ejemplo, digamos que pensaste el número 10. Si sumamos 2 obtenemos 12, y después multiplicamos por 3 para obtener 36. Por otra parte si multiplicas 3 por 10 (el número que pensaste, sin sumar 2) obtienes 30, y después sumamos 2 para obtener 32. Como ya sabemos $36 \neq 32$.

En matemáticas, cuando se explica un resultado, necesariamente debemos utilizar palabras que indiquen cada objeto o idea.

Si no memorizas los significados de las palabras que aparecen en las tablas dadas anteriormente, no podrás aprovechar tus cursos de matemáticas, incluyendo éste.

Ejemplo 2

Explica si es correcta o incorrecta la siguiente aseveración:

El promedio de dos números es igual a su semisuma.

- Calculamos el promedio sumando los números y dividiendo entre el número de datos.

- En este caso estamos hablando de 2 números,
- ...entonces, el promedio en este caso es:
$$\frac{x+y}{2}$$
- Por otra parte, «*semi*» significa mitad, es decir, dividir entre dos.
- La *semi suma de los números* indica que debemos dividir entre dos la suma de los números...
- y eso es precisamente lo que escribimos:
$$\frac{x+y}{2}$$
- Esto nos indica que la aseveración es correcta.

Una paquete de galletas indica en la tabla de especificaciones nutricionales que cada galleta contiene 54.5 kilocalorías (kCal). Pedro también compró 250 mL de una bebida que contenía 505 kCal en total. Si él se tomó los 250 mL de bebida y además comió n galletas. **(a)** ¿Cuántas kilocalorías ingirió? **(b)** Traduce a lenguaje algebraico la expresión obtenida.

Ejemplo 3

- Este es un problema clásico de dieta.
- Llamemos C la cantidad de kilocalorías que ingirió Pedro.
- Las kCal que ingirió al tomar la bebida son 545 kCal.
- Hasta ahora, considerando solamente las kCal ingeridas debido a la bebida son:
$$C = 505$$
- Pero no es lo único que ingirió... También comió n galletas.
- Sabemos que cada galleta le provee de 54.5 kCal.
- Si él come solamente una galleta, ingiere 54.5 kCal,
- Si come dos galletas, ingiere (54.5)(2) kCal,
- Si come tres galletas, ingiere (54.5)(3) kCal, etc.,
- Y en general, si come n galletas, está ingiriendo $(54.5 \cdot n)$ kCal.
- Entonces, considerando la bebida, más las galletas que comió, en total ingirió:
$$C = 505 + 54.5\,n$$
- Una vez que conozcamos el valor de n, el número de galletas que comió, podremos conocer el total de kCal que ingirió.
- Ahora traducimos al lenguaje algebraico esta expresión:

  El número de kilocalorías que ingirió Pedro es igual a 505 kCal, que ingirió por tomar 250 mL de una bebida, aumentado con el producto de las kCal que contiene una galleta, es decir, 54.5 kCal, por el número de galletas que ingiera, que hemos denotado por n.

  Comentario

Ejemplo 4 Un truco para multiplicar por 9 mentalmente.

- Cuando tengas que multiplicar por 9, es mejor agregar un cero a la derecha del otro factor y restar el factor del número así obtenido.
- Por ejemplo, $9 \times 123 = 1\,230 - 123 = 1\,107$.
- La justificación de este procedimiento es muy sencilla. Cuando multiplicamos un número k por 9, en realidad estamos sumando $k + k + \cdots + k$ nueve veces.
- Cuando agregamos un cero a la derecha del número k, obtenemos el resultado de multiplicarlo por 10.
- Cuando restamos k a este resultado, obtenemos $9\,k$.
- Es decir, $10\,k - k = 9\,k$.

Debes recordar que multiplicar significa sumar de una manera abreviada. Por ejemplo, si multiplicas 3×4, en realidad estás sumando $3+3+3+3$, o bien, $4+4+4$. En ambos casos obtienes el mismo resultado porque $3 \times 4 = 4 \times 3$.

Ejemplo 5 Multiplicar un número por 99 mentalmente.

- Este caso es similar al anterior: agregamos dos ceros a la derecha del otro factor y restamos el número.
- Por ejemplo: $99 \times 23 = 2\,300 - 23 = 2\,277$.
- La justificación está en que $100 = 99 - 1$.
- Es decir, multiplicamos 100 por el otro factor y después lo restamos, con lo que terminamos multiplicando por 99.
$$99\,k = 100\,k - k$$
- Ahora generaliza este procedimiento para poder multiplicar por cualquier número cuyos dígitos sean solamente nueves.

Ejemplo 6 Multiplicar un número de dos cifras por 11

- La regla es muy sencilla. Sumar las dos cifras, y escribir el número en medio de las cifras.
- Cuando la suma es mayor o igual a 10, escribe en medio la cifra de las unidades (de la suma) y suma uno a la cifra de las decenas para escribirlo en las centenas.
- Por ejemplo: $11 \times 23 = 253$.
- Este truco se explica fácilmente cuando se desarrolla la multiplicación de manera convencional.

$$\begin{array}{rrr} & 2 & 3 \\ \times & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \\ \hline 2 & 5 & 3 \end{array}$$

- Siempre quedan «*en medio*» los dígitos del número y se deben sumar. Por eso, cuando la suma es mayor o igual a 10, debemos escribir el dígito de las unidades (de la suma) y sumar uno al dígito de las decenas para escribirlo en las centenas.
- Otra forma alternativa de realizar esta misma multiplicación consiste en agregar un cero a la derecha del número, que equivale a multiplicar por 10, y después sumar el número. En el caso del ejemplo anterior, tendremos:
$$11 \times 23 = 230 + 23$$
- La justificación de este procedimiento se da con la ley distributiva para los números reales:
$$11 \times 23 = 23 \times 11 = 23 \times (10 + 1) = 230 + 23$$

Con el procedimiento utilizado para multiplicar por 11, encuentra un método para multiplicar por 22, 33, etc. **Reto 1**

Multiplicar por un número entre 12 y 20 mentalmente. **Ejemplo 7**

- Para realizar el cálculo mental de (13)(45) multiplicamos solamente por la cifra de las unidades del número entre 12 y 20, agregamos un cero al 45 y sumamos los resultados:
$$(13)(45) = 450 + 135 = 585$$
- La justificación de este procedimiento también está en la ley distributiva:
$$(13)(45) = (45)(13) = (45)(10 + 3) = (45)(10) + (45)(3)$$
- Al multiplicar (45)(10) estamos agregando un cero a la derecha del número 45, y a este resultado le sumamos (45)(3).
- En general, si vamos a multiplicar el número a por $10 + k$, aplicamos de nuevo la ley distributiva y obtenemos:
$$(10 + k)(a) = (10)(a) + (k)(a)$$
- Ahora debes deducir un método como el que se explica en la multiplicación por 11, donde acomodes los números para sumarlos.

Multiplicar por 15 mentalmente. **Ejemplo 8**

- La multiplicación por 15 es muy sencilla: agregamos un cero al otro factor y después sumamos la mitad del número que obtuvimos.

- Por ejemplo, para multiplicar (15)(37), agregamos un cero al 37 y obtenemos 370, después sumamos a este número su mitad, es decir, 185. Entonces,

$$(15)(37) = 370 + 185 = 555$$

- Lo que justifica este procedimiento consiste en que al agregar un cero al otro factor (37 en este caso), equivale a haberlo multiplicado por 10.

- Cuando calculamos la mitad de este número, en realidad estamos calculando el resultado de multiplicar el factor (37) por cinco, porque:

$$\frac{(37)(1\cancel{0})}{\cancel{2}} = (37)(5)$$

- Entonces, si necesitamos multiplicar el número k por 15, agregamos un cero a la derecha del número k, y a ese resultado le sacamos mitad.

- Sumamos estos dos últimos números y terminamos.

Ejemplo 9 Multiplicar por un número que termina en 9 mentalmente.

- Como es muy fácil multiplicar por un número que es múltiplo de 10, cuando debemos multiplicar por un número que termina en 9, es muy buena idea sumar 1 a ese número, realizar la multiplicación y después restar el otro factor.

- Esto porque:

$$m\cdot(10\,k+[9]) = m\cdot(10\,k+[10-1]) = m\cdot(10(k+1)-1) = 10(k+1)\,m-m$$

  donde hemos aplicado la ley distributiva para los números.

- Por ejemplo,

$$(29)(47) = (30)(47) - 47 = (3)(470) - 47 = 1\,410 - 47 = 1\,363$$

- Ahora explica (utilizando la ley distributiva) la justificación de este procedimiento.

Ejemplo 10 Multiplicar por 50 mentalmente.

- Por ejemplo, multiplicar 17×50.

- Es muy sencillo multiplicar por 100, pues solamente agregamos dos ceros a la derecha del otro factor.

- Sabemos que $(2)(50) = 100$, entonces, para multiplicar por 50, basta hacer:

$$(17)(50) = (17)(50)\cdot\left(\frac{2}{2}\right) = (17)\cdot\left(\frac{100}{2}\right) = \frac{1\,700}{2} = 850$$

Ejemplo 11 Dividir por 5 mentalmente.

- Dado que dividir por 10 significa correr el punto decimal un lugar a la izquierda, y que $10 = (2)(5)$, mejor multiplicamos por 2 y al resultado le corremos el punto decimal un lugar a la izquierda.

- Por ejemplo,
$$\frac{37}{5} = (37)\left(\frac{1}{5}\right) = (37)\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{(37)(2)}{10} = \frac{74}{10} = 7.4$$

- La justificación del procedimiento para dividir por 5 es similar al truco anterior.

- Supongamos que queremos dividir al número k entre 5. Es decir, queremos encontrar:
$$\frac{k}{5} = \frac{2 \cdot k}{10}$$

- Esta expresión indica: «*Duplica al dividendo (es decir, el numerador de la fracción) y al resultado córrele el punto decimal un lugar a la izquierda.*»

Encuentra un procedimiento para multiplicar cualquier número por un divisor de 100 mentalmente. **Reto 2**

Para resolver el reto puedes tomar algunas ideas del ejemplo donde se explica cómo multiplicar por 50.

Observa cómo puedes generalizar esta idea para los demás divisores de 100.

1.4.2 Series y sucesión lineal

En la naturaleza muchas veces aparecen las sucesiones de números.

Por ejemplo, cuando el hombre tuvo la necesidad de contar, tuvo que inventar un conjunto de números que le sirviera para ese propósito.

El conjunto de los números naturales es una sucesión: $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$.

Sucesión **Definición 1**
Es una lista de números tales que pueden encontrarse uno a uno a través de una regla. Cada uno de los números que forma la sucesión se conoce como término de la sucesión.

Por ejemplo, los números: $2, 4, 6, 8, 10, \cdots$ forman una sucesión. Para encontrar el siguiente número sumamos dos al que tenemos por último término. En este caso tenemos la sucesión de los números pares.

También podemos formar la sucesión de los números impares de manera semejante: $1, 3, 5, \cdots$.

Existen muchos tipos de sucesiones. Por ejemplo, la sucesión: 5, 11, 17, 23, 29, etc. podemos calcular el siguiente número sumando 6 al último término.

Observa que una sucesión siempre tiene un primer término. Supongamos que ese primer término es el número a_1. En el ejemplo anterior $a_1 = 5$.

Para encontrar el siguiente término sumamos un número que no cambia de término a término, es decir, es constante. En el ejemplo anterior sumábamos el número 6, pero para hacer el caso general, vamos a considerar que sumamos el número d. Entonces, los siguientes términos serán:

En el ejemplo:	**En general:**
$$\begin{aligned} a_2 &= 5+6 \\ a_3 &= a_2+d \\ &= (5+6)+6 = 5+2(6) \\ a_4 &= a_3+d \\ &= (5+2(6))+6 = 5+3(6) \\ a_5 &= a_4+d \\ &= (5+3(6))+6 = 5+4(6) \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} a_2 &= a_1+d \\ a_3 &= a_2+d \\ &= (a_1+d)+d = a_1+2d \\ a_4 &= a_3+d \\ &= (a_1+2d)+d = a_1+3d \\ a_5 &= a_4+d \\ &= (a_1+3d)+d = a_1+4d \end{aligned}$$

y en general:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

Definición 2

SUCESIÓN ARITMÉTICA

Es una sucesión que cumple con que cualesquiera dos términos consecutivos tienen una diferencia constante. El primer término de una sucesión aritmética se denota por a_1, la diferencia constante de cualesquiera dos términos consecutivos por d, y el n–ésimo término por a_n.

Para encontrar el n–ésimo término, utilizamos la siguiente fórmula:

$$a_n = a_1 + d\,(n-1)$$

Ejemplo 1 Las siguientes son ejemplos de sucesiones aritméticas:

- $\Rightarrow \quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots$
  donde el primer término es $a_1 = 1$ y la diferencia constante entre cualesquiera dos términos consecutivos es $d = 2$.
- $\Rightarrow \quad 3, 7, 11, 15, 19, \cdots$
  donde $a_1 = 3$ y $d = 2$
- $\Rightarrow \quad 7, 10, 13, 16, 19, 22, \cdots$
  donde $a_1 = 7$ y $d = 3$.

Para verificar que la sucesión es aritmética podemos elegir cualesquiera dos términos consecutivos a_m, a_{m+1} y encontrar su diferencia: $a_{m-1} - a_m = d$.

Si esta diferencia cambia con distintos pares de términos consecutivos, entonces, la sucesión no es aritmética.

Ejemplo 2 Encuentra el término a_{12} de la sucesión aritmética definida con $a_1 = 5$ y $d = 6$

- Para resolver este ejercicio utilizaremos la fórmula:

$$a_n = a_1 + d\,(n-1)$$

- En este caso $a_1 = 5$, $n = 12$, y $d = 6$. Al sustituir los valores en la fórmula obtenemos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d\,(n-1) \\ a_{12} &= 5 + 6\,(12-1) \\ &= 5 + (6)(11) \\ &= 5 + 66 \\ &= 71 \end{aligned}$$

- Entonces $a_{12} = 71$.
- Puedes verificar el resultado encontrando todos los términos desde a_1 hasta a_{12}. Para esto tendrás que sumar $d = 6$ a cada término para encontrar el siguiente.

En la vida diaria encontramos muy frecuentemente oportunidades de aplicar las sucesiones aritméticas.

Ejemplo 3

Natalia hizo el compromiso de leer dos páginas más cada día del libro «*José Patter Prospectus*» . El primer día pudo leer 5 páginas. ¿Cuántas páginas debía leer el décimo día?

- En este caso tenemos que ella lee 2 páginas más del libro cada día, con lo que $d = 2$.
- También sabemos que el primer día leyó 5 páginas, así que $a_1 = 5$.
- Nos piden encontrar a_{10}, es decir, cuántas páginas leyó el décimo día de lectura.
- Sustituimos los valores conocidos en la fórmula:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d\,(n-1) \\ a_{10} &= 5 + 2\,(10-1) \\ &= 5 + (2)(9) \\ &= 5 + 18 \\ &= 23 \end{aligned}$$

- Esto significa que debe leer 23 páginas el décimo día de lectura.

Una pregunta que podemos hacer en este punto es: «*¿cuántas páginas ha leído Natalia en sus primeros 10 días de lectura?*»

Para responder esa pregunta debemos sumar los primeros diez términos de esa sucesión aritmética.

La serie es la suma de los términos de una sucesión. Cuando estamos hablando de una serie finita, estamos considerando un número finito de términos. Cuando consideramos una serie infinita, consideramos un número infinito de términos.

Utilizando el método de Gauss, tenemos:

$$\begin{array}{ccccccccc} S & = & 5 & + & 7 & + & \cdots & + & 23 \\ S & = & 23 & + & 21 & + & \cdots & + & 5 \\ \hline 2S & = & 28 & + & 28 & + & \cdots & + & 28 \end{array}$$

Como estamos sumando 10 términos, $28 + 28 + \cdots + 28 = 280$. Pero este valor es igual al doble de la suma que buscamos, entonces, $S = 280/2 = 140$. Es decir, en los primeros 10 días de lectura avanzó 140 páginas de su libro.

De manera semejante podemos encontrar de una manera sencilla la fórmula para calcular la suma de los primeros k términos de una sucesión aritmética:

$$\begin{array}{rcccccccc} S & = & a_1 & + & [a_1+d] & + & \cdots & + & a_k \\ S & = & a_k & + & a_{k-1} & + & \cdots & + & a_1 \\ \hline 2S & = & [a_1+a_k] & + & [a_1+a_k] & + & \cdots & + & [a_1+a_k] \end{array}$$

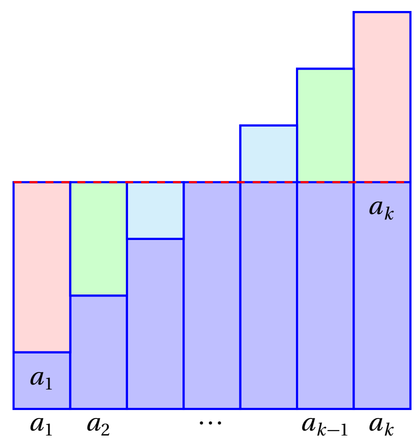
Observa que $a_{k-1} = a_k - d$, porque $a_k = a_{k-1} + d$, es decir, al término a_{k-1} le sumamos la diferencia d para obtener a_k.

Entonces, al sumar $2S$ estamos en realidad sumando k veces el número $a_1 + a_k$, y esto es igual a: $k(a_1 + a_k)$. Pero no deseamos encontrar el valor de $2S$, sino el valor de S.

Así que sacamos la mitad de $2S$ y así terminamos:

$$S = \frac{k(a_1+a_k)}{2} = k\left(\frac{a_1+a_k}{2}\right)$$

Ahora, $a_1 + a_k$ dividido entre dos es el promedio del primer y el k-ésimo térmimos. Geométricamente podemos imaginar que «*lo que le falta*» al término a_1 para llegar al promedio $(a_1 + a_k)/2$, se lo proporciona el término a_k:



Una manera más de mostrar este resultado es la siguiente: si sumamos los términos de la sucesión, desde a_1 hasta a_k, obtenemos:

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k \\ S_k &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + d(k-1)) \end{aligned}$$

Pero como cada uno de los k términos contiene al término a_1, podemos separar esta parte escribiendo:

$$S_k = k \cdot a_1 + d \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1))$$

Ahora consideramos la suma: $1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1)$, la cual se conoce como la suma de Gauss, la cual se estudia con detalle en la página 10. Usando la fórmula de la suma de Gauss, obtenemos:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$$

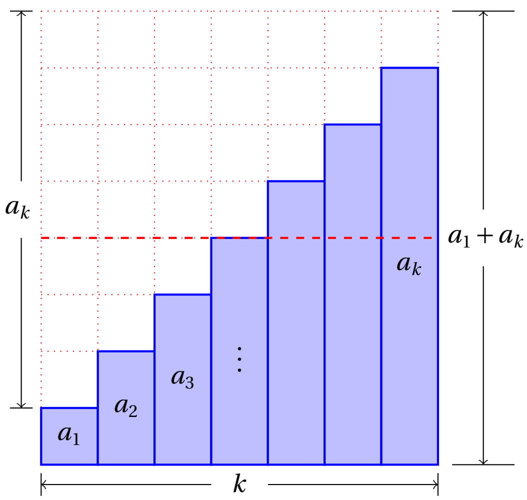
Sustituyendo este resultado obtenemos:

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + d(k-1)) \\ &= k \cdot a_1 + d \cdot \frac{(k-1)k}{2} \end{aligned}$$

Ahora vemos que podemos factorizar el número k:

$$\begin{aligned} S_k &= k\cdot a_1 + d\cdot\frac{(k-1)\,k}{2} \\ &= k\cdot\left(\frac{2\,a_1 + d\,(k-1)}{2}\right) \\ &= k\cdot\left(\frac{a_1 + [a_1 + d\,(k-1)]}{2}\right) \\ &= k\cdot\left(\frac{a_1 + a_k}{2}\right) \end{aligned}$$

Podemos generar una interpretación geométrica de este resultado. En ella, la altura de cada rectángulo *unitario* será de d unidades de altura.



Ahora observa la fórmula para encontrar la serie:

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2\,d) + \cdots + (a_1 + d(n-1)) = k\cdot\left(\frac{a_1 + a_k}{2}\right)$$

Encontramos la suma multiplicando el número de términos (k) por el promedio del primer y último términos. Geométricamente esto significa que tomamos la mitad, bien en forma de diagonal, como formando escalones, o bien , dividiendo en dos el rectángulo, exactamente a la mitad de la altura del mismo.

Definición 3

SERIE ARITMÉTICA

Es la suma de varios términos consecutivos de una sucesión aritmética.

La fórmula para encontrar la serie aritmética de los primeros n términos de la sucesión definida por a_1, d, es:

$$S_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$$

Para encontrar la suma aritmética de los primeros n términos de una sucesión necesitamos conocer: el número de términos que vamos a sumar (es decir, n), el primer término a_1 y el último término que queremos sumar a_n.

Si conocemos a_1 y d es muy fácil calcular a_n.

Ejemplo 4

Calcula la suma de Gauss usando la fórmula para la serie aritmética.

- Si recuerdas, Gauss calculó mentalmente la suma:

$$1+2+3+4+5+6+\cdots+99+100$$

- En este caso, el primer término es: $a_1 = 1$,
- ... la diferencia constante entre dos cualesquiera términos consecutivos es: $d = 1$, y
- ... el último término, es: $a_{100} = 100$.
- Ahora sustituimos los valores en la fórmula:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}\\
S_{100} &= \frac{100\,(1+100)}{2}\\
&= \frac{\cancel{100}\times 101}{\cancel{2}}\\
&= 50\times 101\\
&= 5050
\end{aligned}$$

- Con lo que Gauss utilizó esta fórmula, sin saberlo, tal vez.

Las series aritméticas, al igual que las sucesiones aritméticas, sirven para resolver problemas cotidianos.

El significado que tiene cada uno de los términos de la sucesión dependen del contexto del problema que vamos a resolver.

Ejemplo 5

En la construcción de una barda en forma de pirámide para la exposición Maya de el Foro Universal de las Culturas Monterrey 2 008, se utilizaron 1 200 piedras para la fila de la base, 1 150 para la fila que estaba encima, 1 100 para la siguiente fila, y así sucesivamente, hasta que la fila de piedras más alta utilizó 500 piedras. ¿Cuántas piedras se utilizaron en total?

- En este caso, cada fila utilizaba 50 piedras menos que la anterior, esto nos indica que la diferencia es negativa e igual a: $d = -50$
- También se nos da a conocer el primer término, en este caso, el número de piedras de la fila de la base de la barda, que es: $a_1 = 1\,200$.
- No conocemos n, pero sí conocemos el valor de a_n, es decir, el número de piedras de la fila de piedras más alta, en este caso, $a_n = 500$
- a partir de esta información podemos empezar encontrando el valor de n:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + d\,(n-1)\\
500 &= 1\,200 - 50\,(n-1)\\
500 - 1\,200 &= -50\,(n-1)\\
-700 &= -50\,(n-1)\\
\frac{-700}{-50} &= n-1 \qquad \Rightarrow\\
14 &= n-1\\
14+1 &= n = 15
\end{aligned}$$

- Esto nos dice que la barda tenía 15 filas de piedras.
- Ahora sí podemos encontrar el número total de piedras que se utilizaron en la construcción de la barda:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(a_1+a_n)}{2} \\ S_{15} &= \frac{15(1200+500)}{2} = \frac{15\times \cancel{1700}}{\cancel{2}} \\ &= 15\times 850 = 12\,750 \end{aligned}$$

- Es decir, se utilizaron, 12 750 piedras en la construcción de esa barda en forma de pirámide.

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios. **Ejercicios 1.4.2**

1) Dada la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 7$, $d = 5$, encuentra a_{100}. $a_{100} = 502$
2) Dada la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 3$, $d = 7$, encuentra S_{20}. $S_{20} = 1\,390$
3) Encuentra la suma de los primeros 25 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 1\,100$, $d = -15$. $S_{25} = 23\,000$
4) Encuentra la suma de los primeros 100 términos de la sucesión aritmética definda por: $a_1 = 12$, $d = 5$. $S_{100} = 25\,950$
5) Encuentra la suma de los primeros 100 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 17$, $d = -5$. $S_{100} = -23050$
6) Encuentra la suma de los primeros 90 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 6$, $d = 3$. $S_{90} = 12555$
7) Encuentra la suma de los primeros 30 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 92$, $d = 7$. $S_{30} = 5805$
8) Encuentra la suma de los primeros 30 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 43$, $d = -3$. $S_{30} = -15$
9) Encuentra la suma de los primeros 20 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 61$, $d = 1$. $S_{20} = 1410$
10) Encuentra la suma de los primeros 100 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 87$, $d = -1$. $S_{100} = 3750$
11) Encuentra la suma de los primeros 40 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 90$, $d = 4$. $S_{40} = 6720$
12) Encuentra la suma de los primeros 90 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 35$, $d = -9$. $S_{90} = -32895$
13) Encuentra la suma de los primeros 90 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 5$, $d = 2$. $S_{90} = 8460$
14) Encuentra la suma de los primeros 80 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 16$, $d = 2$. $S_{80} = 7600$

15) Encuentra la suma de los primeros 80 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 12, d = 7$. $S_{80} = 23080$

16) Encuentra la suma de los primeros 40 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 56, d = 11$. $S_{40} = 10820$

17) Encuentra la suma de los primeros 70 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 19, d = 7$. $S_{70} = 18235$

18) Encuentra la suma de los primeros 70 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 43, d = 1$. $S_{70} = 5425$

19) Encuentra la suma de los primeros 10 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 96, d = -9$. $S_{10} = 555$

20) Encuentra la suma de los primeros 60 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 95, d = -6$. $S_{60} = -4920$

21) Encuentra la suma de los primeros 70 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 49, d = -5$. $S_{70} = -8645$

22) Encuentra la suma de los primeros 80 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 77, d = 4$. $S_{80} = 18800$

23) Encuentra la suma de los primeros 90 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 10, d = 3$. $S_{90} = 12915$

24) Encuentra la suma de los primeros 20 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 19, d = 10$. $S_{20} = 2280$

25) En un concierto se permitió la entrada al estadio por todas las puertas de acceso de manera gratuita. Después de las 11:00 p.m. se permitió el acceso solamente con boleto, y entraban 300 personas por minuto. Si a las 11:00 de la noche ya había dentro del estado 1 200 personas, y permitieron la entrada hasta las 12:00 p.m. ¿Cuántas personas asistieron a ese concierto? 19 200 personas.

26) Un inversionista propone una utilidad del 2% inicial con un incremento del 0.05% anual. ¿Cuántos años deben pasar para que tenga una utilidad del 3%? 21 años.

27) El inicio de una canción incrementa su volumen desde cero decibeles (db) hasta 75 db. Cada décima parte de segundo aumenta 3 decibeles. ¿Cuántos segundos tarda en alcanzar el máximo volumen esa canción? 26 segundos.

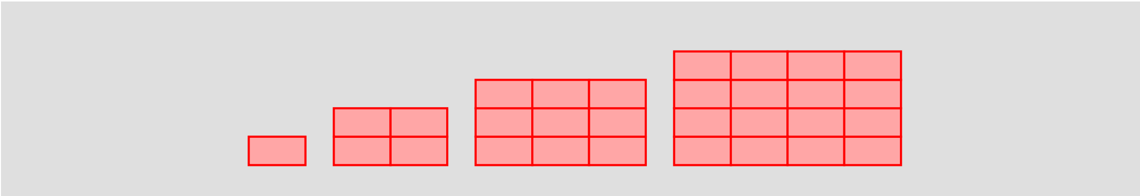
28) Un editor de libros sabe que cada uno de los libros de física para secundaria tiene una masa de 1.35 kg. La caja que los contiene para el envío tiene una masa de 2.5 kg. Escribe a_0, d, a_n y a_{25} si la sucesión aritmética representa la masa de la caja con n libros. $a_0 = 2.5$, $d = 1.35$, $a_n = a_0 + 1.35\,n$, $a_{25} = 36.25$.

29) En el ejercicio anterior, ¿qué representa a_0? La masa de la caja que contendrá a los libros.

30) El gas doméstico (L.P.) ha incrementado su precio por kilogramo en $0.25 pesos cada mes. El precio de hace un año era de $6.75 pesos. ¿Cuál es el precio actual? $9.50 pesos/kg.

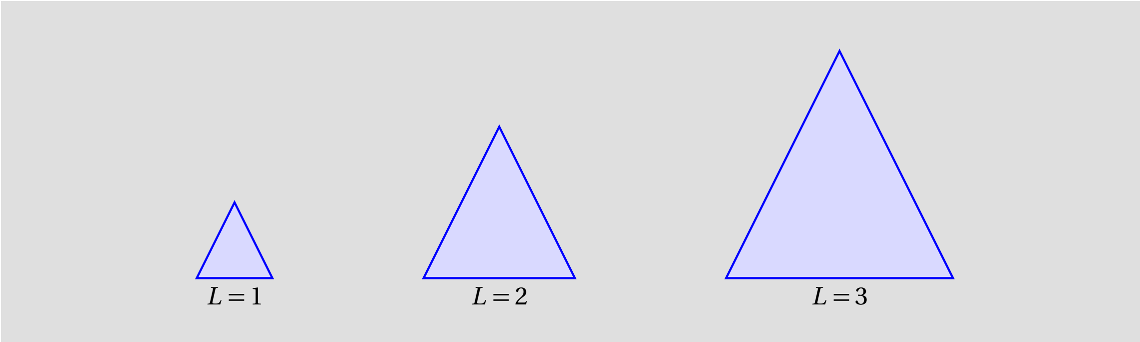
31) Benjamín se sometió a una dieta rigurosa que le permitió bajar 250 gramos por mes. Hace un año y un mes (25 meses), cuando empezó la dieta, él pesaba 85 kg. ¿Cuánto pesa actualmente? 79 kg.

32) Las siguientes columnas de blocks de 25 cm × 12.5 cm se hicieron en un local donde se realizaba una construcción:



¿Cuánto suman los perímetros de las figuras así formadas? 15 cm.

33) Calcula la longitud de estambre que se requiere para marcar en los bordes los primeros 10 triángulos de la siguiente figura:



donde L representa la longitud en centímetros del lado de cada triángulo. (En esta figura se muestran los primeros tres triángulos.) 165 cm

Para los siguientes ejercicios, calcula el valor de S

a) Utilizando el método de Gauss.

b) Utilizando la fórmula para la serie aritmética.

Comentario

34) $S =$ 252 500.

$$S = 5 + 7 + 9 + \cdots + 1005$$

35) $S =$ 142 300.

$$S = 15 + 22 + 29 + \cdots + 1\,408$$

36) $S =$ 62 625.

$$S = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) + \cdots + 500\left(\frac{1}{2}\right)$$

37) $S =$ 375 375.

$$S = \frac{3}{4} + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{3}{4}\right) + 4\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + 1\,000\left(\frac{3}{4}\right)$$

Capítulo 2

Polinomios de una variable

Por aprender...

Por qué es importante...

En esta unidad estudiaremos los objetos matemáticos que más frecuentemente encontraremos en la resolución de problemas a lo largo del curso, así como sus propiedades más básicas.

2.1 Propiedades de la igualdad

El álgebra es la rama de las matemáticas que se dedica al estudio de las propiedades de objetos matemáticos.

Un objeto matemático puede ser un número, una ecuación, un vector, etc.

Por ejemplo, para el álgebra de los números, tenemos un conjunto de objetos, en este caso, los números, y el álgebra lo que hará es buscar y encontrar todas las propiedades de ese conjunto de números.

La igualdad es una relación que se define entre números.

Las tres propiedades más importantes de la igualdad se resumen en una estructura matemática que se conoce como relación de equivalencia.

Relación de equivalencia

La relación de equivalencia se define con las siguientes propiedades:

Reflexiva: $a=a$.
  Ejemplo: $5=5$.

Simétrica: *Si* $a=b$, *entonces,* $b=a$.
  Ejemplo: *Si* $x=2$, *entonces,* $2=x$.

Transitiva: *Si* $a=b$, *y* $b=c$, *entonces,* $a=c$.
  Ejemplo: *Si* $x=2$, *y* $2=w$, *entonces,* $x=w$.

Definición 4

Las propiedades de la igualdad nos ayudan a justificar los métodos que usaremos para resolver problemas.

Por ejemplo, la propiedad reflexiva en palabras dice: «*un número siempre es igual a sí mismo*». En un contexto familiar, podemos decir: *yo siempre tengo mi propia edad*.

La propiedad simétrica en palabras dice: «*Si un número es igual a otro, el segundo debe ser igual al primero*». En el mismo contexto, podemos decir: *Si Alicia tiene la misma edad que Berenice, entonces Berenice tiene la misma edad que Alicia*.

La propiedad transitiva en palabras dice: «*Si un primer número es igual a otro segundo número, y además, el segundo número es igual a otro tercer número, entonces el tercer número y el primer número deben ser iguales*». En el contexto de las edades esto se aplica así: *Si Alicia tiene la misma edad que Berenice, y Berenice tiene la misma edad que Claudia, entonces, Alicia y Claudia tienen la misma edad.*

Sin embargo, esas propiedades no son todas las que posee la igualdad.

Definición 5

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Además de las propiedades que se mencionan en la relación de equivalencia, la igualdad presenta las siguientes:

Para la suma: *Si $a=b$, entonces, $a+c=b+c$.*
Ejemplo: Si $x=5$, entonces, $x+3=5+3$.

Para la resta: *Si $a=b$, entonces, $a-c=b-c$.*
Ejemplo: Si $x=5$, entonces, $x-3=5-3$.

Para la multiplicación: *Si $a=b$, entonces, $a\,c=b\,c$.*
Ejemplo: Si $x=5$, entonces, $7\,x=(7)(5)$.

Para la división: *Si $a=b$, entonces, $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}$.* $(c\neq 0)$
Ejemplo: Si $x=5$, entonces, $\dfrac{x}{7}=\dfrac{5}{7}$.

Para la potencia: *Si $a=b$, entonces, $a^n=b^n$.*
Ejemplo: Si $x=5$, entonces, $x^2=5^2$.

Para la raíz: *Si $a=b$, entonces, $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$.*
Ejemplo: Si $x=5$, entonces, $\sqrt{x}=\sqrt{5}$.

- ✓ La propiedad para la suma, nos dice en palabras que al sumar un mismo número en ambos lados de una igualdad, obtenemos una nueva igualdad válida.
- ✓ La propiedad para la resta, nos dice que al restar un mismo número en ambos lados de una igualdad, obtenemos otra igualdad válida.
- ✓ La propiedad para la multiplicación, nos dice en palabras que si multiplicamos ambos lados de la igualdad por un número real, obtenemos otra nueva igualdad válida.
- ✓ La propiedad para la división, nos dice que si dividimos ambos lados de la igualdad por un número real (distinto de cero), obtenemos otra nueva igualdad válida.
- ✓ La propiedad de la igualdad para la potencia indica que, si elevamos a la misma potencia ambos lados de una igualdad, ésta se sigue cumpliendo.
- ✓ La propiedad de la igualdad para la raíz nos dice que si calculamos la raíz n-ésima en ambos lados de una igualdad (si esta operación es posible de realizar), la igualdad sigue siendo válida. Por ejemplo puede ocurrir que obtengas:

  $$3\,x+1=-5$$

  y desees calcular la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad. En este caso NO podemos aplicar esa propiedad, porque no es posible calcular la raíz cuadrada de -5 (por ahora[1]).

Para puedas entender mejor lo anterior, tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 Identifica la propiedad que se ilustra en cada caso.

- Si $x=y$, entonces, $x+2=y+2$ .... para la suma

[1] Al final del curso sabrás cómo calcularla.

- Si $a = 4$, entonces, $a + 2 = 4 + 2$ .... para la suma
- Si $m = 6$, entonces, $2 \cdot m = 2 \cdot 6$ .... para la mult
- Si $u = v$ y $v = w$, entonces, $u = w$ .... transitiva
- Si $p = 11 + q$, entonces, $p - 11 = 11 + q - 11$ .... para la resta
- Si $2m = r$, entonces, $\frac{2m}{2} = \frac{r}{2}$ .... para la div

---

Este tema es muy importante y también muy sencillo.

Probablemente, ya conocías todas las propiedades que se mencionaron, porque son muy evidentes.

Ejemplo 7

En la siguiente solución de la ecuación $2x + 5 = 21$, indica la propiedad de la igualdad que se utilizó.

- Escribe a la izquierda la propiedad utilizada.
- $2x + 5 - 5 = 21 - 5$ .... para la resta
- $2x = 16$
- $\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$ .... para la div
- $x = 8$
- No te preocupes por entender los pasos que se dieron para la solución de la ecuación anterior.
- Por ahora debes concentrarte en reconocer cada una de las propiedades de la igualdad.

Las propiedades de la igualdad se utilizarán en la mayoría de los procedimientos que utilizaremos para resolver ecuaciones y otros problemas relacionados con álgebra, por ejemplo, el despeje.

Ejemplo 8

El siguiente procedimiento se conoce como un despeje. En este caso se despeja la variable v_f de la fórmula:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

Indica en cada paso la propiedad de la igualdad que se está aplicando.

- Escribe a la derecha de las ecuaciones que tienen puntos la propiedad que corresponde.
- $a = \frac{v_f - v_i}{t}$
- $a \cdot t = \left(\frac{v_f - v_i}{t}\right) \cdot t$ .... para la mult
- $a \cdot t = v_f - v_i$
- $a \cdot t + v_i = v_f - v_i + v_i$ .... para la suma
- $a \cdot t + v_i = v_f$

- $v_f = a \cdot t + v_i$ .... transitiva
- Como puedes ver, el despeje puede justificarse con las propiedades de la igualdad.
- No te preocupes por entender el despeje por ahora.
- Por ahora, solamente debes concentrar tu aprendizaje en las propiedades de la igualdad.

Ejemplo 9 Indica en cada paso del siguiente despeje la propiedad de la igualdad que se está aplicando.

- Escribe a la derecha la propiedad que corresponde a cada paso del despeje:
- $F = G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$
- $F \cdot r^2 = G \cdot \left(\dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\right) \cdot r^2$ .... para la mult
- $F \cdot r^2 = G \cdot m_1 \cdot m_2$
- $\dfrac{F \cdot r^2}{F} = \dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{F}$ .... para la div
- $r^2 = \dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{F}$
- $\sqrt{r^2} = \sqrt{\dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{F}}$ .... para la raíz
- $r = \sqrt{\dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{F}}$
- Concéntrate solamente en las propiedades de la igualdad.
- Lo demás lo aprenderás más adelante.

En realidad, las propiedades de la igualdad y de los números sirven para justificar por qué utilizamos los procedimientos que usamos en álgebra y al entenderlos, podrás ver más ayá de las letras escritas en este material, pues entenderás por qué podemos realizar una operación en un procedimiento.

Por ahora, debes entender cómo podemos modificar expresiones que están igualadas.

2.2 Problemas geométricos y algebraicos

Aquí empezamos a estudiar los conceptos que más vamos a utilizar en los cursos de matemáticas.

Los temas de esta unidad son los conceptos de álgebra que no debes olvidar.

2.2.1 Reglas de los exponentes

En el álgebra, uno de los temas que más utilizaremos para simplificar expresiones algebraicas son las reglas de los exponentes.

Leyes de los exponentes

Definición 1

Ley	*Ejemplo*
(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	*(i)* $x^5 \cdot x^3 = x^{5+3} = x^8$
(ii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	*(ii)* $\dfrac{q^9}{q^4} = q^{9-4} = q^5$
(iii) $\dfrac{1}{a^m} = a^{-m}$	*(iii)* $\dfrac{1}{r^5} = r^{-5}$
(iv) $a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$	*(iv)* $19^0 = 1$
(v) $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	*(v)* $(m^3)^5 = m^{3\cdot 5} = m^{15}$
(vi) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	*(vi)* $(u \cdot v)^7 = u^7 \cdot v^7$
(vii) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$	*(vii)* $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3 = \dfrac{x^3}{y^3}$

¿Por qué $x^5 \cdot x^3 = x^{5+3} = x^8$?

Primero debemos recordar qué significa x^3. El número 3 que está en el superíndice de la literal x nos indica que debemos multiplicar al número x por sí mismo 3 veces.

De manera semejante, la expresión: x^5 nos indica que debemos multiplicar el número x por sí mismo 5 veces. Entonces, al multiplicar:

$$x^5 \cdot x^3 = (\underbrace{x \cdot x \cdot x}_{\text{3 factores}}) \cdot (\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{5 factores}})$$

Y en total terminamos multiplicando 8 veces el número x, por eso debemos sumar los exponentes:

$$x^5 \cdot x^3 = x^{5+3} = x^8$$

De manera semejante podemos justificar las demás leyes de los exponentes.

Por ejemplo, si consideramos el ejemplo dado para la segunda ley, tenemos:

$$\frac{q^9}{q^4} = q^{9-4} = q^5$$

lo que pasa es que en realidad tenemos:

$$q^9 = \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}_{\text{9 factores}} \qquad \text{y también,} \qquad q^4 = \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot q}_{\text{4 factores}}$$

por eso:

$$\frac{q^9}{q^4} = \frac{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}{q \cdot q \cdot q \cdot q}$$

De las 9 q's que aparecen en el numerador de la fracción, 4 de esas se «*cancelan*» con las que aparecen en el denominador:

$$\begin{aligned} \frac{q^9}{q^4} &= \frac{\cancel{q} \cdot \cancel{q} \cdot \cancel{q} \cdot \cancel{q} \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}{\cancel{q} \cdot \cancel{q} \cdot \cancel{q} \cdot \cancel{q}} \\ &= \frac{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}{1} \\ &= q^5 \end{aligned}$$

y por eso debemos restar los exponentes.

Considera ahora el caso cuando tenemos:

$$\frac{a^4}{a^4} \qquad\qquad a \neq 0$$

En este caso, si aplicamos la segunda ley de los exponentes, obtenemos:

$$\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0$$

Pero si $a \neq 0$, debemos poder hacer la división. Por ejemplo, supongamos que $a = 2$. Entonces, $a^4 = 2^4 = 16$. Y al sustituir este valor en la expresión anterior obtenemos:

$$\frac{a^4}{a^4} = \frac{2^4}{2^4} = \frac{16}{16} = 1 = a^0$$

Esta es la cuarta ley de los exponentes[2].

Para deducir la tercera ley de los exponentes, consideramos el caso cuando el exponente del denominador es mayor que el exponente del numerador. Por ejemplo:

$$\frac{a^4}{a^9} = a^{4-9} = a^{-5}$$

Pero si desarrollamos la expresión de acuerdo a la definición de potencia (como multiplicaciones abreviadas), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{a^9} &= \frac{1 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} \\ &= \frac{1 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{5 factores}}} \\ &= \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} \\ &= \frac{1}{a^5} \end{aligned}$$

Pero ambos resultados son equivalentes. Es decir,

$$\frac{1}{a^5} = a^{-5}$$

[2]Por la propiedad de transitividad de la igualdad, $1 = a^0 \quad \Rightarrow \quad a^0 = 1$.

Así hemos obtenido la tercera ley de los exponentes.

Debes observar que en realidad, la cuarta ley es un caso especial de la tercera ley de los exponentes.

Para justificar la quinta ley de los exponentes, basta aplicar la primera ley de los exponentes varias veces. Por ejemplo, en el siguiente caso:

$$\left(x^4\right)^3 = x^4 \cdot x^4 \cdot x^4$$

Y ahora podemos aplicar la primera ley de los exponentes que nos dice: «*cuando dos factores tengan la misma base, suma los exponentes para encontrar el resultado*». En este caso debemos sumar: $4+4+4 = 3\times 4 = 12$.

Observa que se repite el sumando 4 un total de 3 veces. Por eso podemos multiplicar los exponentes al aplicar la segunda ley:

$$\left(x^4\right)^3 = x^4 \cdot x^4 \cdot x^4 = x^{(3)(4)} = x^{12}$$

Las siguientes (y últimas) dos leyes son muy sencillas de justificar. Para esto simplemente aplicamos la definición de potencia. Por ejemplo,

$$(5\,a)^3 = (5\,a)\cdot(5\,a)\cdot(5\,a) = 5\cdot 5\cdot 5\cdot a\cdot a\cdot a = 5^3\cdot a^3$$

De manera semejante, para la última ley, tenemos:

$$\left(\frac{5}{a}\right)^3 = \left(\frac{5}{a}\right)\cdot\left(\frac{5}{a}\right)\cdot\left(\frac{5}{a}\right) = \frac{5\cdot 5\cdot 5}{a\cdot a\cdot a} = \frac{5^3}{a^3}$$

Muchas de las expresiones más complejas y difíciles que te puedes imaginar, pueden fácilmente simplificarse a través de las reglas de los exponentes y otras herramientas algebraicas que aprenderemos más adelante.

No importa qué tan compleja se vea una expresión, es casi seguro que hay alguna forma de expresarla de una manera equivalente, pero mucho más sencilla.

El procedimiento que se utiliza en esas expresiones muy complejas es exactamente el mismo que se utiliza con los ejemplos que se dan en la definición.

Evidentemente, algunas veces tendremos que aplicar varias reglas de los exponentes simultáneamente, o algunas otras propiedades de las expresiones algebraicas.

Simplifica:

$$\left(t^5\,r^3\,s^7\right)^2 =$$

Ejemplo 1

- En este caso, basta aplicar la ley *(v)* de los exponentes:

$$\begin{aligned}\left(t^5\,r^3\,s^7\right)^2 &= t^{5\cdot 2}\,r^{3\cdot 2}\,s^{7\cdot 2}\\ &= t^{10}\,r^6\,s^{14}\end{aligned}$$

Simplifica:

$$\frac{x^2\,y^5}{x^3\,y} =$$

Ejemplo 2

- Empezamos aplicando la ley *(ii)* de los exponentes:

$$\begin{aligned}\frac{x^2\,y^5}{x^3\,y} &= x^{2-3}\,y^{5-1}\\ &= x^{-1}\,y^4\\ &= \frac{y^4}{x}\end{aligned}$$

En el álgebra, como en cualquier otra cosa, aprendes mejor las reglas mientras más las practiques.

Así que la recomendación es que trates de justificar cada paso de la solución de cada ejemplo para que comprendas por qué se realiza de esa manera.

Es muy recomendable que resuelvas todos los ejercicios de tarea que se incluyen al final de cada tema para que adquieras destreza en la resolución de los mismos.

Ejemplo 3

Simplifica:

$$\frac{m^{-1}\,n^5\,w^6}{m^7\,v^{-6}\,w} =$$

- En este caso empezamos convirtiendo todos los exponentes negativos en positivos, aplicando la ley *(iii)*:

$$\begin{aligned}\frac{m^{-1}\,n^5\,w^6}{m^7\,n^{-6}\,w} &= \frac{n^5\,w^6\,n^6}{m^7\,w\,m}\\ &= \frac{n^{5+6}\,w^{6-1}}{m^{7+1}}\\ &= \frac{n^{11}\,w^5}{m^8}\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Simplifica:

$$\left(\frac{a^4\,b^7\,c^{12}}{a^7\,b^5\,c^8}\right)^3 =$$

- En este caso, tenemos que aplicar simultáneamente varias leyes.
- Empezamos simplificando la fracción que está dentro de los paréntesis:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^4\,b^7\,c^{12}}{a^7\,b^5\,c^8}\right)^3 &= \left(a^{4-7}\,b^{7-5}\,c^{12-8}\right)^3\\ &= \left(a^{-3}\,b^2\,c^4\right)^3\end{aligned}$$

- Ahora expresamos todos los exponentes negativos como positivos aplicando la ley *(iii)*:

$$\left(a^{-3}\,b^2\,c^4\right)^3 = \left(\frac{b^2\,c^4}{a^3}\right)^3$$

- Finalmente, vamos a aplicar las leyes *(v)* y *(vii)*

$$\left(\frac{b^2\,c^4}{a^3}\right)^3 = \frac{b^{2\cdot3}\,c^{4\cdot3}}{a^{3\cdot3}} = \frac{b^6\,c^{12}}{a^9}$$

- Entonces,

$$\left(\frac{a^4\,b^7\,c^{12}}{a^7\,b^5\,c^8}\right)^3 = \frac{b^6\,c^{12}}{a^9}$$

¿Observas qué diferente se ven las dos expresiones, a pesar de que se trata de la misma?

Simplifica:

$$\left(\frac{x^5\,y^7}{z^2}\right)\left(\frac{z^7\,x^3}{y^4}\right)$$

Ejemplo 5

- Primero debemos multiplicar ambos factores y después simplificamos, aplicando las leyes de los exponentes en ambos casos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^5\,y^7}{z^2}\right)\left(\frac{z^7\,x^3}{y^4}\right) &= \frac{\left(x^5\,y^7\right)\left(z^7\,x^3\right)}{\left(z^2\right)\left(y^4\right)}\\
&= \frac{x^{5+3}\,y^7\cdot z^7}{z^2\cdot y^4}\\
&= x^8\,y^{7-4}\,z^{7-2}\\
&= x^8\,y^3\,z^5
\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\left(\frac{x^5\,y^7}{z^2}\right)\left(\frac{z^7\,x^3}{y^4}\right) = x^8\,y^3\,z^5$$

- Identifica qué ley de los exponentes se aplicó en cada caso.

Algunas veces se requerirá aplicar la ley distributiva, como en el siguiente caso:

Desarrolla el siguiente producto:

$$7\,x^3\cdot\left(3\,x^2+5\,x^5\right)$$

Ejemplo 6

- Primero recordamos la ley distributiva para los números reales:

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

- Ahora aplicamos esta misma ley a la expresión que queremos desarrollar:

$$\begin{aligned}
7\,x^3\cdot\left(3\,x^2+5\,x^5\right) &= \left(7\,x^3\right)\left(3\,x^2\right)+\left(7\,x^3\right)\left(5\,x^5\right)\\
&= 21\,x^{3+2}+35\,x^{3+5}\\
&= 21\,x^5+35\,x^8
\end{aligned}$$

- Observa que empezamos multiplicando los números conocidos y después multiplicamos las literales, aplicando las leyes de los exponentes.

- Entonces, al desarrollar, obtenemos:

$$7\,x^3\cdot\left(3\,x^2+5\,x^5\right) = 21\,x^5+35\,x^8$$

Las leyes de los exponentes pueden generalizarse para incluir también a los radicales.

El siguiente ejemplo sugiere esta generalización.

Ejemplo 7

Considerando que:

$$\begin{aligned}\sqrt{4}\times\sqrt{4} &= 4\\ \sqrt{9}\times\sqrt{9} &= 9\\ \sqrt{25}\times\sqrt{25} &= 25\end{aligned}$$

Justifica por qué $\sqrt{x} = x^{1/2}$

- Dados los ejemplos, sabemos que si multiplicamos $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = x$
- Ahora suponemos que $\sqrt{x} = x^{k}$.
- Lo que deseamos determinar es el valor de k.
- Para eso, vamos a utilizar las leyes de los exponentes.
- En particular, usaremos la primera ley de los exponentes:

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = x^{k}\cdot x^{k} = x^{k+k} = x^{2k}$$

- Pero ya sabemos que $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = x^{1}$, entonces,

$$x^{2k} = x^{1}$$

- Y para que se cumpla la igualdad se requiere que $2k = 1$.
- Esta última igualdad nos dice: «*pensé un número, lo multipliqué por 2 y obtuve como resultado 1. ¿Qué número pensé?*»
- Obviamente pensó $\dfrac{1}{2}$. Entonces,

$$x^{2k} = x^{2\times 0.5} = x^{1}$$

- y $\sqrt{x} = x^{1/2}$, supuesto que sea posible calcular la raíz del número x.

Entonces, podemos considerar a los radicales como exponentes fraccionarios.

También podemos utilizar el procedimiento anterior para mostrar que $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, $\sqrt[4]{x} = x^{1/4}$, etc. Y como los radicales son exponentes, podemos aplicarles las leyes de los exponentes.

En otras palabras, las leyes de los exponentes también se aplican a los radicales.

Ejemplo 8

Simplifica la siguiente expresión:

$$\sqrt[4]{x^{8}y^{12}z^{20}}$$

- Para empezar, ya sabemos que $\sqrt[4]{a} = a^{1/4}$.

- Entonces, en lugar de escribir el signo de radical, podemos escribir en su lugar el exponente $1/4$.

$$\sqrt[4]{x^8 y^{12} z^{20}} = \left(x^8 y^{12} z^{20}\right)^{1/4}$$

- Ahora podemos aplicar las leyes (*v*) y (*vi*) de los exponentes:

$$\begin{aligned}\left(x^8 y^{12} z^{20}\right)^{1/4} &= x^{8/4} y^{12/4} z^{20/4}\\ &= x^2 y^3 z^5\end{aligned}$$

- Entonces, al simplificar, obtenemos:

$$\sqrt[4]{x^8 y^{12} z^{20}} = x^2 y^3 z^5$$

Simplifica:

$$\sqrt[3]{\frac{m^4 n^7 w^{11}}{w^2 n^4 m}}$$

Ejemplo 9

- De nuevo, empezamos convirtiendo el signo radical en un exponente fraccionario:

$$\sqrt[3]{\frac{m^4 n^7 w^{11}}{w^2 n^4 m}} = \left(\frac{m^4 n^7 w^{11}}{w^2 n^4 m}\right)^{1/3}$$

- Ahora podemos aplicar las leyes de los exponentes.
- Empezamos simplificando lo que está dentro de los paréntesis:

$$\begin{aligned}\left(\frac{m^4 n^7 w^{11}}{w^2 n^4 m}\right)^{1/3} &= \left(m^{4-1} n^{7-4} w^{11-2}\right)^{1/3}\\ &= \left(m^3 n^3 w^9\right)^{1/3}\end{aligned}$$

- Y finalmente podemos aplicar las leyes (*v*) y (*vi*) de los exponentes:

$$\begin{aligned}\left(m^3 n^3 w^9\right)^{1/3} &= m^{3/3} n^{3/3} w^{9/3}\\ &= m^1 n^1 w^3\\ &= m\, n\, w^3\end{aligned}$$

- Por tanto,

$$\sqrt[3]{\frac{m^4 n^7 w^{11}}{w^2 n^4 m}} = m\, n\, w^3$$

Pero no siempre tendremos una solución así, de forma que todos los factores queden sin signo de radical. Algunas veces tendremos en el resultado signos de radical. Esto ocurrirá cuando uno de los exponentes del argumento del radical **no** sean múltiplos del índice del radical.

El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos.

Simplifica:

$$\sqrt[4]{u^7 v^6 w^{11}}$$

Ejemplo 10

- Empezamos escribiendo el signo de radical como un exponente fraccionario:

$$\sqrt[4]{u^7 v^6 w^{11}} = \left(u^7 v^6 w^{11}\right)^{1/4}$$

- Ahora aplicamos las leyes de los exponentes:

$$u^{7/4} v^{6/4} w^{11/4}$$

- Lo único que podemos hacer es expresar las fracciones impropias (las que tienen un cociente mayor a 1), que aparecen en los exponentes como suma de un entero más una fracción propia (con cociente menor a 1).

- Por ejemplo, la fracción:

$$\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$$

- Lo que nos permite escribir:

$$u^{7/4} = u^{1+(3/4)} = u^1 \cdot u^{3/4}$$

- Ahora aplicamos este principio a todos los factores del resultado:

$$\begin{aligned} u^{7/4} v^{6/4} w^{11/4} &= u^1 \cdot u^{3/4} \cdot v^1 \cdot v^{2/4} \cdot w^2 \cdot w^{3/4} \\ &= u \cdot u^{3/4} \cdot v \cdot v^{2/4} \cdot w^2 \cdot w^{3/4} \\ &= u\, v\, w^2 \cdot u^{3/4} \cdot v^{2/4} \cdot w^{3/4} \end{aligned}$$

- Pero ya sabemos que un exponente fraccionario en realidad representa un radical, con lo que podemos reescribir la expresión de una manera equivalente como sigue:

$$u\, v\, w^2 \cdot u^{3/4} \cdot v^{2/4} \cdot w^{3/4} = u\, v\, w^2 \cdot \sqrt[4]{u^3 \cdot v^2 \cdot w^3}$$

- Entonces,

$$\sqrt[4]{u^7 v^6 w^{11}} = u\, v\, w^2 \cdot \sqrt[4]{u^3 \cdot v^2 \cdot w^3}$$

- O de manera semejante, sin escribir radicales en el resultado:

$$\sqrt[4]{u^7 v^6 w^{11}} = u\, v\, w^2 \cdot u^{3/4} \cdot v^{2/4} \cdot w^{3/4}$$

Ejercicios 2.2.1 Simplifica cada una de las siguientes expresiones algebraicas aplicando las leyes de los exponentes. Expresa todos los exponentes positivos.

1) $x^5 \cdot x^7 \cdot x^{-12} =$ 1

2) $\dfrac{m^5\, n^9\, q^7}{m^{12}\, n^4\, q^{11}} =$ $\dfrac{n^5}{m^7\, q^4}$

3) $\dfrac{t^5\, u\, v^2}{u^5\, v^7\, t^9} =$ $\dfrac{1}{t^4\, u^4\, v^5}$

4) $\left(\dfrac{a^4\, b^5\, c^6}{a^6\, b^4\, c^2}\right)^2 =$ $\dfrac{b^2\, c^8}{a^4}$

5) $\left(\dfrac{x^9\, y^2\, z^3}{x^{11}\, y^9\, z^6}\right)^7 =$ $\dfrac{1}{x^{14}\, y^{49}\, z^{21}}$

6) $\left(\dfrac{x^{5}y^{-10}z^{12}}{x^{-10}y^{2}z^{12}}\right)=$ $x^{15}\,y^{-12}$

7) $\left(\dfrac{x^{-8}y^{10}z^{4}}{x^{11}y^{-4}z^{10}}\right)=$ $x^{-19}\,y^{14}\,z^{-6}$

8) $\left(\dfrac{x^{-11}y^{-10}z^{8}}{x^{-7}y^{12}z^{4}}\right)=$ $x^{-4}\,y^{-22}\,z^{4}$

9) $\left(\dfrac{x^{5}y^{-12}z^{13}}{x^{15}y^{3}z^{5}}\right)=$ $x^{-10}\,y^{-15}\,z^{8}$

10) $\left(\dfrac{x^{8}y^{11}z^{13}}{x^{8}y^{-11}z^{11}}\right)=$ $y^{22}\,z^{2}$

11) $\left(\dfrac{x^{4}y^{-10}z^{6}}{x^{-12}y^{-4}z^{13}}\right)=$ $x^{16}\,y^{-6}\,z^{-7}$

12) $\left(\dfrac{x^{6}y^{-5}z^{13}}{x^{7}y^{4}z^{9}}\right)=$ $x^{-1}\,y^{-9}\,z^{4}$

13) $\left(\dfrac{x^{13}y^{-4}z^{13}}{x^{-10}y^{-13}z^{8}}\right)=$ $x^{23}\,y^{9}\,z^{5}$

14) $\left(\dfrac{x^{5}y^{-9}z^{4}}{x^{-9}y^{5}z^{6}}\right)=$ $x^{14}\,y^{-14}\,z^{-2}$

15) $\left(\dfrac{x^{10}y^{2}z^{5}}{x^{15}y^{-2}z^{6}}\right)=$ $x^{-5}\,y^{4}\,z^{-1}$

16) $\left(\dfrac{x^{15}y^{-12}z^{11}}{x^{-4}y^{10}z^{8}}\right)=$ $x^{19}\,y^{-22}\,z^{3}$

17) $\left(\dfrac{x^{4}y^{3}z^{15}}{x^{-2}y^{12}z^{9}}\right)=$ $x^{6}\,y^{-9}\,z^{6}$

18) $\left(\dfrac{x^{5}y^{12}z^{3}}{x^{-13}y^{13}z^{9}}\right)=$ $x^{18}\,y^{-1}\,z^{-6}$

19) $\left(\dfrac{x^{-14}y^{-3}z^{6}}{x^{-13}y^{8}z^{13}}\right)=$ $x^{-1}\,y^{-11}\,z^{-7}$

20) $\left(\dfrac{x^{3}y^{-2}z^{9}}{x^{-2}y^{-14}z^{3}}\right)=$ $x^{5}\,y^{12}\,z^{6}$

21) $\left(\dfrac{x^{-8}y^{13}z^{14}}{x^{-12}y^{-7}z^{12}}\right)=$ $x^{4}\,y^{20}\,z^{2}$

22) $\left(\dfrac{x^{-2}y^{-9}z^{15}}{x^{5}y^{8}z^{9}}\right)=$ $x^{-7}\,y^{-17}\,z^{6}$

23) $\left(\dfrac{x^{6}y^{5}z^{5}}{x^{6}y^{-8}z^{11}}\right)=$ $y^{13}\,z^{-6}$

24) $\left(\dfrac{x^{15}y^{-2}z^{5}}{x^{-15}y^{6}z^{6}}\right)=$ $x^{30}\,y^{-8}\,z^{-1}$

25) $\left(\dfrac{x^{-7}y^{7}z^{5}}{x^{7}y^{-5}z^{15}}\right) =$ $x^{-14}y^{12}z^{-10}$

26) $\left(\dfrac{x^{11}y^{11}z^{4}}{x^{5}y^{-8}z^{6}}\right) =$ $x^{6}y^{19}z^{-2}$

27) $\left(\dfrac{x^{-5}y^{-4}z^{8}}{x^{-8}y^{-9}z^{15}}\right) =$ $x^{3}y^{5}z^{-7}$

28) $\left(\dfrac{x^{2}y^{14}z^{13}}{x^{-7}y^{-8}z^{9}}\right) =$ $x^{9}y^{22}z^{4}$

29) $\left(\dfrac{x^{-10}y^{-3}z^{9}}{x^{-14}y^{-4}z^{12}}\right) =$ $x^{4}y^{1}z^{-3}$

30) $\left(\dfrac{x^{-14}y^{-8}z^{13}}{x^{-3}y^{-7}z^{13}}\right) =$ $x^{-11}y^{-1}$

31) $\left(\dfrac{x^{-4}y^{-12}z^{6}}{x^{-3}y^{15}z^{9}}\right)^{5} =$ $x^{-5}y^{-135}z^{-15}$

32) $\left(\dfrac{x^{-10}y^{-2}z^{9}}{x^{-7}y^{11}z^{7}}\right)^{2} =$ $x^{-6}y^{-26}z^{4}$

33) $\left(\dfrac{x^{2}y^{10}z^{5}}{x^{-14}y^{-7}z^{10}}\right)^{2} =$ $x^{32}y^{34}z^{-10}$

34) $\left(\dfrac{x^{3}y^{10}z^{6}}{x^{-12}y^{-3}z^{7}}\right)^{2} =$ $x^{30}y^{26}z^{-2}$

35) $\left(\dfrac{x^{12}y^{-2}z^{2}}{x^{-13}y^{-13}z^{8}}\right)^{2} =$ $x^{50}y^{22}z^{-12}$

36) $\left(\dfrac{x^{-4}y^{-5}z^{8}}{x^{-6}y^{4}z^{5}}\right)^{2} =$ $x^{4}y^{-18}z^{6}$

37) $\left(\dfrac{x^{-11}y^{7}z^{12}}{x^{-3}y^{-9}z^{10}}\right)^{3} =$ $x^{-24}y^{48}z^{6}$

38) $\left(\dfrac{x^{13}y^{4}z^{14}}{x^{12}y^{14}z^{9}}\right)^{6} =$ $x^{6}y^{-60}z^{30}$

39) $\left(\dfrac{x^{4}y^{9}z^{8}}{x^{-8}y^{7}z^{3}}\right)^{2} =$ $x^{24}y^{4}z^{10}$

40) $\left(\dfrac{x^{-3}y^{10}z^{9}}{x^{-3}y^{-12}z^{4}}\right)^{2} =$ $y^{44}z^{10}$

41) $\left(\dfrac{x^{9}y^{2}z^{4}}{x^{-2}y^{11}z^{14}}\right)^{2} =$ $x^{22}y^{-18}z^{-20}$

42) $\left(\dfrac{x^{6}y^{-15}z^{15}}{x^{-2}y^{-14}z^{4}}\right)^{3} =$ $x^{24}y^{-3}z^{33}$

43) $\left(\dfrac{x^{14}y^{2}z^{7}}{x^{-4}y^{-10}z^{4}}\right)^{4} =$ $x^{72}\,y^{48}\,z^{12}$

44) $\left(\dfrac{x^{-5}y^{-8}z^{9}}{x^{12}y^{13}z^{8}}\right)^{2} =$ $x^{-34}\,y^{-42}\,z^{2}$

45) $\left(\dfrac{x^{10}y^{3}z^{9}}{x^{-6}y^{14}z^{6}}\right)^{2} =$ $x^{32}\,y^{-22}\,z^{6}$

46) $\left(\dfrac{x^{-8}y^{-7}z^{4}}{x^{-9}y^{-14}z^{14}}\right)^{4} =$ $x^{4}\,y^{28}\,z^{-40}$

47) $\left(\dfrac{x^{-10}y^{-8}z^{8}}{x^{-7}y^{-6}z^{8}}\right)^{2} =$ $x^{-6}\,y^{-4}$

48) $\left(\dfrac{x^{11}y^{-11}z^{13}}{x^{6}y^{-4}z^{12}}\right)^{5} =$ $x^{25}\,y^{-35}\,z^{5}$

49) $\left(\dfrac{x^{-9}y^{5}z^{13}}{x^{3}y^{2}z^{11}}\right)^{3} =$ $x^{-36}\,y^{9}\,z^{6}$

50) $\left(\dfrac{x^{-5}y^{-13}z^{8}}{x^{-12}y^{2}z^{15}}\right)^{2} =$ $x^{14}\,y^{-30}\,z^{-14}$

51) $\left(\dfrac{x^{-13}y^{5}z^{7}}{x^{2}y^{6}z^{8}}\right)^{2} =$ $x^{-30}\,y^{-2}\,z^{-2}$

52) $\left(\dfrac{x^{11}y^{-4}z^{4}}{x^{4}y^{-8}z^{11}}\right)^{3} =$ $x^{21}\,y^{12}\,z^{-21}$

53) $\left(\dfrac{x^{-12}y^{-13}z^{4}}{x^{3}y^{6}z^{11}}\right)^{2} =$ $x^{-30}\,y^{-38}\,z^{-14}$

54) $\left(\dfrac{x^{2}y^{9}z^{11}}{x^{8}y^{-8}z^{8}}\right)^{4} =$ $x^{-24}\,y^{68}\,z^{12}$

55) $\left(\dfrac{x^{13}y^{-7}z^{3}}{x^{-2}y^{-5}z^{4}}\right)^{3} =$ $x^{45}\,y^{-6}\,z^{-3}$

56) $\left(\dfrac{x^{9}y^{-7}z^{11}}{x^{-1}y^{-11}z^{13}}\right)\left(\dfrac{x^{4}y^{6}z^{12}}{x^{3}y^{3}z^{4}}\right) =$ $x^{11}\,y^{7}\,z^{6}$

57) $\left(\dfrac{x\,y^{-1}z^{12}}{x^{4}y^{9}z^{7}}\right)\left(\dfrac{x^{10}y^{9}}{y^{8}z^{7}}\right) =$ $x^{7}\,y^{-9}\,z^{-2}$

58) $\left(\dfrac{x^{-12}z^{8}}{x^{-4}y\,z^{9}}\right)\left(\dfrac{y^{12}z^{12}}{x^{2}y^{12}z^{12}}\right) =$ $x^{-10}\,y^{-1}\,z^{-1}$

59) $\left(\dfrac{x^{-3}y^{6}}{x^{-3}y^{13}}\right)\left(\dfrac{x^{4}y^{9}z^{3}}{x^{4}y\,z^{5}}\right) =$ $y\,z^{-2}$

60) $\left(\dfrac{x^{-1}y^{-2}z^{6}}{y^{2}z^{12}}\right)\left(\dfrac{x^{12}y^{7}}{x^{2}y^{3}z^{4}}\right) =$ $x^{9}\,z^{-10}$

61) $\left(\dfrac{x^{-5}y^{-5}z^{13}}{x^{-3}y^{3}z^{13}}\right)\left(\dfrac{x^{14}y^{12}z^{12}}{x\,y^{14}z^{11}}\right)=$ $x^{11}\,y^{-10}\,z$

62) $\left(\dfrac{x^{-6}y^{-3}z^{5}}{x^{-2}y\,z^{9}}\right)\left(\dfrac{x^{14}y^{11}z^{13}}{x\,y^{6}z^{13}}\right)=$ $x^{9}\,y\,z^{-4}$

63) $\left(\dfrac{x^{-8}y^{5}z^{13}}{x^{2}y^{8}z^{7}}\right)\left(\dfrac{x^{5}y^{6}z}{x^{2}y^{5}z}\right)=$ $x^{-7}\,y^{-2}\,z^{6}$

64) $\left(\dfrac{x^{-1}y^{6}z^{11}}{x\,y\,z^{14}}\right)\left(\dfrac{x^{14}y^{6}z^{13}}{x^{2}y^{9}z^{12}}\right)=$ $x^{10}\,y^{2}\,z^{-2}$

65) $\left(\dfrac{x^{10}y^{-3}z^{9}}{x^{-1}y^{4}z^{8}}\right)\left(\dfrac{x^{10}y^{7}z^{14}}{x^{3}y^{8}z^{9}}\right)=$ $x^{18}\,y^{-8}\,z^{6}$

66) $\left(\dfrac{x\,y^{4}z^{12}}{x\,y^{6}z^{7}}\right)\left(\dfrac{x^{8}y^{13}z^{13}}{x^{4}y^{3}z^{9}}\right)=$ $x^{4}\,y^{8}\,z^{9}$

67) $\left(\dfrac{x^{-5}z^{11}}{x^{-4}y^{-6}z^{13}}\right)\left(\dfrac{x^{8}y^{13}}{x^{2}y^{6}z^{9}}\right)=$ $x^{5}\,y^{13}\,z^{-11}$

68) $\left(\dfrac{y^{-14}z^{6}}{x^{-2}y^{-9}z^{14}}\right)\left(\dfrac{x^{2}y^{2}z^{4}}{x^{2}y^{12}z^{9}}\right)=$ $x^{2}\,y^{-15}\,z^{-13}$

69) $\left(\dfrac{x^{-13}y^{8}}{x^{4}y^{13}z^{7}}\right)\left(\dfrac{x^{3}y^{2}z^{2}}{x^{3}y^{7}z^{6}}\right)=$ $x^{-17}\,y^{-10}\,z^{-11}$

70) $\left(\dfrac{x^{-14}y^{-9}z^{9}}{x\,y^{11}z^{13}}\right)\left(\dfrac{x^{10}y^{6}z^{4}}{x^{4}y^{4}z}\right)=$ $x^{-9}\,y^{-18}\,z^{-1}$

71) $\left(\dfrac{x^{13}y^{-2}z^{6}}{x^{-3}y^{-5}z^{6}}\right)\left(\dfrac{x^{11}y\,z^{13}}{y^{6}z^{11}}\right)=$ $x^{27}\,y^{-2}\,z^{2}$

72) $\left(\dfrac{x^{-4}y^{13}z^{10}}{y^{13}z^{2}}\right)\left(\dfrac{x^{7}y^{6}z^{7}}{y^{9}z^{2}}\right)=$ $x^{3}\,y^{-3}\,z^{13}$

73) $\left(\dfrac{x^{-6}y^{-3}}{x^{2}y^{-4}z^{4}}\right)\left(\dfrac{x^{9}y^{12}}{y^{12}z^{13}}\right)=$ $x\,y\,z^{-17}$

74) $\left(\dfrac{x^{7}z^{5}}{x\,y^{8}z^{10}}\right)\left(\dfrac{x^{8}y\,z^{7}}{x\,z^{6}}\right)=$ $x^{13}\,y^{-7}\,z^{-4}$

75) $\left(\dfrac{x^{12}y^{3}z^{9}}{x^{-2}y^{-9}z^{2}}\right)\left(\dfrac{x^{7}y^{11}z^{12}}{x^{3}y^{10}z^{4}}\right)=$ $x^{18}\,y^{13}\,z^{15}$

76) $\sqrt{x^{23}y^{6}z^{7}}=$ $x^{11}y^{3}z^{3}\sqrt{x\,z}$

77) $\sqrt[5]{x^{8}y^{12}z^{11}}=$ $x\,y^{2}z^{2}\sqrt[5]{x^{3}y^{2}z}$

78) $\sqrt{x^{13}y^{15}z^{11}}=$ $x^{6}y^{7}z^{5}\sqrt{x\,y\,z}$

79) $\sqrt[3]{x^{11}y^{13}z^{14}}=$ $x^{3}y^{4}z^{4}\sqrt[3]{x^{2}y\,z^{2}}$

80) $\sqrt[3]{x^{15}y^{17}z^{21}}=$ $x^{5}y^{5}z^{7}\sqrt[3]{y^{2}}$

81) $\sqrt[5]{x^{21}y^{7}z^{23}}=$ $x^{4}y\,z^{4}\sqrt[5]{x\,y^{2}z^{3}}$

82) $\sqrt[8]{x^{10}y^{12}z^{19}} =$ $x\,y\,z^2\sqrt[8]{x^2y^4z^3}$

83) $\sqrt[4]{x^{23}y^{6}} =$ $x^5y\sqrt[4]{x^3y^2}$

84) $\sqrt[8]{y^4z^{11}} =$ $z\sqrt[8]{y^4z^3}$

85) $\sqrt[8]{x^2y^5z^{11}} =$ $z\sqrt[8]{x^2y^5z^3}$

86) $\sqrt[7]{x^7y^{13}z^{23}} =$ $x\,y\,z^3\sqrt[7]{y^6z^2}$

87) $\sqrt[3]{x^{10}y^{16}z^{19}} =$ $x^3y^5z^6\sqrt[3]{x\,y\,z}$

88) $\sqrt[5]{y^{19}z^5} =$ $y^3z\sqrt[5]{y^4}$

89) $\sqrt[7]{x^{19}y^{15}z^{11}} =$ $x^2y^2z\sqrt[7]{x^5y\,z^4}$

90) $\sqrt[5]{x^{12}y^{17}z^{11}} =$ $x^2y^3z^2\sqrt[5]{x^2y^2z}$

91) $\sqrt{\dfrac{x^6y^5z^8}{x^2y^2z^6}} =$ $x^2y\,z\sqrt{y}$

92) $\sqrt[6]{\dfrac{x^{10}y^4z^3}{x\,y^8}} =$ $\sqrt[6]{\dfrac{x^3z^3}{y^4}}$

93) $\sqrt{\dfrac{x^{13}y^5z^3}{x^2y^{12}z^3}} =$ $\dfrac{x^5}{y^3}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

94) $\sqrt{\dfrac{x^8y^4}{x^2y\,z^{11}}} =$ $\dfrac{x^3y}{z^5}\sqrt{\dfrac{y}{z}}$

95) $\sqrt{\dfrac{x^{12}y^{10}z^{13}}{x^4y^{10}z^2}} =$ $x^4z^5\sqrt{z}$

96) $\sqrt{\dfrac{x^{13}y^6z}{y^4z^{14}}} =$ $\dfrac{x^6y}{z^6}\sqrt{\dfrac{x}{z}}$

97) $\sqrt[5]{\dfrac{x^7y^{13}z^{13}}{x^3y^{11}z^{10}}} =$ $\sqrt[5]{x^4y^2z^3}$

98) $\sqrt[6]{\dfrac{x\,y^2z^5}{x^3y^{11}z^5}} =$ $\dfrac{1}{y}\sqrt[6]{\dfrac{1}{x^2y^3}}$

99) $\sqrt{\dfrac{x\,z^3}{x^2y^7z^{10}}} =$ $\dfrac{1}{y^3z^3}\sqrt{\dfrac{1}{x\,y\,z}}$

100) $\sqrt[4]{\dfrac{y^7}{x^3y^{10}z^{14}}} =$ $\dfrac{1}{z^3}\sqrt[4]{\dfrac{1}{x^3y^3z^2}}$

101) $\sqrt[5]{\dfrac{y^8z^4}{x^2y^7}} =$ $\sqrt[5]{\dfrac{y\,z^4}{x^2}}$

102) $\sqrt[5]{\dfrac{x^8y^{11}z^8}{x^3y^{12}z^6}} =$ $\sqrt[5]{\dfrac{z^2}{y}}$

103) $\sqrt[5]{\dfrac{x^8y^{10}z^3}{x\,y^9z}} =$ $x\sqrt[5]{x^2y\,z^2}$

104) $\sqrt[4]{\dfrac{x^{14}y^6z^4}{x^4y^{11}}} =$ $\dfrac{x^2z}{y}\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{y}}$

105) $\sqrt[3]{\dfrac{y^9}{x^4y^{12}z^{14}}} =$ $\dfrac{1}{x\,y\,z^4}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x\,z^2}}$

106) $\sqrt[3]{\dfrac{x^8y^5z^{11}}{x^4y\,z}} =$ $x\,y\,z^3\sqrt[3]{x\,y\,z}$

107) $\sqrt{\dfrac{x^5y^8z^2}{x^3y^5z^{13}}} =$ $\dfrac{x\,y}{z^5}\sqrt{\dfrac{y}{z}}$

108) $\sqrt[5]{\dfrac{x^7y^{12}z^{14}}{x^2y^{12}z^{12}}} =$ $x\sqrt[5]{z^2}$

109) $\sqrt[3]{\dfrac{z^{14}}{x\,y^9z}} =$ $\dfrac{z^4}{y^3}\sqrt[3]{\dfrac{z}{x}}$

110) $\sqrt[4]{\dfrac{x^7y\,z}{x\,y^{11}z^{14}}} =$ $\dfrac{x}{y^2z^3}\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{y^2z}}$

2.2.2 Operaciones con polinomios

Los polinomios son una generalización de nuestro sistema de numeración.

Cuando escribimos un número, por ejemplo, 2 354, queremos decir:

$$\begin{aligned} 2\,354 &= 2\,000+300+50+4 \\ &= (2)(1\,000)+(3)(100)+(5)(10)+4 \\ &= (2)(10^3)+(3)(10^2)+(5)(10^1)+(4)(10^0) \end{aligned}$$

Ahora, en lugar de utilizar nuestra base decimal, es decir, 10, utilizamos un número x cualquiera:

$$(2)(10^3)+(3)(10^2)+(5)(10^1)+(4)(10^0) \quad\longrightarrow\quad 2\,x^3+3\,x^2+5\,x+4$$

que en este caso tendremos un número en la base x, no en base decimal.

Definición 1

Polinomio

Es una expresión algebraica de la forma:

$$a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots+a_3\,x^3+a_2\,x^2+a_x+a_0$$

Donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_3, a_2, a_1, a_0$ son números reales y los exponentes $n, n-1, \cdots, 3, 2, 1$ son números enteros.

El grado del polinomio es el número n.

Ejemplo 1

Los siguientes son polinomios:

- $x+1$
- x^2+x+1

- $\sqrt{2}\,x^4 - 5\,x^3 - 12\,x^2 + x - \pi$
- $\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{4}$
- $\dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{1}{3}\,x + \dfrac{1}{4}$

Observa que los coeficientes pueden ser fracciones o inclusive números irracionales, pero los exponentes necesariamente deben ser números enteros.

Existe un lenguaje específico de los polinomios que consiste en el nombre que se asigna a cada uno, dependiendo del número de términos que contenga.

CLASIFICACIÓN DE POLINOMIOS

Definición 2

Monomio: *Es un polinomio que tiene solamente un término.*
Ejemplo: $3\,x^2$

Binomio: *Es un polinomio que tiene exactamente dos términos no semejantes.*
Ejemplo: $a^2 - b^2$

Trinomio: *Es un polinomio que tiene exactamente tres términos no semejantes.*
Ejemplo: $x^2 + 2\,x + 1$

Como los polinomios son una generalización de los números, las operaciones con polinomios se realizan utilizando los mismos procedimientos que con los números.

Ejemplo 2

Calcula la siguiente suma:

$$(x^2 + 5\,x - 3) + (2\,x^2 - 7\,x + 12) =$$

- Podemos considerar al coeficiente del término que contiene a x^2 como el dígito de las *centenas* en los polinomios.
- De manera semejante, podemos considerar al término que contiene a x como el dígito de las *decenas* en los polinomios.
- Finalmente, podemos considerar al término que no contiene a x como el dígito de las unidades.
- Cuando realizamos operaciones con números sumamos unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc.
- De la misma manera realizaremos la suma con los polinomios:

$$(x^2 + 5\,x - 3) + (2\,x^2 - 7\,x + 12) = 3\,x^2 - 2\,x + 9$$

- Si observas, sumamos por separado:

$$\begin{array}{rrcl}
\text{«\textit{Centenas}»:} & x^2 + 2\,x^2 & = & 3\,x^2 \\
\text{«\textit{Decenas}»:} & 5\,x - 7\,x & = & -2\,x \\
\text{«\textit{Unidades}»:} & -3 + 12 & = & 9
\end{array}$$

- Y finalmente escribimos el resultado.

- Decimos que sumamos los términos que son semejantes.

Debes observar que no podemos sumar un término que tiene a x^2 con otro que tiene a x, porque es como si estuvieramos sumando centenas con decenas... el error consistiría en que no acomodamos los números correctamente alineados con respecto al punto decimal.

El maestro te corrigiría diciendo: *estás sumando dos términos que no son semejantes, y siempre debemos sumar téminos semejantes...*

Definición 3

TÉRMINOS SEMEJANTES
Dos o más términos son semejantes si son monomios que tienen las mismas literales y cada una del mismo grado, es decir, tienen el mismo exponente en su literal respectivo.

Realizar una resta de polinomios es lo mismo que realizar una suma, porque restar significa sumar un número negativo.

Pero para poder realizar correctamente una resta de polinomios, primero debemos aplicar las leyes de los signos, multiplicando por el signo negativo que está antes del segundo polinomio.

Así que, solamente como recordatorio, se da la siguiente definición.

Definición 4

LEYES DE LOS SIGNOS
Las leyes de los signos son las siguientes:

- $+\cdot+=+$ *(más por más es más)*
- $+\cdot-=-$ *(más por menos es menos)*
- $-\cdot+=-$ *(menos por más es menos)*
- $-\cdot-=+$ *(menos por menos es más)*

Ejemplo 3

Calcula la siguiente resta de polinomios:

$$(7x^2+3x-1)-(2x^2-1x+2)=$$

- Aquí debemos aplicar las leyes de los signos primero: vamos a multiplicar por el signo negativo que está a la izquierda del segundo polinomio todos los términos de él:
$$-(2x^2-1x+2)=-2x^2+1x-2$$
- Ahora procedemos como en el caso de la suma de polinomios, sumando términos semejantes...
$$7x^2+3x-1-2x^2+1x-2=5x^2+4x-3$$
- Entonces,
$$(7x^2+3x-1)-(2x^2-1x+2)=5x^2+4x-3$$

La multiplicación de los polinomios requiere de la aplicación de las reglas de los exponentes.

Empezamos con la multiplicación de un monomio por un polinomio.

Ejemplo 4

Calcula:

$$\left(3x^2\right)\left(2+5x+x^2\right)=$$

- Empezamos recordando que, de acuerdo a la ley distributiva, el monomio $3x^2$ tiene que multiplicarse por todos los términos del polinomio $2+5x+x^2$.
- Entonces podemos ver que se trata solamente de varias multiplicaciones de un monomio por otro monomio... y esto es algo que ya sabemos hacer.
- No olvides aplicar la primera ley de los exponentes...
- Empezamos: $(3x^2)(2)=6x^2$
- $\left(3x^2\right)(5x)=15x^3$
- $\left(3x^2\right)\left(x^2\right)=3x^4$
- Ahora, el resultado es, de acuerdo a la ley distributiva, igual a la suma de todos los productos de monomios que ya encontramos,
- Entonces:
$$\left(3x^2\right)\left(2+5x+x^2\right)=6x^2+15x^3+3x^4$$

Ahora la multiplicación de un binomio por un polinomio.

El procedimiento para calcular el siguiente producto es, en esencia, el mismo que el del ejemplo anterior, salvo por una pequeña diferencia: aquí debemos aplicar dos veces la ley distributiva, una por cada término del binomio.

Así que no debes espantarte por ver muchos términos en cada uno de los polinomios que se está multiplicando: siempre aplicamos el mismo procedimiento: aplicamos la ley distributiva para cada uno de los términos del primer polinomio, multiplicando por todos los términos del segundo polinomio.

Al final, simplificamos sumando términos semejantes y así obtenemos el resultado de esa multiplicación.

Ejemplo 5

Multiplica:
$$(2-x)\left(7-2x+3x^2\right)=$$

- Empezamos multiplicando el primer término del primer polinomio $(2-x)$ por el segundo polinomio:
- $(2)\left(7-2x+3x^2\right)=14-4x+6x^2$
- Ahora multiplicamos el segundo término del primer polinomio por el segundo polinomio:
- $(-x)\left(7-2x+3x^2\right)=-7x+14x^2-3x^3$
- Ahora sumamos los términos semejantes para formar un polinomio, que será el resultado de nuestra multiplicación:
$$\left(14-4x+6x^2\right)+\left(-7x+14x^2-3x^3\right)=14-11x+20x^2-3x^3$$
- Entonces,
$$(2-x)\left(7-2x+3x^2\right)=14-1x+20x^2-3x^3$$
- Con lo que hemos terminado.

Antes de continuar con la división de un polinomio entre un binomio, recordaremos el procedimiento para realizar la división entre números.

Consideremos, por ejemplo, la siguiente división:

$$12\,\overline{\big)\;331\;}$$

Para realizar esta operación empezamos buscando un número que multiplicado por 12 sea igual a 33, o un poco menor. Ese número es 2, porque $2 \times 12 = 24$.

Escribimos 2 "*arriba de la casita*" y 24 debajo del número 33:

$$\begin{array}{r|l} & \;\;2 \\ \cline{2-2} 12 & 331 \\ & 24 \end{array}$$

Lo siguiente consiste en cambiar de signo al número 24 y hacer la suma de los números 33 y -24:

$$\begin{array}{r|l} & \;\;2 \\ \cline{2-2} 12 & 331 \\ & -24 \\ \cline{2-2} & \;\;\;9 \end{array}$$

Ahora "*bajamos*" el número 1 (del 331) y volvemos a buscar un número que multiplicado por 12 sea igual a 91 o un poco menos. Ese número es 7, porque $12 \times 7 = 84$.

De nuevo, tenemos que cambiar el signo del 84 cuando lo escribamos debajo del 91:

$$\begin{array}{r|l} & \;27 \\ \cline{2-2} 12 & 331 \\ & -24 \\ \cline{2-2} & \;\;\;91 \\ & \;-84 \\ \cline{2-2} & \;\;\;\;\;7 \end{array}$$

Entonces, el resultado de dividir 331 entre 12 es igual a 27 enteros y $7/12$.

Observa que el residuo de la división (7) se dividió entre 12 (el divisor), porque todavía no lo habíamos dividido (todavía estaba adentro de "*la casita*").

Exactamente el mismo procedimiento es el que seguiremos cuando hagamos una división entre polinomios.

Ejemplo 6

Calcula:

$$(x^2 - 3\,x - 10) \div (x + 2) =$$

- Empezamos identificando el dividendo y el divisor:

  Dividendo: $x^2 - 3\,x - 10$

  Divisor: $x + 2$

- Ahora los colocamos en "*la casita*" para hacer la división:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{} & \\ \cline{2-2}
x+2 & x^2-3x-10
\end{array}$$

- Ahora buscamos una expresión que multiplicada por x nos de igual a x^2. Esa expresión es: x.

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{} & x \\ \cline{2-2}
x+2 & x^2-3x-10
\end{array}$$

- Ahora, vamos a multiplicar la expresión que acabamos de encontrar por $x+2$. Igual que en el caso de la división con números, al resultado le vamos a cambiar el signo y después hacemos la suma algebraica.

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{} & x \\ \cline{2-2}
x+2 & \cancel{x^2}-3x-10 \\
\multicolumn{1}{r}{} & -\cancel{x^2}-2x \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & \quad -5x
\end{array}$$

- Ahora bajamos el número -10 del divisor.
- Al igual que en el caso de la división con números, buscamos una expresión que multiplicada por x nos dé igual a: $-5x$
- En este caso, la expresión que buscamos es un número: -5
- Ahora multiplicamos este número por $x+2$ y el resultado lo escribimos debajo del último renglón.
- Recuerda que debemos cambiar el signo al resultado de la multiplicación.
- Después debemos realizar la suma...

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{} & x-5 \\ \cline{2-2}
x+2 & x^2-3x-10 \\
\multicolumn{1}{r}{} & -\cancel{x^2}-2x \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & \quad -\cancel{5x}-\cancel{10} \\
\multicolumn{1}{r}{} & \quad\ \ \cancel{5x}+\cancel{10} \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & \quad\ \ 0x+0
\end{array}$$

- Entonces,
$$(x^2-3x-10)\div(x+2)=\frac{x^2-3x-10}{x+2}=x-5$$
- Una manera de comprobar que el resultado de la división es correcto consiste en multiplicar el divisor por el cociente y sumar el residuo. Debemos obtener como resultado el dividendo.
- Para que quede más claro, considera: $331\div 12=27+(7/12)$. Para comprobar que el resultado es correcto hacemos: $27\times 12+7=331$
- Ahora aplicamos este mismo principio a la división entre polinomios:
$$(x+2)\cdot(x-5)=x^2-3x-10$$

Si se te llega a olvidar cómo realizar una operación con polinomios, basta recordar cómo realizas esa operación con números.

Exactamente el mismo procedimiento es el que vas a utilizar con los polinomios. Esto gracias a que los polinomios en realidad representan números, y como tales deben ser tratados.

Podemos simplificar el procedimiento que utilizamos cuando realizamos la división de un polinomio entre un binomio. Para esto vamos a observar los siguientes arreglos:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x-5 \\ \cline{2-2}
x+2 & \quad x^2-3x-10 \\
 & -\cancel{x^2}-2x \\ \cline{2-2}
 & \qquad -\cancel{5x}-\cancel{10} \\
 & \qquad\ \ \cancel{5x}+\cancel{10} \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 0x+0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrr|r}
1 & -3 & -10 & -2 \\
 & -2 & 10 & \\ \hline
1 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

Observa que los coeficientes del dividendo están en el primer renglón. El número -2 que está a la derecha de la línea vertical representa el término independiente de $x+2$, pero le cambiamos el signo.

Para empezar con esta división (sintética) entre los polinomios, bajamos el primer coeficiente del primer renglón hasta el tercer renglón:

$$
\begin{array}{rrr|r}
1 & -3 & -10 & -2 \\
 & & & \\ \hline
1 & & &
\end{array}
$$

Ahora multiplicamos -2 por 1, y obtenemos -2. Este número lo escribimos en el segundo renglón, pero en la segunda columna:

$$
\begin{array}{rrr|r}
1 & -3 & -10 & -2 \\
 & -2 & & \\ \hline
1 & & &
\end{array}
$$

Sumamos los números que están en la segunda columna y el resultado lo escribimos en el tercer renglón (misma columna):

$$
\begin{array}{rrr|r}
1 & -3 & -10 & -2 \\
 & -2 & & \\ \hline
1 & -5 & &
\end{array}
$$

De nuevo, multiplicamos por -2 el último número del tercer renglón, en este caso -5, y el resultado lo escribimos en la siguiente columna del segundo renglón:

$$
\begin{array}{rrr|r}
1 & -3 & -10 & -2 \\
 & -2 & 10 & \\ \hline
1 & -5 & &
\end{array}
$$

De nuevo, sumamos en columna. Ahora en la tercera columna y el resultado lo escribimos en el tercer renglón:

$$
\begin{array}{rrr|r}
1 & -3 & -10 & -2 \\
 & -2 & 10 & \\ \hline
1 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

Y hemos terminado.

El último renglón de la tabla nos indica el resultado de la división: $x-5$. Solamente debes restar 1 al exponente del dividendo para escribirlo en el divisor. Esta regla se aplica cuando el dividendo es de la forma $x-k$, siendo k algún número real.

Ahora tú compara este procedimiento con el procedimiento «*normal*» de la división de polinomios.

A este procedimiento se le conoce como la división sintética. Al procedimiento «*normal*» se le conoce como la división «*larga*».

Es importante mencionar que este procedimiento funciona solamente cuando el divisor de la división es un binomio con un coeficiente del término con literal igual a uno.

Por ejemplo, funciona con divisores como los siguientes: $x+7$, $x-3$, $x-21$, etc., pero **no** funciona con los siguientes: $3x+1$, $7x-11$, $2x-4$, porque el coeficiente del término con literal no es uno.

En estos casos, tienes que igualar el dividendo a cero y despejar x. El resultado es el número que debe ir a la derecha de la «*casita*» para la división sintética.

Por ejemplo, si necesitas dividir: $x^2-3x-10$ entre $3x+1$, resolvemos $3x+1=0$ y obtenemos $x=-1/3$. Entonces, debemos ecribir:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -10 & -1/3 \\ & & & \\ \hline & & & \end{array}$$

y realiza la división como se mostró.

Debes tener especial cuidado con la división sintética, porque en caso de que desees dividir, por ejemplo: $x^5-x^3+x^2+2x+4$ entre $x+1$ utilizando este procedimiento, debes notar que en el dividendo no aparece un término con x^4. Esto significa que su coeficiente es cero. Entonces, la tabla inicial debe aparecer como sigue:

$$\begin{array}{cccccc|r} x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & k & \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Debes tener cuidado con estos casos.

Realiza cada una de las siguientes operaciones entre polinomios. Las divisiones realizalas una con la división larga y la siguiente con la división sintética de manera alternada.	**Ejercicios 2.2.2**

1) $(-13+16x+11x^2+16x^3)+(-19-21x^2+16x^3)$

R. $-32+16x-10x^2+32x^3$

2) $(-19+20x+11x^2-19x^3)+(-9-6x-x^2-14x^3)$

R. $-28+14x+10x^2-33x^3$

3) $(-x-14x^2+14x^3)+(22-19x-8x^2-20x^3)$

R. $22-20x-22x^2-6x^3$

4) $(2+18x-5x^2-17x^3)+(19+19x-21x^2+3x^3)$

R. $21+37x-26x^2-14x^3$

5) $(4-19x^2-3x^3)+(7+8x-2x^2-14x^3)$

R. $11+8x-21x^2-17x^3$

6) $(24-21x+9x^2-14x^3)+(-16-4x-15x^2+9x^3)$

R. $8-25x-6x^2-5x^3$

7) $(19-9x+x^2)+(15+13x^2+4x^3)$

R. $34-9x+14x^2+4x^3$

8) $(21-8x-23x^2-x^3)+(14-12x+18x^3)$

R. $35-20x-23x^2+17x^3$

9) $(-10-19x+8x^2-18x^3)+(21-12x+x^2-21x^3)$

R. $11-31x+9x^2-39x^3$

10) $(-10-19x-15x^2-6x^3)+(-24+x-14x^2+8x^3)$

R. $-34-18x-29x^2+2x^3$

11) $(-8+5x+21x^2+11x^3)+(-5-7x+3x^3)$

R. $-13-2x+21x^2+14x^3$

12) $(18+24x-24x^2-18x^3)+(-17-11x^3)$

R. $1+24x-24x^2-29x^3$

13) $(-19-24x-11x^2-6x^3)+(-3+x-7x^2+15x^3)$

R. $-22-23x-18x^2+9x^3$

14) $(22+16x+11x^2-21x^3)+(5-5x-10x^2-3x^3)$

R. $27+11x+x^2-24x^3$

15) $(6+x+9x^2+9x^3)+(13-10x+6x^2+16x^3)$

R. $19-9x+15x^2+25x^3$

16) $(-7x+20x^2-12x^3)+(8-4x-17x^2+24x^3)$

R. $8-11x+3x^2+12x^3$

17) $(4+23x-11x^3)+(-2+9x+x^2+x^3)$

R. $2+32x+x^2-10x^3$

18) $(-19+21x-6x^2-12x^3)+(15+23x-4x^2+21x^3)$

R. $-4+44x-10x^2+9x^3$

19) $(-15+18x-13x^2+12x^3)+(7+4x-6x^2+5x^3)$

R. $-8+22x-19x^2+17x^3$

20) $(17-15x+14x^2+19x^3)+(-23-24x+10x^2-23x^3)$

R. $-6-39x+24x^2-4x^3$

21) $(19-6x-11x^2+3x^3)-(-12-9x-6x^2+7x^3)$

R. $31+3x-5x^2-4x^3$

22) $(-18x-15x^2+9x^3)-(3+24x-10x^2+12x^3)$

R. $-3-42x-5x^2-3x^3$

23) $(-14-x+7x^2-7x^3)-(11+6x+14x^2+16x^3)$

R. $-25-7x-7x^2-23x^3$

24) $(1+x-19x^2-x^3)-(14+18x+22x^2-12x^3)$

R. $-13-17x-41x^2+11x^3$

25) $(11-12x+13x^2+13x^3)-(-9+19x-x^2+23x^3)$

R. $20-31x+14x^2-10x^3$

26) $(3-24x-12x^2-22x^3)-(-18-x-22x^2-16x^3)$

R. $21-23x+10x^2-6x^3$

27) $(-3+21x-17x^2-18x^3)-(-11+24x-5x^2-3x^3)$

R. $8-3x-12x^2-15x^3$

28) $(-6-8x-14x^2+11x^3)-(3-5x+20x^2-5x^3)$

R. $-9-3x-34x^2+16x^3$

29) $(-8-x-20x^2-2x^3)-(16x-22x^2)$

R. $-8-17x+2x^2-2x^3$

30) $(16+21x+7x^2+18x^3)-(-21+17x+24x^2-9x^3)$

R. $37+4x-17x^2+27x^3$

31) $(-24-7x+18x^2-6x^3)-(1-12x+20x^2-10x^3)$

R. $-25+5x-2x^2+4x^3$

32) $(-18-16x-11x^2-10x^3)-(10-11x+9x^2-21x^3)$

R. $-28-5x-20x^2+11x^3$

33) $(-15-4x+17x^2+7x^3)-(21+24x+15x^2+21x^3)$

R. $-36-28x+2x^2-14x^3$

34) $(3+13x-20x^2-x^3)-(16x-15x^2-17x^3)$

R. $3-3x-5x^2+16x^3$

35) $(-4+18x-11x^2-14x^3)-(20-22x-19x^2+16x^3)$

R. $-24+40x+8x^2-30x^3$

36) $(-20-17x+17x^2+x^3)-(-3+16x-x^2+17x^3)$

R. $-17-33x+18x^2-16x^3$

37) $(-11+13x-7x^2+7x^3)-(8+6x+12x^2+12x^3)$

R. $-19+7x-19x^2-5x^3$

38) $(12+3x+12x^2+20x^3)-(6-6x+9x^2+4x^3)$

R. $6+9x+3x^2+16x^3$

39) $(5+2x-10x^2+2x^3)-(-16+23x+4x^2+17x^3)$

R. $21-21x-14x^2-15x^3$

40) $(1-20x^2+8x^3)-(-17-13x-3x^2+10x^3)$

R. $18+13x-17x^2-2x^3$

41) $(4+3x)\cdot(-6+6x-4x^2+6x^3)$ **R.** $-24+6x+2x^2+12x^3+24x^4$

42) $(3+6x)\cdot(-2+3x-6x^2+9x^3)$ **R.** $-6-3x+0x^2-9x^3+27x^4$

43) $(9+6x)\cdot(1+4x-5x^2+5x^3)$ **R.** $9+42x-21x^2+15x^3+45x^4$

44) $(1+6x)\cdot(-8-8x+9x^2-8x^3)$ **R.** $-8-56x-39x^2+46x^3-8x^4$

45) $(-6-9x)\cdot(5+9x-6x^2+9x^3)$ **R.** $-30-99x-45x^2+0x^3-54x^4$

46) $(4+x)\cdot(-3+6x-3x^2+4x^3)$ **R.** $-12+21x-6x^2+13x^3+16x^4$

47) $(2+8x)\cdot(-1-7x-4x^2-x^3)$ **R.** $-2-22x-64x^2-34x^3-2x^4$

48) $(-5-3x)\cdot(-1-6x-3x^2+3x^3)$ **R.** $5+33x+33x^2-6x^3-15x^4$

49) $(7-8x)\cdot(7-3x+8x^2+2x^3)$ **R.** $49-77x+80x^2-50x^3+14x^4$

50) $(-2-3\,x)\cdot(-6-x+7\,x^2+x^3)$ **R.** $12+20\,x-11\,x^2-23\,x^3-2\,x^4$

51) $(-6-8\,x)\cdot(7-7\,x-8\,x^2-9\,x^3)$ **R.** $-42-14\,x+104\,x^2+118\,x^3+54\,x^4$

52) $(3+4\,x)\cdot(-9-6\,x+6\,x^2-2\,x^3)$ **R.** $-27-54\,x-6\,x^2+18\,x^3-6\,x^4$

53) $(1+7\,x)\cdot(-9-9\,x+4\,x^2-8\,x^3)$ **R.** $-9-72\,x-59\,x^2+20\,x^3-8\,x^4$

54) $(-3+7\,x)\cdot(6-3\,x-2\,x^2+7\,x^3)$ **R.** $-18+51\,x-15\,x^2-35\,x^3-21\,x^4$

55) $(-1-9\,x)\cdot(3+5\,x+3\,x^2-4\,x^3)$ **R.** $-3-32\,x-48\,x^2-23\,x^3+4\,x^4$

56) $(-7+2\,x)\cdot(5+x+x^2-8\,x^3)$ **R.** $-35+3\,x-5\,x^2+58\,x^3+56\,x^4$

57) $(7+3\,x)\cdot(6+4\,x-7\,x^2+6\,x^3)$ **R.** $42+46\,x-37\,x^2+21\,x^3+42\,x^4$

58) $(-5+7\,x)\cdot(2+8\,x+3\,x^2-8\,x^3)$ **R.** $-10-26\,x+41\,x^2+61\,x^3+40\,x^4$

59) $(-6-3\,x)\cdot(4-6\,x-3\,x^2-4\,x^3)$ **R.** $-24+24\,x+36\,x^2+33\,x^3+24\,x^4$

60) $(2+7\,x)\cdot(-7+3\,x-4\,x^2-5\,x^3)$ **R.** $-14-43\,x+13\,x^2-38\,x^3-10\,x^4$

61) $(-7+5\,x)\cdot(1+7\,x-5\,x^2-x^3)$ **R.** $-7-44\,x+70\,x^2-18\,x^3+7\,x^4$

62) $(4-7\,x)\cdot(-2-7\,x+x^2+5\,x^3)$ **R.** $-8-14\,x+53\,x^2+13\,x^3+20\,x^4$

63) $(6-3\,x)\cdot(6+9\,x-3\,x^2-2\,x^3)$ **R.** $36+36\,x-45\,x^2-3\,x^3-12\,x^4$

64) $(5+x)\cdot(-6+4\,x+x^2-2\,x^3)$ **R.** $-30+14\,x+9\,x^2-9\,x^3-10\,x^4$

65) $(-3-5\,x)\cdot(2-7\,x+8\,x^2+6\,x^3)$ **R.** $-6+11\,x+11\,x^2-58\,x^3-18\,x^4$

66) $(3-5\,x)\cdot(-8+7\,x+4\,x^2+7\,x^3)$ **R.** $-24+61\,x-23\,x^2+x^3+21\,x^4$

67) $(9+x)\cdot(5+9\,x-8\,x^2+9\,x^3)$ **R.** $45+86\,x-63\,x^2+73\,x^3+81\,x^4$

68) $(-5+4\,x)\cdot(-1-6\,x+6\,x^2+6\,x^3)$ **R.** $5+26\,x-54\,x^2-6\,x^3-30\,x^4$

69) $(7-2\,x)\cdot(-5-8\,x+x^2+5\,x^3)$ **R.** $-35-46\,x+23\,x^2+33\,x^3+35\,x^4$

70) $(-6+4\,x)\cdot(8+8\,x+6\,x^2-3\,x^3)$ **R.** $-48-16\,x-4\,x^2+42\,x^3+18\,x^4$

71) $(4-3\,x)\cdot(-8-4\,x+5\,x^2-5\,x^3)$ **R.** $-32+8\,x+32\,x^2-35\,x^3-20\,x^4$

72) $\dfrac{18-20\,x+74\,x^2-35\,x^3-27\,x^4}{9-1\,x}=$ **R.** $2-2\,x+8\,x^2-3\,x^3$

73) $\dfrac{-20+50\,x-42\,x^2+26\,x^3+8\,x^4}{4-6\,x}=$ **R.** $-5+5\,x-3\,x^2+2\,x^3$

74) $\dfrac{-5-21\,x+45\,x^2-50\,x^3+4\,x^4}{1+6\,x}=$ **R.** $-5+9\,x-9\,x^2+4\,x^3$

75) $\dfrac{-15-44\,x-38\,x^2+4\,x^3+12\,x^4}{-3-4\,x}=$ **R.** $5+8\,x+2\,x^2-4\,x^3$

76) $\dfrac{-7-40\,x-26\,x^2-7\,x^3-2\,x^4}{-1-5\,x}=$ **R.** $7+5\,x+1\,x^2+2\,x^3$

77) $\dfrac{24+79\,x+0\,x^2-1\,x^3+24\,x^4}{-8-5\,x}=$ **R.** $-3-8\,x+5\,x^2-3\,x^3$

78) $\dfrac{64+40\,x-68\,x^2-81\,x^3-72\,x^4}{-8-1\,x}=$ **R.** $-8-4\,x+9\,x^2+9\,x^3$

79) $\dfrac{-24+47\,x+5\,x^2+18\,x^3+24\,x^4}{8+3\,x}=$ **R.** $-3+7\,x-2\,x^2+3\,x^3$

80) $\dfrac{-24+58\,x+7\,x^2-55\,x^3-6\,x^4}{-6+7\,x}=$ **R.** $4-5\,x-7\,x^2+1\,x^3$

81) $\dfrac{21-2\,x-1\,x^2+39\,x^3+35\,x^4}{7+4\,x}=$ **R.** $3-2\,x+1\,x^2+5\,x^3$

82) $\dfrac{-35+37\,x-36\,x^2-39\,x^3-45\,x^4}{5-x}=$ **R.** $-7+6\,x-6\,x^2-9\,x^3$

83) $\dfrac{24-60\,x+48\,x^2-12\,x^3+6\,x^4}{-6+9\,x}=$ **R.** $-4+4\,x-2\,x^2-1\,x^3$

84) $\dfrac{-42+16\,x-25\,x^2+18\,x^3-7\,x^4}{7-5\,x}=$ **R.** $-6-2\,x-5\,x^2-1\,x^3$

85) $\dfrac{-15+23\,x-25\,x^2+49\,x^3+21\,x^4}{-3+4\,x}=$ **R.** $5-1\,x+7\,x^2-7\,x^3$

86) $\dfrac{40+49\,x+24\,x^2-74\,x^3-56\,x^4}{-8+3\,x}=$ **R.** $-5-8\,x-6\,x^2+7\,x^3$

87) $\dfrac{-5-31\,x-40\,x^2-57\,x^3-45\,x^4}{-5-6\,x}=$ **R.** $1+5\,x+2\,x^2+9\,x^3$

88) $\dfrac{-35-34\,x-9\,x^2-87\,x^3-45\,x^4}{5+7\,x}=$ **R.** $-7+3\,x-6\,x^2-9\,x^3$

89) $\dfrac{54-24\,x+17\,x^2+54\,x^3-18\,x^4}{-9-8\,x}=$ **R.** $-6+8\,x-9\,x^2+2\,x^3$

90) $\dfrac{10-2\,x+17\,x^2+5\,x^3-15\,x^4}{5+4\,x}=$ **R.** $2-2\,x+5\,x^2-3\,x^3$

91) $\dfrac{-35+58\,x+37\,x^2-59\,x^3-63\,x^4}{-7-x}=$ **R.** $5-9\,x-4\,x^2+9\,x^3$

92) $\dfrac{-3-18\,x+27\,x^2+44\,x^3+2\,x^4}{1+7\,x}=$ **R.** $-3+3\,x+6\,x^2+2\,x^3$

93) $\dfrac{30+33\,x-72\,x^2+72\,x^3+48\,x^4}{-6+3\,x}=$ **R.** $-5-8\,x+8\,x^2-8\,x^3$

94) $\dfrac{-6-31\,x-10\,x^2+22\,x^3-14\,x^4}{-2-9\,x}=$ **R.** $3+2\,x-4\,x^2+7\,x^3$

95) $\dfrac{-72-9\,x+105\,x^2-45\,x^3-72\,x^4}{8+9\,x}=$ **R.** $-9+9\,x+3\,x^2-9\,x^3$

2.2.3 Productos notables

Cuando realizamos operaciones entre polinomios con el fin de resolver problemas, es muy frecuente encontrar algunas operaciones que por su naturaleza, aparecen en muchos fenómenos.

Debido a que las vamos a encontrar muy seguido, las llamamos *productos notables*, porque también, una vez identificado el tipo de producto, podemos decir el resultado de esa operación sin necesidad de realizarla...

La realidad es que la memorizamos para no tener que desarrollar el producto cada vez que la encontremos.

Cada uno de los productos notables tiene su nombre.

Definición 1

Productos notables
Los productos notables más comunes son:

(i) *Binomio al cuadrado (suma).* $(x+a)^2 = x^2 + 2\,a\,x + a^2$

(ii) *Binomio al cuadrado (diferencia).* $(x-a)^2 = x^2 - 2\,a\,x + a^2$

(iii) *Producto de binomios con término común.* $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + a\,b$

(iv) *Producto conjugado.* $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

(v) *Binomio al cubo.* $(x+a)^3 = x^3 + 3\,a\,x^2 + 3\,a^2\,x + a^3$

Para entender los productos notables puedes imaginarlos como si se tratara de un molde.

Tú debes realizar lo que el molde dice, de acuerdo a los valores que debes asignar a cada parte del molde.

Ejemplo 1 Calcula: $(2\,m+7)^2 =$

- Primero identificamos el producto notable con el que vamos a trabajar.
- En este caso se trata de un binomio que está elevado al cuadrado, es decir, el producto notable *(i)*.
- Es muy sencillo observar que podemos sustituir los valores de acuerdo a la fórmula:

$$(x+a)^2 = (x)^2 + 2(a)(x) + (a)^2$$

- Si sustituimos y luego realizamos los cálculos que quedan indicados, terminamos:

$$\begin{aligned}(x+a)^2 &= (x)^2 + 2(a)(x) + (a)^2\\ (2\,m+7)^2 &= (2\,m)^2 + 2(7)(2\,m) + (7)^2\\ &= 4\,m^2 + 28\,m + 49\end{aligned}$$

- Esto significa que:

$$(2\,m+7)^2 = 4\,m^2 + 28\,m + 49$$

Ejemplo 2 Calcula: $(3\,z-4)^2 =$

- Sustituimos en la fórmula del producto notable correpondiente:

$$\begin{aligned}(x-a)^2 &= (x)^2 - 2(a)(x) + (a)^2\\ \left(3z^2-4\right)^2 &= \left(3z^2\right)^2 - 2(4)\left(3z^2\right) + (4)^2\\ &= 9z^4 - 24z^2 + 16\end{aligned}$$

- Aunque, también pudimos haberlo calculado con el producto notable *(i)*, considerando: $a=-4$.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 &= (x)^2 + 2(a)(x) + (a)^2\\ \left(3z^2+(-4)\right)^2 &= \left(3z^2\right)^2 + 2(-4)\left(3z^2\right) + (-4)^2\\ &= 9z^4 - 24z^2 + 16\end{aligned}$$

- Así, podemos concluir que los productos notables *(i)* y *(ii)* son el mismo.

Algunas veces necesitarás elevar un binomio al cuadrado con coeficientes fraccionarios. El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos.

Calcula: $\left(\frac{1}{2}x+4y^2\right)^2=$ **Ejemplo 3**

- Empezamos identificando al producto notable que se trata: en este caso, es un binomio al cuadrado.
- Ahora aplicamos la fórmula que le corresponde:

$$\left(\frac{1}{2}x+4y^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(4y^2\right) + \left(4y^2\right)^2$$

- Ahora simplemente realizamos las operaciones que quedaron indicadas:

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(4y^2\right) + \left(4y^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 4xy^2 + 16y^4$$

- Observa que hemos aplicado leyes de los exponentes.

Ahora estudiaremos el caso del producto de dos binomios con un término común. Empezamos con un ejemplo muy sencillo.

Calcula: $(x+5)(x-7)=$ **Ejemplo 4**

- Ahora tenemos que utilizar el producto notable:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

- En este caso, $a=5$, y $b=-7$.

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2 + (a+b)x + ab\\ (x+5)(x-7) &= x^2 + (5+(-7))x + (5)(-7)\\ &= x^2 - 2x - 35\end{aligned}$$

- En conclusión,
$$(x+5)(x-7)=x^2-2x-35$$

Algunas veces, además de aplicar el producto notable que le corresponde a la operación que estamos desarrollando debemos aplicar las leyes de los exponentes.

Calcula: $(x^3+1)(x^3+5)=$ **Ejemplo 5**

- Este producto también requiere del uso de la fórmula:
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$
- Pero en este caso requiere además de la aplicación de las leyes de los exponentes:
$$\begin{aligned}(x^3+1)(x^3+5) &= \left(x^3\right)^2+(1+5)\cdot x^3+1\cdot 5\\ &= x^6+6x^3+5\end{aligned}$$
- Observa que cuando sustituimos en la fórmula los términos del ejercicio, nos queda en el primer término: $\left(x^3\right)^2$, lo cual nos exige la aplicación de las leyes de los exponentes.

También debes tener cuidado cuando tengas un coeficiente en alguno de los términos, porque muchas veces se omite multiplicar por él.

Ejemplo 6 Calcula: $(2x+11)(2x-13)=$

- Aplicamos directamente los términos a la fórmula:
$$\begin{aligned}(2x+11)(2x-13) &= (2x)^2+(11-13)\cdot(2x)+(11)\cdot(-13)\\ &= 4x^2+(-2)\cdot(2x)-143\\ &= 4x^2-4x-143\end{aligned}$$
- Observa que hemos aplicado las leyes de los signos cuando multiplicamos $(11)\cdot(-13)$.
- También es importante notar que al sumar $11-13$ obtenemos un número negativo, porque el mayor de los sumandos es menor a cero.
- En este último caso **no** se han aplicado las leyes de los signos.
- Por ejemplo, la suma: $13-11=2$. Un número positivo, a pesar de que un sumando es positivo y otro es negativo.

Cuando aplicamos las leyes de los signos generalmente decimos «*menos por más*», o «*menos por menos*». Observa, siempre utilizamos la palabra «*por*» entre los dos signos. Esto indica que estamos multiplicando los signos. Por eso no podemos utilizarlos cuando estamos sumando. Solamente para la multiplicación o para la división.

Seguramente ahora tendrás la pregunta: «*¿por qué para la división también, si no estamos diciendo menos entre mas?*»

Recuerda que dividir es igual a multiplicar por el recíproco. Por ejemplo, dividir por 2 es igual que multiplicar por el recíproco de 2, es decir, es igual que multiplicar por $1/2$.

Podemos justificar el uso de las leyes de los signos en la división si observamos que las operaciones de multiplicación y división son contrarias basados en las leyes de los signos mismas.

Hasta aquí hemos visto cómo desarrollar binomios al cuadrado y producto de binomios con un término común. Ahora vamos a estudiar el producto conjugado.

Ejemplo 7 Calcula: $(3\,u+5\,v)(3\,u-5\,v)=$

- Empezamos notando que se trata de un producto conjugado.
- Eso significa que utilizaremos la fórmula:

$$\begin{aligned}(x+a)(x-a) &= (x)^2-(a)^2\\ (3\,u+5\,v)(3\,u-5\,v) &= (3\,u)^2-(5\,v)^2\\ &= 9\,u^2-25\,v^2\end{aligned}$$

- Esto nos indica que:

$$(3\,u+5\,v)(3\,u-5\,v)=9\,u^2-25\,v^2$$

Observa que en realidad estamos aplicando las leyes de los exponentes y de los signos. Sin embargo, nos ahorramos todo el procedimiento al aplicar directamente la fórmula. Para verificar que estamos aplicando debes realizar el producto sin aplicar el producto notable.

Calcula: $(3\,x^2+11)(3\,x^2-11)=$ **Ejemplo 8**

- Empezamos aplicando directamente la fórmula:

$$\begin{aligned}(3\,x^2+11)(3\,x^2-11) &= \left(3\,x^2\right)^2-11^2\\ &= 9\,x^4-121\end{aligned}$$

- Una segunda forma de verificar el resultado consiste en aplicar el producto conjugado que corresponde al producto de binomios con un término común.
- Aplicando esta fórmula, obtenemos:

$$\begin{aligned}(3\,x^2+11)(3\,x^2-11) &= \left(3\,x^2\right)^2+(11-11)(3\,x^2)+(11)(-11)\\ &= 9\,x^4+0\,(3\,x^2)-121\\ &= 9\,x^4-121\end{aligned}$$

En ambos casos obtenemos el mismo resultado porque el producto conjugado es un caso especial del producto de binomios con un término común.

Calcula: $\left(\dfrac{m^3}{4}+\dfrac{12}{13}\right)\left(\dfrac{m^3}{4}-\dfrac{12}{13}\right)=$ **Ejemplo 9**

- Aplicamos la fórmula:

$$\begin{aligned}\left(\frac{m^3}{4}+\frac{12}{13}\right)\left(\frac{m^3}{4}-\frac{12}{13}\right) &= \left(\frac{m^3}{4}\right)^2-\left(\frac{12}{13}\right)^2\\ &= \frac{m^6}{16}-\frac{144}{169}\end{aligned}$$

- Recuerda que elevar al cuadrado significa multiplicar un número por sí mismo.
- Elevar al cuadrado **no** significa miltiplicar por 2.
- Por ejemplo, $9^2 = 9\times 9 = 81$, es correcto, pero
- $9^2 \neq 9\times 2 = 18$ no es la forma correcta de proceder.
- Ten cuidado con esto.

Finalmente unos ejemplos para aprender a elevar un binomio al cubo.

Ejemplo 10 Calcula: $(2\,m+5)^3 =$

- Ahora tenemos un binomio elevado al cubo.
- Empezamos sustituyendo los valores en donde les corresponde:

$$\begin{aligned}(x+a)^3 &= (x)^3+3(a)(x)^2+3(a)^2(x)+(a)^3\\ (2\,m+5)^3 &= (2\,m)^3+3(5)(2\,m)^2+3(5)^2(2\,m)+(5)^3\\ &= 8\,m^3+60\,m^2+150\,m+125\end{aligned}$$

- Entonces,

$$(2\,m+5)^3 = 8\,m^3+60\,m^2+150\,m+125$$

Ejemplo 11 Calcula: $(2\,r-5)^3 =$

- En este caso tenemos una diferencia elevada al cubo.
- Como se trata de un binomio, podemos aplicar la fórmula:

$$(x+a)^3 = (x)^3+3(a)(x)^2+3(a)^2(x)+(a)^3$$

- Pero debemos tener cuidado con los signos...

$$\begin{aligned}(2\,r-5)^3 &= (2\,r)^3+3(-5)(2\,r)^2+3(-5)^2(2\,r)+(-5)^3\\ &= 8\,r^3+(-15)(4\,r^2)+6\,r\,(25)-125\\ &= 8\,r^3-60\,r^2+150\,r-125\end{aligned}$$

- Observa que cuando un factor está elevado al cuadrado debemos elevarlo al cuadrado antes de multiplicarlo por los demás factores.

Observa también que cuando multiplicamos, el orden en que realizamos las multiplicaciones, cuando se trata de varios factores, no importa; siempre obtenemos el mismo resultado. Esto es así por la propiedad de conmutatividad de la multiplicación de los números reales.

Ejemplo 12

Calcula: $\left(\frac{2\,x}{3}+\frac{r^2}{5}\right)^3 =$

- No tienes por qué sentir pánico al ver la expresión que debemos elevar al cubo.
- Simplemente la vamos a tratar como a las anteriores: sustituimos los términos en la fórmula, realizamos las operaciones que quedan indicadas y simplificamos hasta donde sea posible:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2\,x}{3}+\frac{r^2}{5}\right)^3 &= \left(\frac{2\,x}{3}\right)^3+3\left(\frac{r^2}{5}\right)\left(\frac{2\,x}{3}\right)^2+3\left(\frac{r^2}{5}\right)^2\left(\frac{2\,x}{3}\right)+\left(\frac{r^2}{5}\right)^3\\
&= \frac{8\,x^3}{27}+\left(\frac{3\,r^2}{5}\right)\left(\frac{4\,x^2}{9}\right)+\left(\frac{6\,x}{3}\right)\left(\frac{r^4}{25}\right)+\frac{r^6}{125}\\
&= \frac{8\,x^3}{27}+\frac{12\,r^2\,x^2}{45}+\frac{6\,x\,r^4}{75}+\frac{r^6}{125}\\
&= \frac{8\,x^3}{27}+\frac{4\,r^2\,x^2}{15}+\frac{2\,x\,r^4}{25}+\frac{r^6}{125}
\end{aligned}$$

- Recuerda simplificar las fracciones siempre que sea posible.
- Debes tener cuidado al elevar al cubo un número.
- Elevar al cubo significa multiplicar por sí mismo tres veces, no multiplicar por 3.
- Por ejemplo, $2^3 = 3\times 3\times 3 = 27$, pero
- $2^3 \neq 2\times 3 = 6$, es un error común en muchos estudiantes.

En cualquiera de los casos que se desarrollan en este tema, podemos verificar que los resultados son los correctos desarrollando la multiplicación indicada en cada caso utilizando el procedimiento que aprendimos en el tema anterior.

Evidentemente, el procedimiento será más laborioso que la aplicación de los productos notables.

De hecho, los productos notables se utilizan para realizar más rápido esos cálculos.

Desarrolla cada uno de los siguientes productos notables. **Ejercicios 2.2.3**

1) $(-1+2\,x)^2 =$ **R.** $1-4\,x+4\,x^2$

2) $(4+9\,m)^2 =$ **R.** $16+72\,m+81\,m^2$

3) $(7+m)^2 =$ **R.** $49+14\,m+m^2$

4) $(4+r)^2 =$ **R.** $16+8\,r+r^2$

5) $(5+7\,r)^2 =$ **R.** $25+70\,r+49\,r^2$

6) $(8-8\,x)^2 =$ **R.** $64-128\,x+64\,x^2$

7) $(-9-8\,x)^2 =$ **R.** $81+144\,x+64\,x^2$

8) $(-2-8\,x)^2 =$ **R.** $4+32\,x+64\,x^2$

9) $(6+8\,v)^2 =$ **R.** $36+96\,v+64\,v^2$

10) $(-1+5\,v)^2 =$ **R.** $1-10\,v+25\,v^2$

11) $(3+5\,v)^2 =$ **R.** $9+30\,v+25\,v^2$

12) $(7+4\,x)^2 =$ **R.** $49+56\,x+16\,x^2$

13) $(5-4\,a)^2 =$ **R.** $25-40\,a+16\,a^2$

14) $(6+9\,v)^2 =$ **R.** $36+108\,v+81\,v^2$

15) $(2+5\,v)^2 =$ **R.** $4+20\,v+25\,v^2$

16) $(7-8\,v)^2 =$ **R.** $49-112\,v+64\,v^2$

17) $(-3-v)^2 =$ **R.** $9+6\,v+v^2$

18) $(-8-9\,v)^2 =$ **R.** $64+144\,v+81\,v^2$

19) $(5-v)^2 =$ **R.** $25-10\,v+v^2$

20) $(3+7\,v)^2 =$ **R.** $9+42\,v+49\,v^2$

21) $(-5+v)^2 =$ **R.** $25-10\,v+v^2$

22) $(9+6\,v)^2 =$ **R.** $81+108\,v+36\,v^2$

23) $(1+3\,v)^2 =$ **R.** $1+6\,v+9\,v^2$

24) $(-4+3\,v)^2 =$ **R.** $16-24\,v+9\,v^2$

25) $(-7+6\,v)^2 =$ **R.** $49-84\,v+36\,v^2$

26) $\left(2+\frac{5\,v}{9}\right)^2 =$ **R.** $4+\frac{20\,v}{9}+\frac{25\,v^2}{81}$

27) $\left(\frac{4}{3}-7\,v\right)^2 =$ **R.** $\frac{16}{9}-\frac{56\,v}{3}+49\,v^2$

28) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2\,v}{3}\right)^2 =$ **R.** $\frac{1}{4}+\frac{2\,v}{3}+\frac{4\,v^2}{9}$

29) $\left(\frac{9}{5}+\frac{7\,v}{9}\right)^2 =$ **R.** $\frac{81}{25}+\frac{126\,v}{45}+\frac{49\,v^2}{81}$

30) $\left(\frac{5}{4}-3\,v\right)^2 =$ **R.** $\frac{25}{16}-\frac{15\,v}{2}+9\,v^2$

31) $\left(\frac{5}{7}-\frac{4\,v}{3}\right)^2 =$ **R.** $\frac{25}{49}-\frac{40\,v}{21}+\frac{16\,v^2}{9}$

32) $\left(\frac{1}{2}+\frac{7\,v}{9}\right)^2 =$ **R.** $\frac{1}{4}-\frac{7\,v}{9}+\frac{49\,v^2}{81}$

33) $\left(\frac{1}{5}+\frac{v}{7}\right)^2 =$ **R.** $\frac{1}{25}+\frac{2\,v}{35}+\frac{v^2}{49}$

34) $\left(-\frac{2}{3}+\frac{7\,v}{4}\right)^2 =$ **R.** $\frac{4}{9}-\frac{7\,v}{3}+\frac{49\,v^2}{16}$

35) $\left(-\frac{1}{3}+\frac{v}{3}\right)^2 =$ **R.** $\frac{1}{9}-\frac{2\,v}{9}+\frac{v^2}{9}$

36) $\left(-\frac{5}{2}-6\,v\right)^2 =$ **R.** $\frac{25}{4}+30\,v+36\,v^2$

37) $\left(\frac{1}{5}-\frac{3\,v}{8}\right)^2 =$ **R.** $\frac{1}{25}-\frac{6\,v}{40}+\frac{9\,v^2}{64}$

38) $\left(-\frac{2}{7}+2\,v\right)^2 =$ **R.** $\frac{4}{49}-\frac{4\,v}{7}+4\,v^2$

39) $\left(-\frac{1}{5}-\frac{v}{7}\right)^2 =$ **R.** $\frac{1}{25}+\frac{2\,v}{35}+\frac{v^2}{49}$

40) $\left(-\frac{1}{3}-\frac{9\,v}{5}\right)^2 =$ **R.** $\frac{1}{9}+\frac{6\,v}{5}+\frac{81\,v^2}{25}$

41) $\left(\frac{2}{3}-\frac{7\,v}{3}\right)^2 =$ **R.** $\frac{4}{9}-\frac{28\,v}{9}+\frac{49\,v^2}{9}$

42) $\left(-\frac{8}{3}+\frac{v}{3}\right)^2 =$ **R.** $\frac{64}{9}-\frac{16\,v}{9}+\frac{v^2}{9}$

43) $\left(-\frac{5}{9}+\frac{5\,v}{7}\right)^2 =$ **R.** $\frac{25}{81}-\frac{50\,v}{63}+\frac{25\,v^2}{49}$

44) $(-3\,x-5\,y)(-3\,x+5\,y)=$ **R.** $9\,x^2-25\,y^2$

45) $(-6\,x+5\,y)(-6\,x-5\,y)=$ **R.** $36\,x^2-25\,y^2$

46) $(-7\,x-2\,y)(-7\,x+2\,y)=$ **R.** $49\,x^2-4\,y^2$

47) $(6\,m-7\,n)(6\,m+7\,n)=$ **R.** $36\,m^2-49\,n^2$

48) $(-7\,m+3\,n)(-7\,m-3\,n)=$ **R.** $49\,m^2-9\,n^2$

49) $(-8\,u+8\,v^2)(-8\,u-8\,v^2)=$ **R.** $64\,v^2-64\,v^4$

50) $(-7\,u+8\,v^2)(-7\,u-8\,v^2)=$ **R.** $49\,v^2-64\,v^4$

51) $(-9\,u+v^2)(-9\,u-v^2)=$ **R.** $81\,v^2-v^4$

52) $(4\,u-3\,v^2)(4\,u+3\,v^2)=$ **R.** $16\,v^2-9\,v^4$

53) $(-6\,u-5\,v^2)(-6\,u+5\,v^2)=$ **R.** $36\,v^2-25\,v^4$

54) $(8\,u+2\,v^2)(8\,u-2\,v^2)=$ **R.** $64\,v^2-4\,v^4$

55) $(-u+8\,v^2)(-u-8\,v^2)=$ **R.** $v^2-64\,v^4$

56) $(-3\,u+8\,v^2)(-3\,u-8\,v^2)=$ **R.** $9\,v^2-64\,v^4$

57) $(-5\,u-v^2)(-5\,u+v^2)=$ **R.** $25\,v^2-v^4$

58) $(-7\,u-6\,v^2)(-7\,u+6\,v^2)=$ **R.** $49\,v^2-36\,v^4$

59) $(-7\,u+5\,v^2)(-7\,u-5\,v^2)=$ **R.** $49\,v^2-25\,v^4$

60) $(-u+7\,v^2)(-u-7\,v^2)=$ **R.** $v^2-49\,v^4$

61) $(9\,u+6\,v^2)(9\,u-6\,v^2)=$ **R.** $81\,v^2-36\,v^4$

62) $\left(\dfrac{8\,u}{7}+2\,v^2\right)\left(\dfrac{8\,u}{7}-2\,v^2\right)=$ **R.** $\dfrac{64\,u^2}{49}-4\,v^4$

63) $\left(\dfrac{3\,u}{5}+\dfrac{8\,v^2}{9}\right)\left(\dfrac{3\,u}{5}-\dfrac{8\,v^2}{9}\right)=$ **R.** $\dfrac{9\,u^2}{25}-\dfrac{64\,v^4}{81}$

64) $\left(\dfrac{8\,u}{5}+\dfrac{3\,v^2}{8}\right)\left(\dfrac{8\,u}{5}-\dfrac{3\,v^2}{8}\right)=$ **R.** $\dfrac{64\,u^2}{25}-\dfrac{9\,v^4}{64}$

65) $\left(\dfrac{7\,u}{2}+\dfrac{8\,v^2}{7}\right)\left(\dfrac{7\,u}{2}-\dfrac{8\,v^2}{7}\right)=$ **R.** $\dfrac{49\,u^2}{4}-\dfrac{64\,v^4}{49}$

66) $\left(\dfrac{5\,u}{9}+\dfrac{v^2}{2}\right)\left(\dfrac{5\,u}{9}-\dfrac{v^2}{2}\right)=$ **R.** $\dfrac{25\,u^2}{81}-\dfrac{v^4}{4}$

67) $\left(\dfrac{3\,u}{4}+\dfrac{9\,v^2}{8}\right)\left(\dfrac{3\,u}{4}-\dfrac{9\,v^2}{8}\right)=$ **R.** $\dfrac{9\,u^2}{16}-\dfrac{81\,v^4}{64}$

68) $\left(\dfrac{5\,u}{4}+7\,v^2\right)\left(\dfrac{5\,u}{4}-7\,v^2\right)=$ **R.** $\dfrac{25\,u^2}{16}-49\,v^4$

69) $\left(\dfrac{2\,u}{3}+\dfrac{2\,v^2}{9}\right)\left(\dfrac{2\,u}{3}-\dfrac{2\,v^2}{9}\right)=$ **R.** $\dfrac{4\,u^2}{9}-\dfrac{4\,v^4}{81}$

70) $\left(\dfrac{u}{2}+\dfrac{5\,v^2}{9}\right)\left(\dfrac{u}{2}-\dfrac{5\,v^2}{9}\right)=$ **R.** $\dfrac{u^2}{4}-\dfrac{25\,v^4}{81}$

71) $\left(\dfrac{9\,u}{4}+\dfrac{v^2}{6}\right)\left(\dfrac{9\,u}{4}-\dfrac{v^2}{6}\right)=$ **R.** $\dfrac{81\,u^2}{16}-\dfrac{v^4}{36}$

72) $\left(\dfrac{3\,u}{4}+\dfrac{4\,v^2}{5}\right)\left(\dfrac{3\,u}{4}-\dfrac{4\,v^2}{5}\right)=$ **R.** $\dfrac{9\,u^2}{16}-\dfrac{16\,v^4}{25}$

73) $\left(\dfrac{4\,u}{7}+\dfrac{7\,v^2}{8}\right)\left(\dfrac{4\,u}{7}-\dfrac{7\,v^2}{8}\right)=$ **R.** $\dfrac{16\,u^2}{49}-\dfrac{49\,v^4}{64}$

74) $\left(3\,u+\dfrac{7\,v^2}{8}\right)\left(3\,u-\dfrac{7\,v^2}{8}\right)=$ **R.** $9\,u^2-\dfrac{49\,v^4}{64}$

75) $\left(\dfrac{5\,u}{3}+\dfrac{3\,v^2}{8}\right)\left(\dfrac{5\,u}{3}-\dfrac{3\,v^2}{8}\right)=$ **R.** $\dfrac{25\,u^2}{9}-\dfrac{9\,v^4}{64}$

76) $\left(\dfrac{9\,u}{4}+,v^2\right)\left(\dfrac{9\,u}{4}-v^2\right)=$ **R.** $\dfrac{81\,u^2}{16}-v^4$

77) $\left(\dfrac{9\,u}{4}+\dfrac{2\,v^2}{3}\right)\left(\dfrac{9\,u}{4}-\dfrac{2\,v^2}{3}\right)=$ **R.** $\dfrac{81\,u^2}{16}-\dfrac{4\,v^4}{9}$

78) $\left(\dfrac{9\,u}{4}+\dfrac{5\,v^2}{4}\right)\left(\dfrac{9\,u}{4}-\dfrac{5\,v^2}{4}\right)=$ **R.** $\dfrac{81\,u^2}{16}-\dfrac{25\,v^4}{16}$

79) $\left(\dfrac{3\,u}{7}+\dfrac{2\,v^2}{9}\right)\left(\dfrac{3\,u}{7}-\dfrac{2\,v^2}{9}\right)=$ **R.** $\dfrac{9\,u^2}{49}-\dfrac{4\,v^4}{81}$

80) $\left(\frac{8\,u}{9}+\frac{3\,v^2}{4}\right)\left(\frac{8\,u}{9}-\frac{3\,v^2}{4}\right)=$ **R.** $\frac{64\,u^2}{81}-\frac{9\,v^4}{16}$

81) $\left(\frac{4\,u}{5}+\frac{3\,v^2}{2}\right)\left(\frac{4\,u}{5}-\frac{3\,v^2}{2}\right)=$ **R.** $\frac{16\,u^2}{25}-\frac{9\,v^4}{4}$

82) $\left(\frac{7\,u}{9}+\frac{8\,v^2}{7}\right)\left(\frac{7\,u}{9}-\frac{8\,v^2}{7}\right)=$ **R.** $\frac{49\,u^2}{81}-\frac{64\,v^4}{49}$

83) $\left(\frac{2\,u}{9}+\frac{5\,v^2}{9}\right)\left(\frac{2\,u}{9}-\frac{5\,v^2}{9}\right)=$ **R.** $\frac{4\,u^2}{81}-\frac{25\,v^4}{81}$

84) $\left(\frac{9\,u}{4}+\frac{7\,v^2}{6}\right)\left(\frac{9\,u}{4}-\frac{7\,v^2}{6}\right)=$ **R.** $\frac{81\,u^2}{16}-\frac{49\,v^4}{36}$

85) $\left(\frac{9\,u}{11}+\frac{v^2}{7}\right)\left(\frac{9\,u}{11}-\frac{v^2}{7}\right)=$ **R.** $\frac{81\,u^2}{121}-\frac{v^4}{49}$

86) $(3\,x-y)^3=$ **R.** $27\,x^3-27\,x^2\,y+9\,x\,y^2-y^3$

87) $(4\,x-6\,y)^3=$ **R.** $64\,x^3-288\,x^2\,y+432\,x\,y^2-216\,y^3$

88) $(8\,x+5\,y)^3=$ **R.** $512\,x^3+960\,x^2\,y+600\,x\,y^2+125\,y^3$

89) $(9\,x-5\,y)^3=$ **R.** $729\,x^3-1215\,x^2\,y+675\,x\,y^2-125\,y^3$

90) $(3\,x-5\,y)^3=$ **R.** $27\,x^3-135\,x^2\,y+225\,x\,y^2-125\,y^3$

91) $(7\,x+2\,y)^3=$ **R.** $343\,x^3+294\,x^2\,y+84\,x\,y^2+8\,y^3$

92) $(5\,x+6\,y)^3=$ **R.** $125\,x^3+450\,x^2\,y+540\,x\,y^2+216\,y^3$

93) $(9\,x-5\,y)^3=$ **R.** $729\,x^3-1215\,x^2\,y+675\,x\,y^2-125\,y^3$

94) $(6\,x+5\,y)^3=$ **R.** $216\,x^3+540\,x^2\,y+450\,x\,y^2+125\,y^3$

95) $(2\,x-5\,y)^3=$ **R.** $8\,x^3-60\,x^2\,y+150\,x\,y^2-125\,y^3$

96) $\left(\frac{8\,x}{5}-\frac{4\,y}{3}\right)^3=$ **R.** $\frac{512\,x^3}{125}-\frac{768\,x^2\,y}{75}+\frac{384\,x\,y^2}{45}-\frac{64\,y^3}{27}$

97) $\left(\frac{x}{9}-\frac{y}{2}\right)^3=$ **R.** $\frac{x^3}{729}+\frac{-9\,x^2\,y}{486}+\frac{27\,x\,y^2}{324}+\frac{-27\,y^3}{216}$

98) $\left(\frac{4\,x}{9}-\frac{9\,y}{5}\right)^3=$ **R.** $\frac{64\,x^3}{729}-\frac{432\,x^2\,y}{405}+\frac{972\,x\,y^2}{225}-\frac{729\,y^3}{125}$

99) $\left(\frac{9\,x}{2}+\frac{y}{5}\right)^3=$ **R.** $\frac{729\,x^3}{8}+\frac{243\,x^2\,y}{20}+\frac{27\,x\,y^2}{50}+\frac{y^3}{125}$

100) $\left(\frac{x}{2}+\frac{8\,y}{3}\right)^3=$ **R.** $\frac{x^3}{8}+2\,x^2\,y+\frac{32\,x\,y^2}{3}+\frac{512\,y^3}{27}$

101) $\left(\frac{4\,x}{3}+9\,y\right)^3=$ **R.** $\frac{64\,x^3}{27}+\frac{432\,x^2\,y}{9}+\frac{972\,x\,y^2}{3}+729\,y^3$

102) $\left(\frac{2\,x}{3}+\frac{8\,y}{3}\right)^3=$ **R.** $\frac{8\,x^3}{27}+\frac{32\,x^2\,y}{9}+\frac{128\,x\,y^2}{9}+\frac{512\,y^3}{27}$

103) $\left(\frac{3x}{4}+\frac{3y}{7}\right)^3=$ **R.** $\frac{27x^3}{64}+\frac{81x^2y}{112}+\frac{81xy^2}{196}+\frac{27y^3}{343}$

104) $\left(2x-\frac{7y}{5}\right)^3=$ **R.** $8x^3-\frac{84x^2y}{5}+\frac{294xy^2}{25}-\frac{343y^3}{125}$

105) $\left(\frac{8x}{3}+\frac{9y}{5}\right)^3=$ **R.** $\frac{512x^3}{27}+\frac{1728x^2y}{45}+\frac{1944xy^2}{75}+\frac{729y^3}{125}$

106) $\left(\frac{5x}{4}-\frac{3y}{2}\right)^3=$ **R.** $\frac{125x^3}{64}-\frac{225x^2y}{32}+\frac{135xy^2}{16}-\frac{27y^3}{8}$

107) $\left(\frac{8x}{5}-\frac{3y}{5}\right)^3=$ **R.** $\frac{512x^3}{125}-\frac{576x^2y}{125}+\frac{216xy^2}{125}-\frac{27y^3}{125}$

108) $\left(\frac{x}{7}-\frac{6y}{7}\right)^3=$ **R.** $\frac{x^3}{343}-\frac{18x^2y}{343}+\frac{108xy^2}{343}-\frac{216y^3}{343}$

109) $\left(\frac{7x}{9}-\frac{4y}{3}\right)^3=$ **R.** $\frac{343x^3}{729}-\frac{588x^2y}{243}+\frac{336xy^2}{81}-\frac{64y^3}{27}$

110) $\left(\frac{3x}{2}+6y\right)^3=$ **R.** $\frac{27x^3}{8}+\frac{81x^2y}{2}+\frac{162xy^2}{4}+216y^3$

111) $\left(\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}\right)^3=$ **R.** $\frac{x^3}{27}-\frac{6x^2y}{27}+\frac{12xy^2}{27}-\frac{8y^3}{27}$

2.2.4 Triángulo de Pascal

En matemáticas hay muchos *trucos* para simplificar los procedimientos y cálculos.

Para los productos notables el *truco* consiste en el triángulo de Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Para formarlo empezamos con el 1 del primer renglón. Después escribimos el segundo renglón: 1 1. Para obtener los siguientes renglones siempre vamos a sumar los números que estén uno al lado del otro.

Por ejemplo, para obtener el 2 que está en el tercer renglón sumamos 1+1 del segundo renglón.

Cada renglón n contiene los coeficientes del binomio elevado a la potencia $n-1$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & & \longrightarrow & (x+a)^0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & \longrightarrow & (x+a)^1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \longrightarrow & (x+a)^2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \longrightarrow & (x+a)^3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \longrightarrow & (x+a)^4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \longrightarrow & (x+a)^5
\end{array}$$

Si observas el triángulo de Pascal, en el segundo renglón tenemos los coeficientes de $(x+a)^1 = a+b$, que son 1 y 1. En el tercer renglón tenemos los coeficientes de $(x+a)^2 = x^2 + 2\,a\,x + a^2$, que son 1, 2 y 1, y así sucesivamente.

Una forma sencilla de encontrar los coeficientes del resultado de elevar el binomio $(x+a)^n$ consiste en observar el segundo coeficiente. Si el coeficiente es n, esos son los que buscas. Por ejemplo, el renglón donde el segundo coeficiente 5 indica que son los coeficientes del resultado de elevar $(x+a)^5$.

Calcular: $(x+a)^5 =$ **Ejemplo 1**

- Empezamos escribiendo los coeficientes que tomamos del renglón que corresponde. Después escribimos la literal x junto a todos los coeficientes:

$$1\,x \qquad 5\,x \qquad 10\,x \qquad 10\,x \qquad 5\,x \qquad 1\,x$$

- Ahora vamos a escribir los exponentes de esas literales. Empezamos con el exponente al cual estamos elevando el binomio, en este caso, 5, y conforme avanzamos a la derecha, los exponentes van disminuyendo, uno en cada literal:

$$1\,x^5 \qquad 5\,x^4 \qquad 10\,x^3 \qquad 10\,x^2 \qquad 5\,x^1 \qquad 1\,x^0$$

- Ahora escribimos la otra literal, a junto a cada literal x:

$$1\,x^5 a \qquad 5\,x^4 a \qquad 10\,x^3 a \qquad 10\,x^2 a \qquad 5\,x^1 a \qquad 1\,x^0 a$$

- El siguiente paso consiste en escribir los exponentes de a. Ahora empezamos *de izquierda a derecha*, también empezando con el exponente al cual estamos elevando el binomio:

$$1\,x^5 a^0 \qquad 5\,x^4 a^1 \qquad 10\,x^3 a^2 \qquad 10\,x^2 a^3 \qquad 5\,x^1 a^4 \qquad 1\,x^0 a^5$$

  Observa que la suma de los exponentes de cada término es igual al exponente al cual estamos elevando el binomio.

- Ahora lo único que falta es escribir los signos de + entre los términos y simplificar usando la ley *(iv)*.

$$(x+a)^5 = x^5 + 5\,x^4 a^1 + 10\,x^3 a^2 + 10\,x^2 a^3 + 5\,x^1 a^4 + a^5$$

Puedes verificar que este resultado es correcto multiplicando el binomio $x+a$ por sí mismo cinco veces.

Como ves, este método es muy directo. Solo se requiere escribir el triángulo de Pascal hasta el renglón $n+1$ para calcular $(x+a)^n$. Sin embargo, hay otro método más corto, este método se conoce como el Binomio de Newton.

Binomio de Newton

El binomio de Newton es otro artificio matemático que puede utilizarse para calcular la potencia de un binomio.

En este caso se requieren algunos conceptos previos.

Definición 1

Factorial

El factorial del número natural n, que se denota $n!$, es igual al producto de todos los números naturales, desde 1 hasta n.

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

Una definición que se utiliza en el binomio de Newton, y que depende de la definición de factorial, es la siguiente:

Definición 2

Combinaciones

El número de combinaciones de m objetos distintos, tomando k objetos a la vez, es:

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

En el binomio de Newton se consideran las combinaciones porque para justificar este método se utiliza un método de multiplicación que se conoce como el *exponente fijo*, y este método consiste en buscar de cuántas formas distintas podemos multiplicar los términos de dos polinomios para obtener un exponente dado.

Ahora, la definición del binomio de Newton.

Definición 3

Binomio de Newton

La potencia de un binomio puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \cdots + \binom{n}{n-1} x\, a^{n-1} + \binom{n}{n} a^n$$

Una pregunta que seguramente tendrás es la siguiente, ¿por qué 0!=1?

He aquí la justificación.

Teorema 1

$0! = 1$

Sabemos que el factorial tiene la siguiente propiedad:

$$(k+1)! = (k+1)\cdot k!$$

por la forma como se definió. Si hacemos $k=0$, obtenemos:

$$\begin{aligned} (0+1)! &= (0+1)\cdot 0! \\ 1! &= 1\cdot 0! \\ 1 &= 0! \end{aligned}$$

■

Con este método, no se requiere calcular los coeficientes de las potencias anteriores del binomio que vamos a elevar a la potencia n, sino que de manera directa los calculamos.

Por ejemplo, si necesitamos calcular $(x+a)^{100}$, con el triángulo de Pascal tendríamos que encontrar los cien renglones anteriores para poder conocer los coeficientes de este polinomio (están en el renglón

101), pero con el binomio de Newton, podemos encontrarlos directamente a través de las combinaciones.

Como ejemplo, vamos a calcular $(x+a)^5$.

Calcula: $(x+a)^5 =$ **Ejemplo 2**

- Empezamos calculando primero los valores de los coeficientes, de acuerdo a la definición de combinaciones:
- Enseguida está el cálculo del primer coeficiente, que ya sabemos, es igual a 1:

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

- El siguiente es el segundo coeficiente:

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = \frac{5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 5$$

- El siguiente es el tercer coeficiente:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot\cancel{3!}}{2\cdot\cancel{3!}} = 10$$

- El siguiente es el cuarto coeficiente:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2} = 10$$

- El siguiente es el quinto coeficiente:

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4!} = \frac{5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 5$$

- Y finalmente, el sexto coeficiente:

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

- Ahora que tenemos los coeficientes, procedemos como lo hicimos con el triángulo de Pascal, con lo que de nuevo obtendremos:

$$\begin{aligned}(x+a)^5 &= 1\,x^5 + 5\,x^4 a^1 + 10\,x^3 a^2 + 10\,x^2 a^3 + 5\,x^1 a^4 + 1 a^5\\ &= x^5 + 5\,x^4 a + 10\,x^3 a^2 + 10\,x^2 a^3 + 5\,x\,a^4 + a^5\end{aligned}$$

2.2.5 Factorización

La factorización es la otra parte de la historia de los productos notables.

Esto es, ambas cosas se refieren a las mismas fórmulas, pero en los productos notables se nos daba una operación que debíamos realizar y encontrar el resultado.

Ahora, en la factorización se nos entrega el resultado y debemos encontrar cuál era la operación que se realizó, es decir, tenemos que expresarlo como si apenas se fuera a desarrollar el producto notable.

Definición 1

Factorización

Las reglas básicas para factorizar son:

i. *Ley distributiva o factor común* $a\,b + a\,c = a\,(b + c)$

ii. *Trinomio cuadrado perfecto* $x^2 \pm 2\,a\,x + a^2 = (x \pm a)^2$

iii. *Trinomio cuadrado no perfecto* $x^2 + (a + b)\,x + a\,b = (x + a)(x + b)$

iv. *Diferencia de cuadrados* $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$

v. *Suma o diferencia de dos cubos* $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp a\,x + a^2)$

El hecho de reconocer cada uno de los casos de factorización nos ayudará a simplificar expresiones a lo largo de todos los cursos de matemáticas que vienen más adelante.

En realidad, puedes ver que para cada caso de factorización hay un caso correspondiente en los productos notables, de manera que con que memorices una fórmula, es suficiente para ambos temas.

Ejemplo 1

Factoriza:

$$2\,x^2 + 5\,x$$

- En este caso debemos utilizar la ley distributiva.
- Para esto identificamos el factor que se repite en todos los términos y lo escribimos a la izquierda.
- Luego escribimos dentro de un paréntesis todos los términos que no se repiten...
- Aquí se repite la x:
$$2\,x^2 + 5\,x = x\,(2\,x + 5)$$
- De manea que si multiplicamos obtenemos de nuevo: $2\,x^2 + 5\,x$.

En este primer ejemplo solamente teníamos un factor común. En algunos otros casos tendremos dos o más, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Factoriza:

$$12\,x^3 + 8\,x^2 - 20\,x$$

- Lo primero que debemos observar es que todos los coeficientes de los términos del trinomio se pueden dividir exactamente entre 4.
- Esto nos sugiere que factoricemos al número 4.
- Pero también podemos factorizar la literal x, porque aparece en todos los términos.

- Entonces, aplicando la ley distributiva obtenemos:

$$12\,x^3+8\,x^2-20\,x=4\,x\left(3\,x^2+2\,x-5\right)$$

- Para verificar que el resultado es correcto, puedes multiplicar y debes obtener el trinomio de la izquierda de la igualdad.

Factoriza:

$$3\,x^3+21\,x^4\,b+18\,x^5-9\,x^6$$

Ejemplo 3

- En este ejemplo tenemos que todos los coeficientes son divisibles por 3.
- Así que vamos a factorizar a este número.
- Además, podemos factorizar, no solamente al número x, sino a x^3:

$$3\,x^3+21\,x^4\,b+18\,x^5-9\,x^6=3\,x^3\cdot\left(1+7\,x\,b+6\,x^2-3\,x^3\right)$$

- Puedes verificar que la factorización es correcta realizando la multiplicación que queda indicada.

El primer paso que debes realizar cuando vas a factorizar una expresión es verificar si puedes aplicar la ley distributiva.

Factoriza

$$x^2+12\,x+36$$

Ejemplo 4

- En este caso vamos a ver si se trata de un trinomio cuadrado perfecto...
- Para eso, primero sacamos la mitad del coeficiente del término que contiene x, también conocido como el término lineal.
- La mitad de 12 es: 6
- Ahora calculamos el cuadrado de este número: $6^2=36$.
- Como este resultado coincide con el término independiente (el que no contiene a x) del trinomio que nos dieron, sí se trata de un trinomio cuadrado perfecto.
- Entonces,

$$x^2+12\,x+36=(x+6)^2$$

- Para verificar que el resultado es correcto, podemos desarrollar el binomio al cuadrado.

Factoriza:

$$m^4-6\,m^2+9$$

Ejemplo 5

- En este caso no tenemos un polinomio cuadrático, sino de grado cuatro.

- Sin embargo, podemos transformarlo a un trinomio cuadrado si utilizamos la siguiente sustitución: $x = m^2$.
- Porque al aplicar las leyes de los exponentes obtenemos: $x^2 = m^4$, y al sustituir en el trinomio que nos dieron nos queda:
$$m^4 - 6\,m^2 + 9 = x^2 - 6\,x + 9$$
- Ahora sí, tenemos un trinomio cuadrado.
- Vamos a ver si es un trinomio cuadrado perfecto: para eso sacamos la mitad del coeficiente del término lineal ($-6/2 = -3$) y lo elevamos al cuadrado (9).
- Como obtuvimos 9, y este es el valor del término independiente, sí se trata de un trinomio cuadrado perfecto.
- Entonces, se trata del caso (*ii*) de factorización:
$$x^2 - 6\,x + 9 = (x - 3)^2$$
- Pero nuestro ejercicio no incluía a la literal x. Nosotros decidimos incluirla para simplificar el problema.
- Así que lo único que falta es hacer la sustitución: $x = m^2$,
$$m^4 - 6\,m^2 + 9 = x^2 - 6\,x + 9 = (x - 3)^2 = \left(m^2 - 3\right)^2$$
- El resultado es: $m^4 - 6\,m^2 + 9 = \left(m^2 - 3\right)^2$

Observa que en el ejemplo anterior todas las literales tenían exponente par. Por eso es fácil hacer la transformación del polinomio de grado cuatro a uno de grado dos.

No siempre vamos a tener coeficiente igual a uno en el término cuadrático. El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos:

Ejemplo 6

Factoriza:
$$4\,x^2 - 20\,x + 25$$

- En este caso es más sencillo empezar calculando la raíz cuadrada de los términos cuadrático e independiente:
$$\sqrt{4\,x^2} = 2\,x \qquad \text{y} \qquad \sqrt{25} = 5$$
- Nosotros sabemos por el producto notable de elevar un binomio al cuadrado que:
$$(x - a)^2 = x^2 - 2\,a\,x + a^2$$
- Entonces, el coeficiente del término lineal es igual al doble del producto de los términos independiente y cuadrático.
- Podemos comparar este producto con el término lineal del polinomio que nos dieron a factorizar:
$$-2 \cdot (2\,x) \cdot (5) = -20\,x$$
- Como coinciden, se trata de un trinomio cuadrado perfecto, y su factorización queda:
$$4\,x^2 - 20\,x + 25 = (2\,x - 5)^2$$

- Debes tener cuidado, porque muchos estudiantes olvidan multiplicar por la raíz del coeficiente del término cuadrático (el 2 de $2\,x$) cuando están verificando que el término lineal sea $-2\,a\,x$.

Ya sabes que no todos los trinomios cuadrados son perfectos. Cuando tenemos un trinomio cuadrado es una buena idea empezar la factorización verificando si se trata o no de uno perfecto. Si no es un trinomio cuadrado perfecto, tenemos que usar otro truco.

Ejemplo 7

Factoriza

$$x^2 + 12\,x + 35$$

- En este caso, cuando saquemos la mitad de 12 y lo elevemos al cuadrado, no obtendremos 35.
- Esto nos indica que se trata de un trinomio cuadrado **no** perfecto.
- En este caso tenemos un producto de binomios con término común.
- Así que buscaremos dos números que sumados den 12 y multiplicados sean igual a 35.
- Para facilitarte el trabajo, empieza siempre buscando dos números que multiplicados sean el término independiente, en este caso, 35, porque hay menos soluciones que buscar dos números sumados dén 12.
- Esos números son 5 y 7. Con lo que obtenemos:

$$x^2 + 12\,x + 35 = (x+5)(x+7)$$

lo cual podemos comprobar desarrollando el producto conjugado que quedó indicado.

Ejemplo 8

Factoriza:

$$x^2 - 4\,x - 21$$

- Es muy evidente que no se trata de un cuadrado perfecto por dos cosas:
  i. El término independiente es negativo, y si fuera un cuadrado perfecto debería ser positivo.
  ii. El cuadrado de -2 no es igual a -21.
- Entonces, debemos encontrar dos números que sumados den -4 y multiplicados den -21
- Observa que el coeficiente del término lineal es igual a -4.
- Ya sabemos que este coeficiente es igual a la suma de los números que buscamos, por lo que se deduce que el mayor de los dos números es negativo.
- Además, el término independiente es negativo, lo que nos indica que los números que buscamos tienen signos contrarios, porque menos por menos es más.
- Empezamos buscando números que multiplicados den 21.
- Solamente tenemos dos pares de candidatos: $(1,21)$ y $(3,7)$.
- Sabemos que el mayor de los dos será negativo y el otro positivo.

- La solución es 3, -7, porque

$$\begin{aligned} 3+(-7) &= -4 \qquad \text{y} \\ (3)(-7) &= -21 \end{aligned}$$

- Entonces, la factorización que buscábamos es:

$$x^2-4x-21=(x+3)(x-7)$$

Ejemplo 9

Factoriza:

$$4x^2+10x+4$$

- Observa que el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno.
- En este caso debemos primero calcular la raíz cuadrada del término cuadrático:

$$\sqrt{4x^2}=2x$$

- Ahora vamos a escribir la factorización que deseamos encontrar:

$$(2x+m)(2x+n)$$

- Si multiplicamos obtenemos:

$$(2x+m)(2x+n)=4x^2+2x(m+n)+m\cdot n$$

- Entonces necesitamos encontrar dos números m, n que satisfagan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} 2(m+n) &= 10, \text{ y} \\ m\cdot n &= 4 \end{aligned}$$

- La primera condición implica que $m+n=5$.
- La segunda condición nos limita a usar solamente alguno de los siguienes casos: $(2,2)$ ó $(1,4)$.
- Porque $2\times 2=4$ y $1\times 4=4$
- La solución que satisface las condiciones del problema es: $(1,4)$, porque $1+4=5$.
- Entonces, la factorización que buscamos es:

$$4x^2+10x+4=(2x+1)(2x+4)$$

Ahora estudiaremos otro caso de factorización: la diferencia de cuadrados, que al factorizarse se convierte en un producto conjugado.

Ejemplo 10

Factoriza:

$$x^2-81$$

- Este caso de la factorización es el más sencillo, porque la fórmula nos dice:

$$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$$

- Observa que basta encontrar la raíz cuadrada de cada uno de los términos de la diferencia de cuadrados y escribir, a partir de estas raíces, el producto conjugado.
- En nuestro ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2} &= x \\ \sqrt{81} &= 9 \end{aligned}$$

- Entonces, la factorización queda:

$$x^2 - 81 = (x+9)(x-9)$$

Una forma más de justificar el mismo resultado puede hacerse con el caso (*iii*) de factorización.

Para esto buscamos dos números que sumados den cero (el coeficiente del término lineal) y multiplicados den -81.

Es obvio que para la suma sea cero, los números deben ser iguales y con signo opuesto. Para que su producto sea -81, necesitamos que los números sean $\sqrt{81}$ y $-\sqrt{81}$, que son precisamente 9 y -9.

Como puedes ver, si suponemos que se trata de un producto de binomios con término común, de cualquier forma debes llegar al resultado correcto.

Factoriza:

$$16\,x^4 - 36\,y^{10}$$

Ejemplo 11

- Este caso de factorización es muy sencillo.
- Simplemente debemos calcular la raíz cuadrada de cada uno de los términos y utilizarlos para escribir un producto conjugado:

$$\begin{aligned} \sqrt{16\,x^4} &= 4\,x^2 \\ \sqrt{36\,y^{10}} &= 6\,y^5 \end{aligned}$$

- Al escribir el producto conjugado obtenemos la factorización:

$$16\,x^4 - 36\,y^{10} = (4\,x^2 + 6\,y^5)(4\,x^2 - 6\,y^5)$$

- Puedes verificar que el resultado es correcto realizando la multiplicación.

Observa que pudimos haber transformado la diferencia de cuadrados con las siguientes sustituciones: $m = 4\,x^2$, $n = 6\,y^5$, y obtener:

$$16\,x^4 - 36\,y^{10} = m^2 - n^2$$

Al factorizar obtenemos:

$$m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$$

y al sustituir los valores definidos de m y n nos da:

$$16\,x^4 - 36\,y^{10} = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = (4\,x^2 + 6\,y^5)(4\,x^2 - 6\,y^5)$$

Esto muestra que estamos utilizando el producto notable, pero para un caso más general.

Factoriza:
$$\frac{25\,x^6}{81} - \frac{9}{m^4}$$
Ejemplo 12

- En este caso tenemos una diferencia de cuadrados, porque:
$$\left(\frac{5\,x^3}{9}\right)^2 = \frac{25\,x^6}{81}$$
  y
$$\left(\frac{3}{m^2}\right)^2 = \frac{9}{m^4}$$
- Entonces, de acuerdo con la fórmula, tenemos:
$$\frac{25\,x^6}{81} - \frac{9}{m^4} = \left(\frac{5\,x^3}{9} + \frac{3}{m^2}\right)\left(\frac{5\,x^3}{9} - \frac{3}{m^2}\right)$$

Ejemplo 13

Factoriza:
$$8\,x^3 - 27\,y^{12}$$

- Aquí tenemos el caso más laborioso, pero igual de sencillo: se trata de una diferencia de cubos.
- Primero sacamos la raíz cúbica de cada término:
$$\sqrt[3]{8\,x^3} = 2\,x \qquad \text{porque} \qquad (2\,x)^3 = 8\,x^3$$
  y
$$\sqrt[3]{27\,y^{12}} = 3\,y^4 \qquad \text{porque} \qquad \left(3\,y^4\right)^3 = 27\,y^{12}$$
- Ahora sustituimos de acuerdo a la fórmula:
$$\begin{array}{rcl} x^3 - a^3 & = & (x-a)(x^2 + a\,x + a^2) \\ 8\,x^3 - 27\,y^{12} & = & (2\,x)^3 - \left(3\,y^4\right)^3 \\ (2\,x)^3 - \left(3\,y^4\right)^3 & = & \left(2\,x - 3\,y^4\right)\left((2\,x)^2 + \left(3\,y^4\right)(2\,x) + \left(3\,y^4\right)^2\right) \\ & = & \left(2\,x - 3\,y^4\right)\left(4\,x^2 + 6\,x\,y^4 + 9\,y^8\right) \end{array}$$
- En conclusión:
$$8\,x^3 - 27\,y^{12} = \left(2\,x - 3\,y^4\right)\left(4\,x^2 + 6\,x\,y^4 + 9\,y^8\right)$$

Para que puedas identificar rápidamente qué caso de factorización debes utilizar trata de ver qué estructura tiene el polinomio que deseas factorizar.

Utiliza los procedimientos que se explican en los ejemplos, dependiendo de la estructura de cada polinomio.

No todos los polinomios se pueden factorizar. Por ejemplo, x^2+1 no se puede factorizar, a pesar de que parece sencillo.

Cuando un polinomio no se pueda factorizar, es decir, no se pueda expresar como el producto de otros polinomios lineales (de grado 1) o cuadráticos (de grado 2), diremos que es un polinomio primo.

En caso de que sí sea posible factorizarlo, diremos que ese polinomio es compuesto.

En la lista de ejercicios se incluyen solamente polinomios compuestos para que practiques la factorización y adquieras destreza en este procedimiento tan importante en matemáticas.

Factoriza cada una de las siguientes expresiones. **Ejercicios 2.2.5**

1) $64+48v+9v^2=$ **R.** $(8+3v)^2$

2) $81+108v+36v^2=$ **R.** $(9+6v)^2$

3) $81+126v+49v^2=$ **R.** $(9+7v)^2$

4) $1+12v+36v^2=$ **R.** $(1+6v)^2$

5) $81+18v+v^2=$ **R.** $(9+v)^2$

6) $81+90v+25v^2=$ **R.** $(9+5v)^2$

7) $81-90v+25v^2=$ **R.** $(9-5v)^2$

8) $64+64v+16v^2=$ **R.** $(8+4v)^2$

9) $4+20v+25v^2=$ **R.** $(2+5v)^2$

10) $49+126v+81v^2=$ **R.** $(7+9v)^2$

11) $25-10v+v^2=$ **R.** $(5-v)^2$

12) $49+56v+16v^2=$ **R.** $(7+4v)^2$

13) $64-80v+25v^2=$ **R.** $(8-5v)^2$

14) $1-14v+49v^2=$ **R.** $(1-7v)^2$

15) $1+18v+81v^2=$ **R.** $(1+9v)^2$

16) $25-40v+16v^2=$ **R.** $(5-4v)^2$

17) $1+8v+16v^2=$ **R.** $(1+4v)^2$

18) $16+24v+9v^2=$ **R.** $(4+3v)^2$

19) $4-16v+16v^2=$ **R.** $(2-4v)^2$

20) $9-42v+49v^2=$ **R.** $(3-7v)^2$

21) $49+14v+v^2=$ **R.** $(7+v)^2$

22) $36+60v+25v^2=$ **R.** $(6+5v)^2$

23) $81-36v+4v^2=$ **R.** $(9-2v)^2$

24) $36-36v+9v^2=$ **R.** $(6-3v)^2$

25) $9-42v+49v^2=$ **R.** $(3-7v)^2$

26) $64+32v+4v^2=$ **R.** $(8+2v)^2$

27) $1+2v+v^2=$ **R.** $(1+v)^2$

28) $36-12v+v^2=$ **R.** $(6-v)^2$

29) $49+126v+81v^2=$ **R.** $(7+9v)^2$

30) $25-20v+4v^2=$ **R.** $(5-2v)^2$

31) $16+56v+49v^2=$ **R.** $(4+7v)^2$

32) $49-42v+9v^2=$ **R.** $(7-3v)^2$

33) $9-30v+25v^2=$ **R.** $(3-5v)^2$

34) $-20+14x+24x^2=$ **R.** $(4+6x)(-5+4x)$

35) $45+4x+x^2=$ **R.** $(5+x)(9+x)$

36) $-14+47x+30x^2=$ **R.** $(7+6x)(-2+5x)$

37) $-1+17x+72x^2=$ **R.** $(1+8x)(-1+9x)$

38) $-21+19x+4x^2=$ **R.** $(3+x)(-7+4x)$

39) $16+42x+18x^2=$ **R.** $(8+3x)(2+6x)$

40) $16+68x+42x^2=$ **R.** $(8+6x)(2+7x)$

41) $9+34x+8x^2=$ **R.** $(9+2x)(1+4x)$

42) $15+5x+20x^2=$ **R.** $(5+5x)(3+4x)$

43) $-72+3x+9x^2=$ **R.** $(9+3x)(-8+3x)$

44) $-6+9x+6x^2=$ **R.** $(2+x)(-3+6x)$

45) $5+8x-21x^2=$ **R.** $(5-7x)(1+3x)$

46) $56-12x-20x^2=$ **R.** $(7-5x)(8+4x)$

47) $12-24x-36x^2=$ **R.** $(3-9x)(4+4x)$

48) $-3+15x-18x^2=$ **R.** $(1-3x)(-3+6x)$

49) $8-50x-42x^2=$ **R.** $(1-7x)(8+6x)$

50) $72+61x+10x^2=$ **R.** $(9+2x)(8+5x)$

51) $-8+28x-20x^2=$ **R.** $(4-4x)(-2+5x)$

52) $4+12x-7x^2=$ **R.** $(2-x)(2+7x)$

53) $-2+22x-48x^2=$ **R.** $(1-8x)(-2+6x)$

54) $24+78x+54x^2=$ **R.** $(6+6x)(4+9x)$

55) $2+4x+2x^2=$ **R.** $(1+x)(2+2x)$

56) $6-8x-8x^2=$ **R.** $(1-2x)(6+4x)$

57) $8+37x-15x^2=$ **R.** $(8-3x)(1+5x)$

58) $-25+65x-36x^2=$ **R.** $(5-4x)(-5+9x)$

59) $20+13\,x-15\,x^2=$ **R.** $(5-3\,x)(4+5\,x)$

60) $-20+26\,x+18\,x^2=$ **R.** $(4+2\,x)(-5+9\,x)$

61) $7+21\,x+14\,x^2=$ **R.** $(1+2\,x)(7+7\,x)$

62) $-7+25\,x-12\,x^2=$ **R.** $(7-4\,x)(-1+3\,x)$

63) $3+19\,x-72\,x^2=$ **R.** $(3-8\,x)(1+9\,x)$

64) $40-57\,x-27\,x^2=$ **R.** $(5-9\,x)(8+3\,x)$

65) $-4-2\,x+56\,x^2=$ **R.** $(2+8\,x)(-2+7\,x)$

66) $24+6\,x-18\,x^2=$ **R.** $(8-6\,x)(3+3\,x)$

67) $-9+39\,x-36\,x^2=$ **R.** $(3-4\,x)(-3+9\,x)$

68) $36\,x^2-9\,y^4=$ **R.** $(6\,x+3\,y^2)(6\,x-3\,y^2)$

69) $x^2-9\,y^4=$ **R.** $(x+3\,y^2)(x-3\,y^2)$

70) $x^2-64\,y^4=$ **R.** $(x+8\,y^2)(x+8\,y^2)$

71) $64\,x^2-81\,y^4=$ **R.** $(8\,x+9\,y^2)(8\,x-9\,y^2)$

72) $8x^2-4\,y^4=$ **R.** $(9\,x+2\,y^2)(9\,x-2\,y^2)$

73) $25\,x^2-16\,y^4=$ **R.** $(5\,x+4\,y^2)(5\,x+4\,y^2)$

74) $64\,x^2-81\,y^4=$ **R.** $(8\,x+9\,y^2)(8\,x+9\,y^2)$

75) $49\,x^2-y^4=$ **R.** $(7\,x+y^2)(7\,x-y^2)$

76) $4\,x^2-49\,y^4=$ **R.** $(2\,x+7\,y^2)(2\,x-7\,y^2)$

77) $4\,x^2-25\,y^4=$ **R.** $(2\,x+5\,y^2)(2\,x-5\,y^2)$

78) $16\,x^2-25\,y^4=$ **R.** $(4\,x-5\,y^2)(4\,x+5\,y^2)$

79) $25\,x^2-9\,y^4=$ **R.** $(5\,x+3\,y^2)(5\,x-3\,y^2)$

80) $x^2-64\,y^4=$ **R.** $(x+8\,y^2)(x-8\,y^2)$

81) $81\,x^2-y^4=$ **R.** $(9\,x-y^2)(9\,x+y^2)$

82) $9\,x^2-4\,y^4=$ **R.** $(3\,x-2\,y^2)(3\,x+2\,y^2)$

83) $81\,x^2-49\,y^4=$ **R.** $(9\,x-7\,y^2)(9\,x+7\,y^2)$

84) $4\,x^2-81\,y^4=$ **R.** $(2\,x-9\,y^2)(2\,x+9\,y^2)$

85) $25\,x^2-64\,y^4=$ **R.** $(5\,x-8\,y^2)(5\,x+8\,y^2)$

86) $16\,x^2-36\,y^4=$ **R.** $(4\,x+6\,y^2)(4\,x-6\,y^2)$

87) $4\,x^2-81\,y^4=$ **R.** $(2\,x+9\,y^2)(2\,x-9\,y^2)$

88) $25\,x^2-64\,y^4=$ **R.** $(5\,x-8\,y^2)(5\,x+8\,y^2)$

89) $49\,x^2-25\,y^4=$ **R.** $(7\,x-5\,y^2)(7\,x+5\,y^2)$

90) $9\,x^2-64\,y^4=$ **R.** $(3\,x-8\,y^2)(3\,x+8\,y^2)$

91) $64\,x^2 - 81\,y^4 =$ **R.** $(8\,x - 9\,y^2)(8\,x + 9\,y^2)$

92) $36\,x^2 - 9\,y^4 =$ **R.** $(6\,x + 3\,y^2)(6\,x - 3\,y^2)$

93) $x^2 - 36\,y^4 =$ **R.** $(x - 6\,y^2)(x + 6\,y^2)$

94) $4\,x^2 - 16\,y^4 =$ **R.** $(2\,x - 4\,y^2)(2\,x + 4\,y^2)$

95) $9\,x^2 - 9\,y^4 =$ **R.** $(3\,x + 3\,y^2)(3\,x - 3\,y^2)$

96) $81\,x^2 - 64\,y^4 =$ **R.** $(9\,x - 8\,y^2)(9\,x + 8\,y^2)$

97) $9\,x^2 - y^4 =$ **R.** $(3\,x - y^2)(3\,x + y^2)$

98) $x^2 - 16\,y^4 =$ **R.** $(x + 4\,y^2)(x - 4\,y^2)$

99) $25\,x^2 - 81\,y^4 =$ **R.** $(5\,x + 9\,y^2)(5\,x - 9\,y^2)$

100) $36\,x^2 - y^4 =$ **R.** $(6\,x + y^2)(6\,x - y^2)$

101) $8\,x^3 + 24\,x^2\,y + 24\,x\,y^2 + 8\,y^3 =$ **R.** $(2\,x + 2\,y)^3$

102) $27\,x^3 + 108\,x^2\,y + 144\,x\,y^2 + 64\,y^3 =$ **R.** $(3\,x + 4\,y)^3$

103) $512\,x^3 + 576\,x^2\,y + 216\,x\,y^2 + 27\,y^3 =$ **R.** $(8\,x + 3\,y)^3$

104) $8\,x^3 + 108\,x^2\,y + 486\,x\,y^2 + 729\,y^3 =$ **R.** $(2\,x + 9\,y)^3$

105) $x^3 + 27\,x^2\,y + 243\,x\,y^2 + 729\,y^3 =$ **R.** $(x + 9\,y)^3$

106) $64\,x^3 + 240\,x^2\,y + 300\,x\,y^2 + 125\,y^3 =$ **R.** $(4\,x + 5\,y)^3$

107) $125\,x^3 + 300\,x^2\,y + 240\,x\,y^2 + 64\,y^3 =$ **R.** $(5\,x + 4\,y)^3$

108) $x^3 + 15\,x^2\,y + 75\,x\,y^2 + 125\,y^3 =$ **R.** $(x + 5\,y)^3$

109) $27\,x^3 + 216\,x^2\,y + 576\,x\,y^2 + 512\,y^3 =$ **R.** $(3\,x + 8\,y)^3$

110) $x^3 + 12\,x^2\,y + 48\,x\,y^2 + 64\,y^3 =$ **R.** $(x + 4\,y)^3$

2.2.6 Simplificación de Fracciones algebraicas

Así como los polinomios son una generalización de los números enteros, las fracciones algebraicas son una generalización de las fracciones. La única diferencia que veremos es que ahora en el numerador y/o en el denominador veremos polinomios.

Seguramente recuerdas realizar las operaciones con fracciones. Pues con esos mismos procedimientos realizaremos las operaciones con fraciones algebraicas.

Ejemplo 1 Simplifica: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} =$

- Aquí vamos a suponer que x y y son números... De hecho, eso representan...
- Así que vamos a utilizar el procedimiento para sumar fracciones:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y + x}{x\,y}$$

- Observa que en realidad primero encontramos fracciones equivalentes a cada una de las fracciones algebraicas que se están sumando, porque:

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{x\,y} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{y} = \frac{x}{x\,y}$$

- Así que sumar:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

- Es lo mismo que sumar:

$$\frac{y}{x\,y} + \frac{x}{x\,y} = \frac{y+x}{x\,y}$$

porque ahora tenemos denominador común.

Simplifica:

$$\frac{3}{x-y} + \frac{2}{x+y} =$$

Ejemplo 2

- Empezamos encontrando el mínimo común denominador, que es en sí el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- En este caso, es igual al producto de los denominadores:

$$\frac{3}{x-y} + \frac{2}{x+y} = \frac{\qquad}{(x-y)(x+y)}$$

- Ahora vamos a realizar el mismo procedimiento que con las fracciones que tienen números en lugar de literales,
- es decir, vamos a *multiplicar cruzado*:

$$\frac{3}{x-y} + \frac{2}{x+y} = \frac{3(x+y)+2(x-y)}{(x-y)(x+y)}$$

- Ahora realizamos las operaciones y simplificamos hasta donde sea posible.

$$\begin{aligned} \frac{3(x+y)+2(x-y)}{(x-y)(x+y)} &= \frac{3\,x+3\,y+2\,x-2\,y}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{5\,x+y}{(x-y)(x+y)} \end{aligned}$$

- Entonces,

$$\frac{3}{x-y} + \frac{2}{x+y} = \frac{5\,x+y}{(x-y)(x+y)}$$

Algunas de las fracciones que vamos a simplificar se verán muy difíciles, pero en realidad, lo que tenemos que hacer es aplicar los procedimientos que normalmente usamos con las fracciones (con números en el numerador y en el denominador), realizar las operaciones que queden indicadas y terminamos.

Simplifica:

$$\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} =$$

Ejemplo 3

- En este caso tenemos que utilizar el mismo procedimiento...
- Primero encontramos en mínimo común denominador:

$$\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} = \frac{}{x^2\,y^2}$$

- Ahora realizamos el *producto cruzado*:

$$\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} = \frac{x^3 - y^3}{x^2\,y^2}$$

- Esto significa que:

$$\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} = \frac{x^3 - y^3}{x^2\,y^2}$$

Algunas veces nos servirá factorizar para simplificar los resultados o las fracciones antes de empezar con las operaciones.

Ejemplo 4

Simplifica:

$$\frac{x^2 - 3\,x - 10}{x^2 + 2\,x - 3} \cdot \frac{x^2 + 7\,x + 12}{x^2 + 6\,x + 8} =$$

- Primero factorizamos todos los polinomios que se encuentras en los numeradores y denominadores de las fracciones:

$$\begin{aligned}
x^2 - 3\,x - 10 &= (x+2)(x-5)\\
x^2 + 2\,x - 3 &= (x+3)(x-1)\\
x^2 + 7\,x + 12 &= (x+3)(x+4)\\
x^2 + 6\,x + 8 &= (x+4)(x+2)
\end{aligned}$$

- Entonces, podemos escribir la operación de la siguiente manera equivalente:

$$\frac{x^2 - 3\,x - 10}{x^2 + 2\,x - 3} \cdot \frac{x^2 + 7\,x + 12}{x^2 + 6\,x + 8} = \frac{(x+2)(x-5)}{(x+3)(x-1)} \cdot \frac{(x+3)(x+4)}{(x+4)(x+2)}$$

- Ahora realizamos la multiplicación como se hace con las fracciones con números: multiplicamos numerador por numerador y denominador por denominador:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - 3\,x - 10}{x^2 + 2\,x - 3} \cdot \frac{x^2 + 7\,x + 12}{x^2 + 6\,x + 8} &= \frac{(x+2)(x-5)}{(x+3)(x-1)} \cdot \frac{(x+3)(x+4)}{(x+4)(x+2)}\\
&= \frac{\cancel{(x+2)}(x-5)\cancel{(x+3)}\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+3)}(x-1)\cancel{(x+4)}\cancel{(x+2)}}\\
&= \frac{x-5}{x-1}
\end{aligned}$$

La división también se realiza exactamente de la misma manera que con los números: *multiplicamos cruzado*...

Ejemplo 5

Simplifica:

$$\frac{x^2 + 2\,x - 35}{x^2 + 11\,x + 18} \div \frac{x^2 - 4\,x - 5}{x^2 + 10\,x + 9}$$

- Empezamos factorizando los polinomios:

$$\begin{aligned} x^2+2x-35 &= (x+7)(x-5)\\ x^2+11x+18 &= (x+2)(x+9)\\ x^2-4x-5 &= (x-5)(x+1)\\ x^2+10x+9 &= (x+9)(x+1) \end{aligned}$$

- Ahora podemos expresar la operación y simplificar el divisor:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x-35}{x^2+11x+18} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+10x+9} &= \frac{(x+7)(x-5)}{(x+2)(x+9)} \div \frac{(x-5)\cancel{(x+1)}}{(x+9)\cancel{(x+1)}}\\ &= \frac{(x+7)(x-5)}{(x+2)(x+9)} \div \frac{x-5}{x+9} \end{aligned}$$

lo cual simplifica nuestra operación.

- Ahora realizamos la división:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x-35}{x^2+11x+18} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+10x+9} &= \frac{(x+7)(x-5)}{(x+2)(x+9)} \div \frac{x-5}{x+9}\\ &= \frac{(x+7)\cancel{(x-5)}\cancel{(x+9)}}{(x+2)\cancel{(x+9)}\cancel{(x-5)}}\\ &= \frac{x+7}{x+2} \end{aligned}$$

- Entonces,

$$\frac{x^2+2x-35}{x^2+11x+18} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+10x+9} = \frac{x+7}{x+2}$$

Si no recuerdas cómo realizar una operación con fracciones algebraicas, basta recordar cómo realizas las operaciones con las fracciones que tienen números en el numerador y en el denominador. Debes usar exactamente el mismo procedimiento, porque los polinomios representan números, y las fracciones algebraicas se forman a partir de polinomios.

Realiza las operaciones que están indicadas y simplifica el resultado hasta su mínima expresión.

Ejercicios 2.2.6

1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-9}$ **R.** $\dfrac{-11+3x}{(x-1)(x-9)}$

2) $\dfrac{6}{x-5}+\dfrac{5}{x+5}$ **R.** $\dfrac{5+11x}{(x-5)(x+5)}$

3) $\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{2}{x+3}$ **R.** $\dfrac{15+3x}{(x+6)(x+3)}$

4) $\dfrac{4}{x+9}+\dfrac{1}{x-6}$ **R.** $\dfrac{-15+5x}{(x+9)(x-6)}$

5) $\dfrac{6}{x+1}+\dfrac{2}{x-9}$ **R.** $\dfrac{-52+8x}{(x+1)(x-9)}$

6) $\dfrac{8}{x+2}+\dfrac{4}{x+2}$ **R.** $\dfrac{24+12x}{(x+2)(x+2)}$

7) $\dfrac{7}{x+8}+\dfrac{4}{x+6}$ **R.** $\dfrac{74+11\,x}{(x+8)(x+6)}$

8) $\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{9}{x-2}$ **R.** $\dfrac{-56+10\,x}{(x-6)(x-2)}$

9) $\dfrac{7}{x-3}+\dfrac{7}{x+6}$ **R.** $\dfrac{21+14\,x}{(x-3)(x+6)}$

10) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{5}{x-4}$ **R.** $\dfrac{2+7\,x}{(x+2)(x-4)}$

11) $\dfrac{3}{x+9}+\dfrac{6}{x+4}$ **R.** $\dfrac{66+9\,x}{(x+9)(x+4)}$

12) $\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{8}{x-3}$ **R.** $\dfrac{-7+13\,x}{(x+1)(x-3)}$

13) $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{9}{x-1}$ **R.** $\dfrac{14+13\,x}{(x+2)(x-1)}$

14) $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{6}{x+1}$ **R.** $\dfrac{-9+9\,x}{(x-2)(x+1)}$

15) $\dfrac{7}{x+3}+\dfrac{2}{x-6}$ **R.** $\dfrac{-36+9\,x}{(x+3)(x-6)}$

16) $\dfrac{3-6\,x}{9\,x+2}+\dfrac{9-x}{5\,x+5}$ **R.** $\dfrac{-39\,x^2+64\,x+33}{(9\,x+2)(5\,x+5)}$

17) $\dfrac{6+8\,x}{9\,x-9}+\dfrac{1+2\,x}{3\,x+4}$ **R.** $\dfrac{42\,x^2+41\,x+15}{(9\,x-9)(3\,x+4)}$

18) $\dfrac{4-2\,x}{x-5}+\dfrac{7+3\,x}{x-6}$ **R.** $\dfrac{x^2+8\,x-59}{(x-5)(x-6)}$

19) $\dfrac{3+6\,x}{6\,x-4}+\dfrac{5+4\,x}{5\,x+5}$ **R.** $\dfrac{54\,x^2+59\,x-5}{(6\,x-4)(5\,x+5)}$

20) $\dfrac{6+6\,x}{2\,x-6}+\dfrac{9-4\,x}{x+1}$ **R.** $\dfrac{-2\,x^2+54\,x-48}{(2\,x-6)(x+1)}$

21) $\dfrac{8+4\,x}{7\,x-9}+\dfrac{4-9\,x}{6\,x+1}$ **R.** $\dfrac{-39\,x^2+161\,x-28}{(7\,x-9)(6\,x+1)}$

22) $\dfrac{9-5\,x}{8\,x-7}+\dfrac{3+4\,x}{9\,x-4}$ **R.** $\dfrac{-13\,x^2+97\,x-57}{(8\,x-7)(9\,x-4)}$

23) $\dfrac{4+9\,x}{x-8}+\dfrac{5-8\,x}{2\,x+1}$ **R.** $\dfrac{10\,x^2+86\,x-36}{(x-8)(2\,x+1)}$

24) $\dfrac{9+x}{x+3}+\dfrac{1-8\,x}{7\,x-4}$ **R.** $\dfrac{-x^2+36\,x-33}{(x+3)(7\,x-4)}$

25) $\dfrac{3+4\,x}{x+7}+\dfrac{9-5\,x}{3\,x-8}$ **R.** $\dfrac{7\,x^2-49\,x+39}{(x+7)(3\,x-8)}$

26) $\dfrac{1+3\,x}{3\,x-5}+\dfrac{9+7\,x}{8\,x-1}$ **R.** $\dfrac{45\,x^2-3\,x-46}{(3\,x-5)(8\,x-1)}$

27) $\dfrac{5+7x}{x-3}+\dfrac{5+8x}{5x+9}$ **R.** $\dfrac{43x^2+69x+30}{(x-3)(5x+9)}$

28) $\dfrac{8-6x}{3x+1}+\dfrac{9+4x}{2x-6}$ **R.** $\dfrac{0x^2+83x-39}{(3x+1)(2x-6)}$

29) $\dfrac{2-4x}{2x+9}+\dfrac{2-4x}{7x-3}$ **R.** $\dfrac{-36x^2-6x+12}{(2x+9)(7x-3)}$

30) $\dfrac{9+7x}{4x-4}+\dfrac{3-6x}{3x-2}$ **R.** $\dfrac{-3x^2+49x-30}{(4x-4)(3x-2)}$

31) $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{5}{x+8}$ **R.** $\dfrac{42-x}{(x-2)(x+8)}$

32) $\dfrac{5}{x+1}-\dfrac{1}{x-4}$ **R.** $\dfrac{-21+4x}{(x+1)(x-4)}$

33) $\dfrac{9}{x-4}-\dfrac{3}{x-6}$ **R.** $\dfrac{-42+6x}{(x-4)(x-6)}$

34) $\dfrac{7}{x+6}-\dfrac{7}{x-3}$ **R.** $\dfrac{-63}{(x+6)(x-3)}$

35) $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3}{x+5}$ **R.** $\dfrac{23+x}{(x-1)(x+5)}$

36) $\dfrac{6}{x+2}-\dfrac{1}{x+9}$ **R.** $\dfrac{52+5x}{(x+2)(x+9)}$

37) $\dfrac{3}{x-6}-\dfrac{3}{x+8}$ **R.** $\dfrac{42}{(x-6)(x+8)}$

38) $\dfrac{9}{x-5}-\dfrac{4}{x-4}$ **R.** $\dfrac{-16+5x}{(x-5)(x-4)}$

39) $\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{6}{x-5}$ **R.** $\dfrac{3-3x}{(x-3)(x-5)}$

40) $\dfrac{8}{x+8}-\dfrac{6}{x+4}$ **R.** $\dfrac{-16+2x}{(x+8)(x+4)}$

41) $\dfrac{7}{x+7}-\dfrac{3}{x+3}$ **R.** $\dfrac{4x}{(x+7)(x+3)}$

42) $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{7}{x-4}$ **R.** $\dfrac{-5-4x}{(x-1)(x-4)}$

43) $\dfrac{8}{x+9}-\dfrac{4}{x-6}$ **R.** $\dfrac{-84+4x}{(x+9)(x-6)}$

44) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x-7}$ **R.** $\dfrac{2-2x}{(x-3)(x-7)}$

45) $\dfrac{7}{x-6}-\dfrac{7}{x-2}$ **R.** $\dfrac{28}{(x-6)(x-2)}$

46) $\dfrac{3+7x}{x+3}-\dfrac{1+5x}{2x-1}$ **R.** $\dfrac{9x^2-17x-6}{(x+3)(2x-1)}$

47) $\dfrac{4-x}{5x+7}-\dfrac{2+9x}{9x+3}$ **R.** $\dfrac{-54x^2-40x-2}{(5x+7)(9x+3)}$

48) $\dfrac{1+5x}{6x+3}-\dfrac{7-4x}{4x+9}$ **R.** $\dfrac{44x^2+19x-12}{(6x+3)(4x+9)}$

49) $\dfrac{9+8x}{6x+9}-\dfrac{7+2x}{4x+9}$ **R.** $\dfrac{20x^2+48x+18}{(6x+9)(4x+9)}$

50) $\dfrac{2+8x}{x-5}-\dfrac{1+3x}{5x-1}$ **R.** $\dfrac{37x^2+16x+3}{(x-5)(5x-1)}$

51) $\dfrac{6-5x}{3x-5}-\dfrac{3+5x}{2x+5}$ **R.** $\dfrac{-25x^2+3x+45}{(3x-5)(2x+5)}$

52) $\dfrac{5-6x}{9x-1}-\dfrac{7-x}{4x+9}$ **R.** $\dfrac{-15x^2-98x+52}{(9x-1)(4x+9)}$

53) $\dfrac{3-3x}{9x-5}-\dfrac{9-4x}{5x+8}$ **R.** $\dfrac{21x^2-110x+69}{(9x-5)(5x+8)}$

54) $\dfrac{8+6x}{5x-5}-\dfrac{8-x}{9x+9}$ **R.** $\dfrac{59x^2+81x+112}{(5x-5)(9x+9)}$

55) $\dfrac{1+4x}{2x+6}-\dfrac{8-3x}{9x+1}$ **R.** $\dfrac{42x^2+15x-47}{(2x+6)(9x+1)}$

56) $\dfrac{6-x}{x-6}-\dfrac{5-2x}{5x-4}$ **R.** $\dfrac{-3x^2+17x+6}{(x-6)(5x-4)}$

57) $\dfrac{9-4x}{2x-2}-\dfrac{2+2x}{4x+9}$ **R.** $\dfrac{-20x^2+85}{(2x-2)(4x+9)}$

58) $\dfrac{5+4x}{3x+6}-\dfrac{7+7x}{8x-4}$ **R.** $\dfrac{11x^2-39x-62}{(3x+6)(8x-4)}$

59) $\dfrac{3-4x}{6x+4}-\dfrac{5+3x}{7x-8}$ **R.** $\dfrac{-46x^2+11x-44}{(6x+4)(7x-8)}$

60) $\dfrac{5-7x}{x-5}-\dfrac{5+7x}{2x-9}$ **R.** $\dfrac{-21x^2+103x-20}{(x-5)(2x-9)}$

61) $\left(\dfrac{x-9}{x-1}\right)\left(\dfrac{x-5}{x-8}\right)$ **R.** $\dfrac{x^2-14x+45}{x^2-9x+8}$

62) $\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)\left(\dfrac{x+9}{x-4}\right)$ **R.** $\dfrac{x^2+10x+9}{x^2-7x+12}$

63) $\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)\left(\dfrac{x-8}{x-5}\right)$ **R.** $\dfrac{x^2-5x-24}{x^2-8x+15}$

64) $\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)\left(\dfrac{x+2}{x+9}\right)$ **R.** $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+7x-18}$

65) $\left(\dfrac{x-6}{x-2}\right)\left(\dfrac{x+8}{x+1}\right)$ **R.** $\dfrac{x^2+2x-48}{x^2-x-2}$

66) $\left(\dfrac{x-8}{x+6}\right)\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$ **R.** $\dfrac{x^2-10x+16}{x^2+3x-18}$

67) $\left(\frac{x-5}{x-3}\right)\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$ **R.** $\frac{x^2-14x+45}{x^2-2x-3}$

68) $\left(\frac{x+8}{x-4}\right)\left(\frac{x-1}{x-9}\right)$ **R.** $\frac{x^2+7x-8}{x^2-13x+36}$

69) $\left(\frac{x+3}{x+9}\right)\left(\frac{x-6}{x-4}\right)$ **R.** $\frac{x^2-3x-18}{x^2+5x-36}$

70) $\left(\frac{x-7}{x+7}\right)\left(\frac{x+5}{x-3}\right)$ **R.** $\frac{x^2-2x-35}{x^2+4x-21}$

71) $\left(\frac{x-3}{x+9}\right)\left(\frac{x-4}{x+4}\right)$ **R.** $\frac{x^2-7x+12}{x^2+13x+36}$

72) $\left(\frac{x+1}{x+9}\right)\left(\frac{x+7}{x-9}\right)$ **R.** $\frac{x^2+8x+7}{x^2-81}$

73) $\left(\frac{x-6}{x-1}\right)\left(\frac{x+9}{x+2}\right)$ **R.** $\frac{x^2+3x-54}{x^2+x-2}$

74) $\left(\frac{x-9}{x-8}\right)\left(\frac{x-3}{x+8}\right)$ **R.** $\frac{x^2-12x+27}{x^2-64}$

75) $\left(\frac{x-6}{x+6}\right)\left(\frac{x+6}{x+7}\right)$ **R.** $\frac{x-6}{x+7}$

76) $\frac{x-2}{x+7}\div\frac{x+7}{x+9}$ **R.** $\frac{x^2+7x-18}{x^2+14x+49}$

77) $\frac{x-4}{x+8}\div\frac{x-4}{x-3}$ **R.** $\frac{x-3}{x+8}$

78) $\frac{x+4}{x+5}\div\frac{x+8}{x-2}$ **R.** $\frac{x^2+2x-8}{x^2+13x+40}$

79) $\frac{x+6}{x-2}\div\frac{x-8}{x+1}$ **R.** $\frac{x^2+7x+6}{x^2-10x+16}$

80) $\frac{x-2}{x+7}\div\frac{x+6}{x+8}$ **R.** $\frac{x^2+6x-16}{x^2+13x+42}$

81) $\frac{x+5}{x-9}\div\frac{x+1}{x-9}$ **R.** $\frac{x+5}{x+1}$

82) $\frac{x+2}{x-9}\div\frac{x+9}{x-7}$ **R.** $\frac{x^2-5x-14}{x^2-81}$

83) $\frac{x+7}{x-7}\div\frac{x-3}{x-8}$ **R.** $\frac{x^2-x-56}{x^2-10x+21}$

84) $\frac{x-2}{x+8}\div\frac{x+8}{x+9}$ **R.** $\frac{x^2+7x-18}{x^2+16x+64}$

85) $\frac{x+7}{x-7}\div\frac{x-4}{x+6}$ **R.** $\frac{x^2+13x+42}{x^2-11x+28}$

86) $\frac{x+6}{x+9}\div\frac{x-8}{x+5}$ **R.** $\frac{x^2+11x+30}{x^2+x-72}$

87) $\dfrac{x+7}{x-4} \div \dfrac{x+6}{x-1}$ **R.** $\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+2x-24}$

88) $\dfrac{x-9}{x+3} \div \dfrac{x-4}{x-8}$ **R.** $\dfrac{x^2-17x+72}{x^2-x-12}$

89) $\dfrac{x-9}{x-2} \div \dfrac{x-2}{x-5}$ **R.** $\dfrac{x^2-14x+45}{x^2-4x+4}$

90) $\dfrac{x+5}{x-1} \div \dfrac{x+4}{x+3}$ **R.** $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+3x-4}$

91) **Reto: (Física)** Las unidades de la aceleración son: $\mathrm{m/s^2}$. La definición de aceleración, matemáticamente está dada por la siguiente fórmula:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Sabiendo que las unidades de velocidad son m/s, justifica por qué aparecen en el denominador segundos al cuadrado.

92) **Reto: (Física)** En la sección **??** interpretamos la información que nos da la aceleración. ¿Sigue teniendo sentido las unidades que aparecen en el denominador de $\mathrm{m/s^2}$? (Justifica tu respuesta)

Capítulo 3

Ecuaciones de primer grado

Por aprender...

3.1. Ecuaciones de primer grado

- 3.1.1. Ec. de primer grado con una incógnita
- 3.1.2. Relación de la Ec. de 1er grado con la función lineal
- 3.1.3. Interpretación Gráfica

3.2. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

- 3.2.1. Métodos algebraicos para resolver S.E.L.
  - ✓ Eliminación (Suma y resta)
  - ✓ Sustitución
  - ✓ Igualación
  - ✓ Determinantes
- 3.2.2. Interpretación gráfica de un S.E.L.

3.3. S.E.L.'s de tres ecuaciones con tres incógnitas

- 3.3.1. S.E.L.'s de tres por tres con y sin solución

Por qué es importante...

Las ecuaciones lineales nos ayudan a resolver problemas aplicados a diferentes contextos. Negocios, Química, Física, Administración, Computación, etc., frecuentemente requieren de la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

3.1 Ecuaciones de Primer Grado

Vamos a empezar el estudio de las ecuaciones de primer grado con el caso más sencillo.

Poco a poco iremos estudiando casos más complicados.

3.1.1 Ec. de Primer Grado con una incógnita

Una ecuación es una expresión matemática que iguala dos cantidades. Por ejemplo, $5+7=12$.

Empezamos la solución de ecuaciones con el siguiente juego.

Ejemplo 1

Pensé un número. Primero lo multipliqué por 7, al resultado le sumé 1 y finalmente obtuve 50. ¿Qué número pensé?

- No sabemos de inicio qué número pensó.
- Solamente sabemos que cuando multiplicó por 7, le sumó uno y obtuvo 50.
- Supongamos que pensó el número x.
- Cuando lo multiplicó por 7 obtuvo: $7x$
- Después, cuando sumó 1 con lo que tenía: $7x+1$
- Y este valor es igual a 50: $7x+1=50$.
- Antes de tener 50 tenía: $7x=50-1$, porque todavía no sumaba 1.
- Es decir, $7x=49$.
- Y antes de multiplicarlo por 7 no tenía 49, sino la séptima parte de 49:

$$\frac{\cancel{7}\,x}{\cancel{7}} = x = \frac{49}{7} = 7$$

- Esto significa que pensó el número 7.
- Ahora verificamos que es verdad:

$$\begin{aligned} 7x+1 &= 50 \\ 7(7)+1 &= 50 \end{aligned}$$

En el primer ejemplo lo que no conocíamos era el número que pensó. En una ecuación, la incógnita representa un dato que no conocemos. Por eso, en el ejemplo anterior representamos la incógnita con la letra x.

Las incógnitas se representan por medio de letras cuando escribimos una ecuación.

El grado de una ecuación indica el mayor exponente que tiene alguna incógnita de la misma. En el ejemplo del número que pensó, la incógnita tiene exponente 1, por eso es una ecuación de primer grado.

Una ecuación puede tener más de una incógnita, pero en esta lección, solamente estudiaremos las ecuaciones con una incógnita.

Dejaremos las ecuaciones con más incógnitas para más adelante. Para poder resolver ecuaciones con varias incógnitas primero necesitas entender cómo se resuelven las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Ejemplo 2

Resuelve la siguiente ecuación:

$$3\,x + 5 = 20$$

- Podemos razonar igual que en el ejemplo anterior: primero multiplicaron por 3, y al resultado le sumaron 5 y finalmente obtuvieron 20.
- El problema dice: «*Pensé un número, lo multipliqué por 3, al resultado le sumé 5 y obtube 20. ¿Qué número pensé?*»
- Antes de sumar 5 no tenían 20, sino $20 - 5 = 15$

$$3\,x + 5 - 5 = 20 - 5 = 15$$

- Y antes de multiplicar por 3 no tenían 15, sino 15/3:

$$\frac{\cancel{3}\,x}{\cancel{3}} = x = \frac{15}{3} = 5$$

- Eso indica que la solución de la ecuación es $x = 5$.
- Comprobación:

$$\begin{aligned} 3\,x + 5 &= 20 \\ 3(5) + 5 &= 20 \\ 15 + 5 &= 20 \end{aligned}$$

La solución de una ecuación es el (conjunto de) valor(es) que debe(n) tomar la(s) incógnita(s) para que la igualdad resulte verdadera.

En el ejemplo anterior la solución de la ecuación es $x = 5$ porque cuando sustituimos este valor, la igualdad se cumple. Sin embargo, cuando sustituimos otro valor la igualdad no se cumple. Por ejemplo, si sustituimos 1 en lugar de x obtenemos:

$$\begin{aligned} 3\,x + 5 &= 20 \\ 3(1) + 5 = 8 &\neq 20 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de primer grado pueden tener más de una solución. También es posible que **no** tengan solución.

Algunas ecuaciones tienen incógnitas en ambos lados de la igualdad.

Ejemplo 3

Resuelve la siguiente ecuación lineal:

$$2\,x + 2 = x + 6$$

- Observa que tenemos tanto números en ambos lados de la igualdad como incógnitas.
- La primera estrategia consiste en restar 2 en ambos lados de la ecuación para que del lado izquierdo de la igualdad desaparezca el 2:

$$\begin{aligned} 2\,x + \cancel{2} - \cancel{2} &= x + 6 - 2 \\ 2\,x &= x + 4 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a restar x en ambos lados de la iguadad para que tengamos la incógnita solamente en el lado izquierdo de la igualdad:

$$\begin{aligned} 2x - x &= \cancel{x} + 4 - \cancel{x} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

- Entonces, la solución de la ecuación es: $x = 4$.
- Comprobación:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= x + 6 \\ 2(4) + 2 &= (4) + 6 \\ 8 + 2 &= 10 \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Resuelve la siguiente ecuación lineal:

$$5x - 2 = 3x + 2$$

- Primero podemos sumar en ambos lados de la igualdad 2:

$$\begin{aligned} 5x - \cancel{2} + \cancel{2} &= 3x + 2 + 2 \\ 5x &= 3x + 4 \end{aligned}$$

- Ahora podemos sumar en ambos lados de la igualdad el término: $-3x$

$$\begin{aligned} 5x - 3x &= \cancel{3x} + 4 - \cancel{3x} \\ 2x &= 4 \end{aligned}$$

- Finalmente dividimos ambos lados de la igualdad entre 2 y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{4}{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

- Esto nos indica que la solución de la ecuación: $5x - 2 = 3x + 2$ es: $x = 2$.
- Comprobación:

$$\begin{aligned} 5x - 2 &= 3x + 2 \\ 5(2) - 2 &= 3(2) + 2 \\ 10 - 2 &= 6 + 2 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

Hasta aquí hemos trabajado con ecuaciones con coeficientes enteros. Sin embargo también podemos encontrar ecuaciones con coeficientes fraccionarios.

El método de solución de las ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios es exactamente igual que su contraparte con coeficientes fraccionarios. La única diferencia consiste en que ahora en lugar de realizar operaciones con números enteros, las tendremos que hacer con fracciones.

Ejemplo 5

Resuelve la siguiente ecuación lineal:

$$\frac{3}{2}\,x+1=\frac{5}{4}$$

- Empezamos notando que tenemos coeficientes fraccionarios.
- Para empezar simplificando la ecuación vamos a sumar -1 en ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\,x+\cancel{1}-\cancel{1} &= \frac{5}{4}-1\\
\frac{3}{2}\,x &= \frac{5}{4}-\frac{4}{4}\\
\frac{3}{2}\,x &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

- Observa que tomamos ventaja del hecho de que un número (disntito de cero) dividido por sí mismo siempre es igual a la unidad.
- Eso nos permite escribir al número 1 como la fracción $4/4$, así es más fácil realizar la resta de fracciones, dado que tenemos el mismo denominador.
- Si eres observador, ya te habrás dado cuenta que cuando queremos simplificar una ecuación que tiene un coeficiente k, dividíamos por ese número.
- Pero dividir por el coeficiente k es lo mismo que multiplicar por el número $1/k$, es decir, por su recíproco.
- Entonces, ahora debemos multiplicar por $2/3$ ambos lados de la igualdad para simplificar la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\,x &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\\
x &= \frac{2}{12}=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

- Entonces, la solución de la ecuación es $x=1/6$.
- Para verificar que la solución es correcta, basta sustituir el valor de la solución en la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\cdot(x)+1 &= \frac{5}{4}\\
\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+1 &= \frac{5}{4}\\
\frac{\cancel{3}}{\cancel{12}}+1 &= \frac{5}{4}\\
\frac{1}{4}+\frac{4}{4} &= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

- Entonces, la solución de la ecuación es correcta, porque la igualdad se cumple.

Como puedes ver, la solución de ecuaciones con coeficientes fraccionarios utiliza exactamente el mismo procedimiento que las ecuaciones con coeficientes enteros.

Independientemente de la complejidad de la ecuación lineal con coeficientes fraccionarios, siempre podemos resolverla utilizando el mismo procedimiento para resolverla suponiendo que sus coeficientes son enteros.

Esto es así porque tanto los números enteros como los números racionales (las fracciones) son números reales, y cuando resolvemos una ecuación suponemos que esta tiene solución en el conjunto de los números reales.

Salvo el ejemplo donde se pensó un número, las ecuaciones que hemos resuelto nos han servido solamente para ejercitarnos mentalmente y entender cómo pensamos cuando resolvemos un problema práctico.

Pero en realidad las ecuaciones lineales se inventaron para resolver problemas cotidianos.

El siguiente ejemplo muestra un problema donde las aplicamos.

Ejemplo 6

Carmela tiene el triple de años que su hija María. Ambas edades suman 60 años. ¿Qué edad tiene cada una de ellas?

- Si María tiene x años, entonces, Carmela tiene $3\,x$ años (el triple de la edad de su hija).
- La suma de las dos edades es 60 años. Entonces,

$$\text{Edad de María} + \text{Edad de Carmela} = 60$$

- Matemáticamente, tenemos:

$$\begin{aligned} x + 3\,x &= 60 \\ 4\,x &= 60 \\ \frac{\cancel{4}\,x}{\cancel{4}} &= \frac{60}{4} \\ x &= 15 \end{aligned}$$

- Es decir, María tiene 15 años (recuerda que x representa la edad de María), y su mamá Carmela tiene: $(3)(15) = 45$ años.
- Y cumple con la condición de que al sumar las edades obtengamos 60: $15 + 45 = 60$.

En matemáticas también se usan ecuaciones para resolver problemas geométricos que, muchas de las veces corresponden a problemas prácticos.

Ejemplo 7

Don Macario compró un terreno. Para cercarlo completamente necesitó 42 metros de malla. El terreno tiene forma rectangular y el largo mide el doble del ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

- Este problema en realidad es de geometría: «*Encontrar las dimensiones del rectángulo con perímetro 42 con el largo igual al doble del ancho.*»
- Nosotros lo vamos a aplicar al problema de Don Macario.
- Para formarnos una idea más clara del problema vamos a dibujar un diagrama con la información que tenemos:

- Observa que x representa la longitud del ancho del rectángulo, y el largo, por ser igual al doble del ancho, lo obtenemos multiplicando x por 2.
- La longitud de la cerca que utilizaron debe ser igual al perímetro del rectángulo.
- El perímetro del rectángulo es igual a la suma de las longitudes de los lados del terreno:
$$(x+2\,x)+(x+2\,x)=6\,x$$
y sabemos que esa longitud es igual a 42 metros, la longitud de la malla.
- Entonces, la ecuación lineal que modela esta situación es:
$$6\,x=42$$
- Esta ecuación es muy fácil de resolver.
- En palabras nos dice: «*Pensé un número (x) lo multipliqué por 6 y obtuve 42. ¿Qué número pensé?*»
- La respuesta es inmediata: pensó 7, porque $(6)(7)=42$.
- Recuerda que x representa la longitud del ancho del terreno.
- Entonces, las dimensiones del rectángulo son: 7 metros de ancho y 14 metros de largo.
- Vamos a verificar que este resultado realmente satisface las condiciones del problema.
- El ancho mide 7 metros y el largo el doble, es decir, 14 metros.
- El perímetro es igual a la suma de $7+7+14+14=42$ metros.
- Entonces, el problema está resuelto correctamente.

Otra forma de resolver el problema es como sigue: Sabemos que necesitaron 42 metros de malla para cercar el terreno. Del diagrama es evidente que se requieren $x+2\,x$ metros de malla para cercar la mitad del terreno, y la mitad de 42 metros es 21 metros.

Entonces,
$$x+2\,x=3\,x=21$$
Y para que la igualdad se cumpla se requiere que $x=7$, porque la igualdad nos dice: «*Pensé un número, lo multipliqué por 3 y obtuve 21*» — Pues debió pensar el número 7.

Otro problema aplicado es el siguiente.

Ejemplo 8

En Monterrey, N.L., un taxi cobra \$7.40 pesos al pedir servicio, más \$4.70 pesos por kilómetro recorrido. Cuando vamos a comprar la despensa de mi casa pagamos \$21.50 pesos. ¿A qué distancia en kilómetros está el supermercado?

- Nuestra incógnita, es decir, el valor que queremos calcular, es la distancia de mi casa al super.
- Vamos a denotar a ese número con la letra x.
- Sabemos que por cada kilómetro que recorre el taxi me cobra \$4.70 pesos más.
- Es decir, si recorre un kilómetro me cobra \$7.40 pesos + \$4.70 pesos más.
- Si recorre dos kilómetros me cobra \$7.40 pesos + (2)(\$4.70) pesos más.
- Y si recorre tres me cobrará: \$7.40 pesos + (3)(\$4.70) pesos más.
- Y así sucesivamente...
- Si recorrió x kilómetros debemos pagar: $7.40+(4.70)(x)$.
- Tuve que pagar \$21.50 pesos, entonces:

$$21.50 = 7.40 + (4.70)(x)$$

- Lo que necesitamos es calcular el valor de x para que se cumpla la igualdad.
- Esta ecuación se resuelve igual que los casos de los ejemplos anteriores.
- Empezamos sumando en ambos lados de la igualdad -7.40:

$$\begin{aligned} 21.50 - 7.40 &= \cancel{7.40} + 4.70 \cdot x - \cancel{7.40} \\ 14.10 &= 4.70 \cdot x \end{aligned}$$

- Ahora dividimos ambos lados de la igualdad entre 4.70:

$$\begin{aligned} \frac{14.10}{4.70} &= \frac{\cancel{4.70} \cdot x}{\cancel{4.70}} \\ 3 &= x \end{aligned}$$

- Entonces, la distancia que hay desde mi casa hasta el supermercado es de 3 kilómetros.
- Ahora vamos a verificar que esto sea correcto:

$$\begin{aligned} P &= 7.40 + 4.70 \cdot x \\ &= 7.40 + (4.70)(3) \\ &= 7.40 + 14.10 \\ &= 21.50 \end{aligned}$$

que es precisamente lo que pagamos al taxista.

Isabel tiene en total \$65.00 pesos en 22 monedas. Algunas monedas son de \$2.00 pesos y las demás son de \$5.00 pesos. ¿Cuántas monedas tiene de cada denominación? **Ejemplo 9**

- Sabemos que tiene en total 22 monedas.
- Si ella tuviera 10 monedas de \$2.00 pesos, las demás, es decir, $22-10=12$ monedas serían de \$5.00 pesos.
- Entonces, si tiene x monedas de \$2.00 pesos, las de \$5.00 pesos serán $22-x$ monedas.

- La cantidad de dinero que tiene en las monedas de \$2.00 pesos es: $2x$.
- La cantidad de dinero que tiene en monedas de \$5.00 pesos es: $5\cdot(22-x)$.
- Y en total sabemos que tiene \$65.00 pesos.
- Si sumamos el dinero que tiene en monedas de \$2.00 pesos con las de \$5.00 pesos obtenemos lo que tiene en total.
- Entonces, la ecuación que modela esta situación es:
$$65 = 2x + 5\cdot(22-x)$$
- Para resolverla empezamos multiplicando por 5 dentro del paréntesis:
$$\begin{aligned} 65 &= 2x + 110 - 5x \\ 65 &= 110 - 3x \end{aligned}$$
- Ahora sumamos en ambos lados de la ecuación: $3x$ para simplificarla:
$$\begin{aligned} 65 + 3x &= 110 - \cancel{3x} + \cancel{3x} \\ 65 + 3x &= 110 \end{aligned}$$
- Ahora sumamos -65 en ambos lados de la igualdad:
$$\begin{aligned} \cancel{65} + 3x - \cancel{65} &= 110 - 65 \\ 3x &= 45 \end{aligned}$$
- Finalmente, dividimos ambos lados de la igualdad entre 3:
$$\begin{aligned} \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{45}{3} \\ x &= 15 \end{aligned}$$
- Recuerda que x representa la cantidad de monedas de \$2.00 pesos que tiene Isabel, entonces, tiene $22-15=7$ monedas de \$5.00 pesos.
- Vamos a verificar que los cálculos sean correctos.
$$\begin{aligned} 65 &= 2x + 5\cdot(22-x) \\ 65 &= 2(15) + 5\cdot(22-15) \\ 65 &= 30 + 5\cdot(7) \\ 65 &= 30 + 35 \end{aligned}$$
- Esto nos indica que el resultado es correcto.

En el ejemplo anterior, si hubieramos encontrado que la solución de la ecuación **no** era un número entero (sí lo es), entonces deberíamos revisar nuestro procedimiento, porque Isabel no puede tener, por ejemplo, 12.33 monedas de \$2.00 pesos.

En caso de que revisaramos el problema y vieramos que el resultado es correcto, entonces podríamos concluir que el problema **no** tiene sentido físico, a pesar de que tiene solución matemática. En otras palabras, el problema está mal planteado. Indicar esto también puede ser la solución a un problema.

Ejemplo 10

David compró 9 manzanas. En el camino a su casa se comió 2 de esas manzanas y el resto las vendió, aumentando el precio en \$4.00 pesos. Finalmente ganó \$4.00 pesos. ¿Cuánto pagó David por cada manzana cuando las compró?

- Queremos saber cuál era el precio inicial de las manzanas.
- Sabemos que compró 9, y se comió 2, por lo que vendió 7 manzanas y todas al mismo precio.
- Supongamos que le costo $\$x$ pesos cada manzana.
- Entonces, como él compró 9, debió pagar: $9x$.
- Sabemos que él aumentó el precio original en \$4.00 pesos para venderlas más caras y recuperar las que ya se había comido.
- El precio al que vendía las manzanas era: $x+4$.
- Pero él vendió 7 de esas manzanas, con lo que obtuvo $7(x+4)$.
- Y con eso ganó \$4.00 pesos. Es decir,

$$\begin{aligned} 7\cdot\text{Precio de venta} &= 9\cdot\text{Precio de compra}+4 \\ 7\cdot(x+4) &= 9\cdot x+4 \end{aligned}$$

- Ahora debemos resolver esta ecuación.
- Empezamos multiplicando por 7 dentro del paréntesis:

$$\begin{aligned} 7(x+4) &= 9x+4 \\ 7x+28 &= 9x+4 \end{aligned}$$

- Ahora sumamos en ambos lados de la igualdad, primero -4 y después $-7x$ para simplificar la ecuación:

$$\begin{aligned} \cancel{7x}+28-4-\cancel{7x} &= 9x+\cancel{4}-\cancel{4}-7x \\ 24=2x &\Rightarrow 2x=24 \end{aligned}$$

- Y esto nos dice en palabras. «*Pensé un número, lo multipliqué por 2 y obtuve 24. ¿Qué número pensé?*» Obviamente, pensó el número 12.
- Entonces, le costaron a \$12.00 pesos cada manzana.
- Vamos a verificar el resultado: si le costaron \$12.00 pesos, él debió pagar en total $(12)(9)=108$ pesos.
- Para venderlas aumentó el precio en \$4.00 pesos, por lo recibía $12+4=16$ pesos por cada manzana que vendía.
- Él vendió solamente 7 de las 9 manzanas, porque él se comió 2, y por las que vendió en total recibió: $(7)(16)=112$ pesos.
- Como pagó 108 pesos por las manzanas, en total ganó $112-108=4$ pesos.

En este último ejemplo, pudimos haber tenido una solución con decimales. En este contexto no tiene caso considerar más de dos decimales, porque cuando contamos dinero, lo más que contamos son centavos, que representan centésimas partes de un peso.

Debes cuidar la forma en como presentas las soluciones de los problemas. En algunos casos la solución del problema **no** es solamente un número, pues se requiere especificar unidades. En el ejemplo anterior, las unidades eran pesos. En otros contextos, el problema te indicará cuáles son las unidades que debes incluir en la solución del problema.

En el siguiente ejemplo se trata de encontrar cuándo dos cantidades se igualan.

Ejemplo 11

Miguel gana actualmente \$8 100.00 pesos mensuales y cada mes tiene un aumento en su salario de \$300.00 pesos. Por otra parte, Javier actualmente gana \$10 400.00, pero su incremento en el salario mensual es de \$200.00 pesos. Javier quiere saber cuántos meses deben pasar para tener un salario igual al de Miguel.

- Primero debemos reconocer que ambos tienen aumento mensual en sus salarios.
- Otra cuestión importante a considerar consiste en que Javier desea conocer la cantidad de tiempo que debe pasar para ganar lo mismo que Miguel.
- Por último, dado que los dos tienen aumento en sus salarios, el tiempo que pase a partir de hoy, será el mismo para ambos..., aunque no tienen los mismos aumentos en cada mes...
- Con esta información en mente, iniciamos:
- Actualmente Miguel gana \$8 100.00 pesos y cada mes aumenta su salario en \$300.00 pesos.
- Si m es el número de meses que han pasado, el nuevo salario para él (M) se calcula sumando $300\,m$ al salario actual.
$$M = 8\,100 + 300\,m$$
- De manera semejante, el salario de Javier aumenta cada mes \$200.00, aunque gana actualmente \$10 400.00 pesos.
- El nuevo salario para él (J), después de m meses, es:
$$J = 10\,400 + 200\,m$$
- Javier quiere conocer cuántos meses (m) deben pasar para que su salario (J) sea igual al salario de Miguel (M):
$$\begin{aligned} J &= M \\ 10\,400 + 200\,m &= 8\,100 + 300\,m \end{aligned}$$
- Nosotros necesitamos calcular el valor de m, es decir, encontrar el número de meses que deben pasar para que los salarios sean iguales.
- Empezamos sumando en ambos lados de la igualdad $-8\,100$:
$$\begin{aligned} 10\,400 + 200\,m - 8\,100 &= \cancel{8\,100} + 300\,m - \cancel{8\,100} \\ 2\,300 + 200\,m &= 300\,m \end{aligned}$$
- Ahora sumamos en ambos lados de la igualdad $200\,m$:
$$\begin{aligned} 2\,300 + \cancel{200\,m} - \cancel{200\,m} &= 300\,m - 200\,m \\ 2\,300 &= 100\,m \end{aligned}$$
- Finalmente, dividimos entre 100 ambos lados de la igualdad y encontramos el valor de la incógnita:
$$\begin{aligned} \frac{2\,300}{100} &= \frac{100\,m}{100} \\ 23 &= m \end{aligned}$$

- Lo que nos indica que deben pasar 23 meses para que ambos tengan el mismo salario.
- Ahora comprobamos que esto sea verdad:
- En 23 meses el salario de Miguel será:

$$\begin{aligned} M &= 8\,100 + 300\,m \\ &= 8\,100 + 300(23) \\ &= 8\,100 + 6\,900 \\ &= 15\,000 \end{aligned}$$

- Por otra parte, el salario de Javier será:

$$\begin{aligned} J &= 10\,400 + 200\,m \\ &= 10\,400 + 200(23) \\ &= 10\,400 + 4\,600 \\ &= 15\,000 \end{aligned}$$

- Entonces, en 23 meses, suponiendo que siguen teniendo el mismo aumento mensual en sus salarios, ambos ganarán $15 000.00 pesos.

Este problema por casualidad tiene una solución entera, pero no necesariamente debe ser así. Si Miguel ganara $8 200, por decir algo, el resultado no sería entero para que ambos ganaran la misma cantidad.

El punto que debes entender aquí consiste en que la solución de una ecuación lineal **no** siempre es un número entero.

También es importante que recuerdes que debes verificar que la solución del problema que has resuelto realmente satisfaga las condiciones del problema.

Muchas de las veces encontramos la solución de un problema y creemos ciegamente que esa solución es correcta, aunque no siempre es así. Por esto, es una buena idea verificar que la solución que hemos encontrado realmente satisface las condiciones que el problema impone.

En caso de que no las satisfaga, lo más sensato es revisar el procedimiento y corregirlo.

También es importante que entiendas un principio muy utilizado en matemáticas. Siempre que tenemos una ecuación lineal distinta a las que ya has resuelto, aplicando las propiedades de los números reales la simplificamos hasta obtener una ecuación lineal parecida a una que ya hayamos resuelto.

Por ejemplo, en el problema de las manzanas de David que se encuenta en la página 116, se modeló con la ecuación:

$$9\,x + 4 = 7(x + 4)$$

la fuimos transformando hasta obtener la ecuación:

$$2\,x = 24$$

que resolvimos con el método del problema de «*pensé un número*».

Pero para transformar una ecuación en la otra solamente utilizamos las propiedades de los números reales y de la igualdad para obtener una ecuación que tenga la misma solución que la primera.

Cuando hacemos eso, decimos que en cada paso obtenemos una ecuación equivalente, porque ambas ecuaciones tiene exactamente la misma solución.

Entonces, las ecuaciones:

$$9x + 4 = 7(x + 4) \qquad \text{y} \qquad 2x = 24$$

son equivalentes porque la solución de ambas ecuaciones es el mismo valor: $x = 12$.

Para verificar que esto es verdad, basta sustituir el valor de su solución en ambas ecuaciones y cada una debe reducirse a una igualdad que es verdadera.

Ejemplo 12

Un comerciante prepara una mezcla vitamínica con dos disoluciones. El precio de la disolución de la vitamína A es de \$14.00 pesos por litro, y el precio de la disolución de la vitamina B es de \$18.00 pesos por litro. Al combinar las disoluciones obtuvo 25 litros una mezcla que tiene un precio de \$15.92 por litro. ¿Cuántos litros de cada disolución utilizó para preparar la mezcla?

- Sabemos que si sumamos los litros de las disoluciones de vitamina A y de vitamina B, en total obtendremos 25 litros.
- Asi que, si se tenía x litros de disolución de vitamina A, los litros de vitamina B son: $25 - x$.
- Los precios de cada disolución se pueden representar en una tabla:

Disolución	Cantidad (L)	Precio (\$/L)
Vitamina A	x	14.00
Vitamina B	$25 - x$	18.00
Mezcla	25	15.92

- Con la información contenida en la tabla es sencillo deducir que el precio de x litros de la disolución de vitamina A es: $14x$ pesos.
- Por otra parte, el precio de $25 - x$ litros de la disolución de vitamina B es: $18 \cdot (25 - x)$ pesos.
- La suma de los anteriores debe ser igual a el precio de los 25 litros de la mezcla: $(25)(15.92) = 398$ pesos.
- Entonces,

$$\begin{aligned} 14x + 18 \cdot (25 - x) &= 398 \\ 14x + 450 - 18x &= 398 \\ -4x + 450 &= 398 \end{aligned}$$

- Ahora podemos sumar en ambos lados de la igualdad $4x$ y después -398:

$$\begin{aligned} -\cancel{4x} + 450 + \cancel{4x} - 398 &= \cancel{398} + 4x - \cancel{398} \\ 52 &= 4x \\ \frac{52}{4} &= \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} \\ 13 &= x \end{aligned}$$

- Esto nos indica que utilizó 13 litros de la disolución de vitamina A y $25 - 13 = 12$ litros de la disolución de la vitamina B para preparar la mezcla.
- Ahora vamos a verificar que la solución satisfaga las condiciones del problema:
  - ✓ Por los 13 litros de vitamina A tenía: $(13)(14) = \$182$ pesos.

✓ Por los 12 litros de vitamina B tenía: $(12)(18) = \$216$ pesos.

✓ En total, los 25 litros de la mezcla, tenía: $182 + 216 = 398$ pesos.

✓ Y cada litro de la mezcla debía costar: $398/25 = 15.92$ pesos.

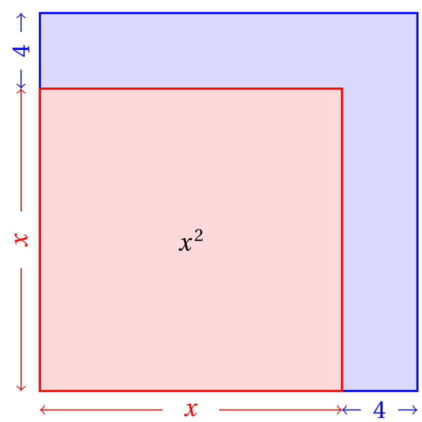
- Como el precio de la mezcla que nos dieron en el problema coincide con el que calculamos a partir del resultado, la solución del problema es correcta.

Cuando la longitud de un cuadrado se aumenta en 4 cm, su área aumenta en 200 cm^2. ¿Cuál es el área del cuadrado inicial?

Ejemplo 13

- Lo que sabemos es que el área aumenta 200 cm^2 cuando las longitudes de sus lados aumentan 4 cm.

- Supongamos que el lado del cuadrado inicial mide x cm, entonces la longitud del lado cuando se aumentaron 4 cm es: $x + 4$.



- El área del cuadrado inicial es: x^2.

- El área del nuevo cuadrado es: $(x + 4)^2$.

- Sabemos que el nuevo cuadrado tiene 200 cm^2 más de área, entonces:

$$\begin{aligned}
\text{Área cuadrado original} + 200 &= \text{Área nuevo cuadrado} \\
x^2 + 200 &= (x+4)^2 \\
\cancel{x^2} + 200 &= \cancel{x^2} + 8x + 16 \\
200 &= 8x + 16 \\
200 - 16 &= 8x \\
\frac{184}{8} &= x = 23
\end{aligned}$$

- Entonces, la longitud de los lados del otro cuadrado es de $23 + 4 = 27$ cm.

- El cuadrado incial tiene un área de: $x^2 = (23)^2 = 529$ cm^2.

- El otro cuadrado tiene un área de: $(x + 4)^2 = (27)^2 = 729$ cm^2.

Ejemplo 14

Un rectángulo tiene 6 metros de largo más que de ancho. Cuando se aumenta su largo en 2 metros y su ancho en 3 metros, el área aumenta 84 metros cuadrados. ¿Cuáles eran las dimensiones del rectángulo antes de aumentar su tamaño?

- Sabemos que originalmente tenía 6 metros más de largo que de ancho.
- Si x es su ancho, el largo será: $x+6$.
- Si se aumenta el largo en 2 metros el rectángulo nuevo tendrá un largo de $(x+6)+2=x+8$.
- Por otra parte, si el ancho se incrementa en tres metros, tendrá: $x+3$.
- El área del nuevo rectángulo rebasa a la del rectángulo original en 84 m^2
- La ecuación que modela la situación actual es:

$$\begin{aligned}\text{Área del rectángulo original} + 84\text{ m}^2 &= \text{Área del nuevo rectángulo}\\ x(x+6)+84 &= (x+3)(x+8)\end{aligned}$$

- Ahora tratamos de simplificar la ecuación:

$$\begin{aligned}x(x+6)+84 &= (x+3)(x+8)\\ \cancel{x^2}+6x+84 &= \cancel{x^2}+11x+24\end{aligned}$$

- La ecuación se simplifica a una lineal:

$$\begin{aligned}6x+84 &= 11x+24\\ 84-24 &= 11x-6x\\ 60 &= 5x\end{aligned}$$

- Esto nos indica que el ancho del rectángulo original era de 12 metros.
- El largo era de $12+6=18$.
- Verifica que la solución satisface las condiciones del problema.

Otro ejemplo que viene de las fracciones algebraicas es el siguiente.

Ejemplo 15

María de Jesús debía comprar x boletos de Monterrey, N.L., a Tampico, Tamps. Cuando llegó a la central de autobuses se encontró con que había un descuento del 40% en el boleto. Ella llevaba \$720.00 pesos para comprar los boletos. Con el descuento ella ahora podía adquirir un boleto más y todavía le sobraban \$72.00 pesos. ¿Cuántos boletos compró y cuánto le costaban sin el descuento?

- Vamos a denotar con la literal x a la cantidad de boletos que ella debía comprar.
- Si cada boleto sin descuento le costaba p pesos, ella debía pagar $p\cdot x=720$ pesos en total.
- Esto nos indica que: $p=\dfrac{720}{x}$.

- Con el descuento ella solamente pagaba: $0.6\,p$, porque le descontaban el 40% del precio.
- Así, ella podía comprar un boleto más, es decir, un total de $(x+1)$ boletos.
- Y le sobrarían \$72.00 pesos.
- Esta situación se modela con la siguiente ecuación:

$$(0.6\,p)(x+1)+72=720$$

- De esta ecuación podemos despejar el valor de p:

$$\begin{aligned}
(0.6\,p)(x+1) &= 720-72\\
p &= \frac{648}{0.6(x+1)}=\frac{648}{\left(\frac{6}{10}\right)(x+1)}\\
&= \frac{(648)(10)}{(6)(x+1)}\\
&= \frac{6480}{6(x+1)}\\
&= \frac{1\,080}{x+1}
\end{aligned}$$

- En todo este desarrollo, hemos supuesto que el precio de cada boleto sin descuento es p pesos.
- Esto nos permite igualar ambos valores de p: dado que son el mismo, son iguales.

$$\begin{aligned}
p=\frac{720}{x} &= \frac{1\,080}{x+1}\\
720(x+1) &= 1\,080\,x\\
720\,x+720 &= 1\,080\,x\\
720 &= 1\,080\,x-720\,x\\
720 &= 360\,x\\
x &= \frac{720}{360}=2
\end{aligned}$$

- Entonces, la solución de la ecuación es: $x=2$.
- Es decir, María de Jesús debía comprar 2 boletos.
- Vamos a hacer la comprobación:

Comprobación

✓ Como ella llevaba \$720.00 pesos y debía comprar dos boletos, cada uno le costaba $\$720.00\div 2=\$360.00$ pesos.

✓ Le ofrecieron el 40 % de descuento, por lo que cada boleto le íba a costar: $(0.6)(\$360)=\$216.00$ pesos.

✓ Si hubiera comprado 3 boletos a ese precio debía pagar: $(3)(\$216.00)=\$648.00$ pesos.

✓ Como ella llevaba \$720.00 pesos le sobraban: $\$720.00-\$648.00=\$72.00$ pesos.

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones. En los problemas aplicados, primero encuentra la ecuación que modela cada situación y resuélvela. Ten ciudado con la interpretación del resultado de la ecuación.

Ejercicios 3.1

1) $8x+2=-14$ **R.** $x=-2$

2) $9x-1=-37$ **R.** $x=-4$

3) $5x+9=-11$ **R.** $x=-4$

4) $4x+3=-5$ **R.** $x=-2$

5) $x+9=13$ **R.** $x=4$

6) $7x-5=-26$ **R.** $x=-3$

7) $x-3=1$ **R.** $x=4$

8) $7x-7=-21$ **R.** $x=-2$

9) $2x-3=5$ **R.** $x=4$

10) $5x+12=8x$ **R.** $x=4$

11) $3x-28=-4x$ **R.** $x=4$

12) $8x-18=-x$ **R.** $x=2$

13) $2x-20=-3x$ **R.** $x=4$

14) $9x-15=4x$ **R.** $x=3$

15) $6x-9=-3x$ **R.** $x=1$

16) $x+20=6x$ **R.** $x=4$

17) $8x-68=-9x$ **R.** $x=4$

18) $3x-10=-2x$ **R.** $x=2$

19) $5x-8=x$ **R.** $x=2$

20) $2x+12=7+7x$ **R.** $x=1$

21) $9x-30=6-9x$ **R.** $x=2$

22) $7x+11=9+8x$ **R.** $x=2$

23) $3x-16=8-5x$ **R.** $x=3$

24) $9x-12=3+4x$ **R.** $x=3$

25) $4x-19=8-5x$ **R.** $x=3$

26) $9x-12=4+x$ **R.** $x=2$

27) $5x-18=3-2x$ **R.** $x=3$

28) $2x+7=21$ **R.** $x=7$

29) $3x+4=5^2$ **R.** $x=7$

30) $5x-1=7x-5$ **R.** $x=2$

31) $3x+4=4x-8$ **R.** $x=12$

32) $7x-9=9x-31$ **R.** $x=11$

33) $3(x+1)=2(2x-3)$ **R.** $x=9$

34) $8x+1=3(x+4)+4$ **R.** $x=3$

35) Pensé un número. Lo multipliqué por siete, al resultado sumé nueve y finalmente obtuve cien. ¿Qué número pensé? 13

36) Las edades de Ana y su sobrina Isabel suman 40 años. Ana tiene el triple de años que Isabel. ¿Qué edad tiene cada una? Isabel: 10 años, Ana: 30 años.

37) Un padre y su hijo suman sus edades y obtienen 50 años. El padre tiene 30 años más que su hijo. ¿Qué edad tiene cada uno? Padre: 40 años, hijo: 10 años.

38) Un coleccionista tiene 45 estampillas postales. Los costos indicados de las estampillas son de $5.00 y $7.00 pesos. ¿Cuántas estampillas de cada tipo tiene si los costos indicados en las estampillas asciende a un total de $269.00 pesos? 23 estampillas de $5.00 y 22 estampillas de $7.00 pesos.

39) En un taller mecánico hay x coches. Cada coche tiene 5 llantas exactamente (4 que usa y una de refacción). Calcula cuántos coches hay en el taller mecánico, sabiendo que hay en total 115 llantas. **R.** Hay 23 coches

40) Eliú debe $17.00 pesos al tendero. Debe comprar refrescos que cuestan, cada uno, $12.50 pesos. Si él sabe que le alcanza con $104.50 pesos para pagar todo, ¿cuántos refrescos planea comprar? **R.** 7 refrescos.

41) Un coche avanza con una velocidad constante de 60 km/h**R.** Escribe la ecuación que nos ayuda a calcular la distancia D recorrida por ese coche t horas después de haber comenzado su recorrido. **R.** $D=60\,t$ [km]

42) La cantidad de calorías que contiene una tortilla depende de la cantidad de gramos que pesa la tortilla y del tipo de maíz del cual se elaboró. Suponiendo que 100 gramos de tortillas de maíz amarillo tienen 325 calorías, encuentra una ecuación que ayuda a calcular las calorías C que ingiere una persona que come x tortillas en una ración, si cada tortilla pesa 25 gramos. **R.** $C=81.25\,x$

43) Dos libros juntos pesan 2 500 gramos. El más pesado tiene 500 gramos más que el primero. ¿Cuánto pesa cada libro? 1 500 gr, 1 000 gr.

44) En una lista de 120 ejercicios, los problemas aplicados son el doble de los ejercicios de práctica. ¿Cuántos ejercicios son de cada tipo? 40 de práctica, 80 problemas aplicados.

45) Cierta compañía de transporte urbano, cobra $120.00 pesos por brindar el servicio, más $17.35 pesos por kilómetro recorrido. Por un viaje cobró $900.75 pesos. ¿Qué tan largo fue el viaje? **R.** 45 km

46) Una compañía de mensajería y paquetería cobra $35.85 pesos por envío más un cargo de $127.45 pesos por cada kilogramo extra. Por un paquete Pablo pagó $3 274.35 pesos. ¿Cuántos kilogramos extra tenía su paquete? **R.** 25.50 kg

47) Un laboratorista desea preparar una disolución del compuesto A con una concentración del 36%. Él tiene un matraz con 1 L de ese compuesto al 100% de concentración que desea utilizar para agregar x mL de esa solución a otro matraz que contiene 2400 mL de solución de ese compuesto al 20%. ¿Cuál es el valor de x que resuelve el problema al laboratorista? **R.** $x=600$ ml.

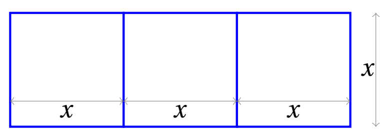
48) Un estudiante debe preparar 100 ml de un ácido al 22% a partir de dos muestras. La primera muestra tiene una concentración del 15%. La segunda muestra tiene una concentración del 25%. ¿Cuántos mililitros debe utilizar de cada muestra de ácido para obtener el ácido que debe preparar? 30 ml de ácido al 15% y 70 ml de ácido al 25%.

49) Una empresa fabrica sillas. Producir una silla le cuesta \$135.00 pesos, y las vende a \$225.00 pesos. Además tiene un costo fijo (luz, teléfono, agua, salarios, etc.) de \$45,000.00 pesos mensuales. ¿Cuántas sillas debe vender para satisfacer los costos fijos y de producción y a partir de entonces, empezar a tener alguna utilidad? 500 sillas.

50) Las longitudes de los lados de un triángulo son números enteros consecutivos. Si su perímetro es de 78 cm, ¿Cuáles son las dimensiones de sus lados? 25, 26 y 27 cm.

51) El largo de un terreno tiene 15 metros más que su ancho. Para cercarlo, se necesitaron de 510 metros de cerca. ¿Cuáles son las dimensiones de ese terreno? 120 m × 135 m.

52) Un terreno rectangular tiene el triple de largo que de ancho. Para hacer 3 divisiones internas y cercarlo completamente se ocuparon 50 metros de malla ciclónica de alambre. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno? 5 m × 15 m.



53) Cuando la longitud de un cuadrado se aumenta en 2 cm, su área aumenta en 100 cm^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado inicial? 24 cm.

3.1.2 Ec. de primer grado y la función lineal

Como has visto en la sección anterior, en los problemas aplicados tenemos cantidades que dependen una de otra.

Por ejemplo, cuando vamos a comprar varios kilogramos de azúcar, si un kilogramo cuesta $13.00 pesos, la cantidad que debemos pagar por el azúcar que compremos depende del número de kilogramos que compremos de acuerdo a la siguiente relación:

$$P = 13\,x$$

donde P es la cantidad de pesos que debemos pagar y x representa el número de kilogramos de azúcar que compramos.

Cuando tenemos una relación como la anterior, decimos que una cantidad depende de la otra, o que es función, una cantidad de la otra.

En el caso de la ecuación anterior, el valor de P depende del valor de x, o bien, P está en función de x.

Las funciones son objetos matemáticos que nos indican cómo están relacionadas dos o más variables.

Una función es lineal cuando tiene la siguiente forma:

$$y = m\,x + b$$

donde tanto m como b son constantes y las literales y, x son variables o incógnitas.

El adjetivo «*lineal*» viene del hecho de que si graficamos la función en un sistema de coordenadas x, y, obtenemos una línea recta.

En la lista de ejercicios de la sección anterior algunas respuestas son funciones. Por ejemplo,

Un coche avanza con una velocidad constante de 60 km/hr. Escribe la ecuación que nos ayuda a calcular la distancia D recorrida por ese coche t horas después de haber comenzado su recorrido.	**Ejercicio**

La respuesta a este ejercicio es: $D = 60\,t$, si la distancia se mide en kilómetros.

Otro ejercicio que tiene por respuesta una función es el siguiente:

La cantidad de calorías que contiene una tortilla depende de la cantidad de gramos que pesa la tortilla y del tipo de maíz del cual se elaboró. Suponiendo que 100 gramos de tortillas de maíz amarillo tienen 325 calorías, encuentra una ecuación que ayuda a calcular las calorías C que ingiere una persona que come x tortillas en una ración, si cada tortilla pesa 25 gramos.	**Ejercicio**

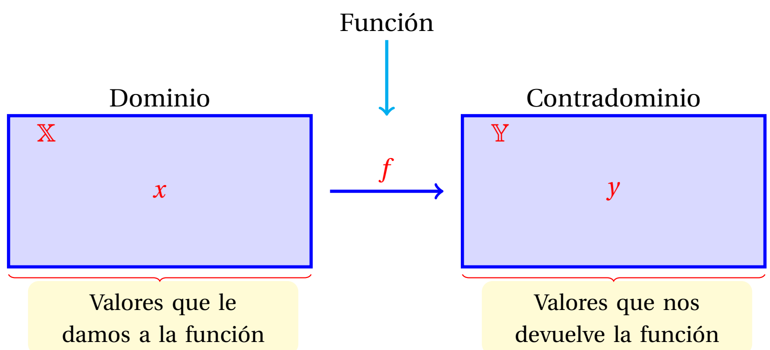
Y la respuesta a este ejercicio es: $C = 81.25\,x$. En este caso, la variable C que representa la cantidad de calorías que ingiere una persona, depende de la variable x, que representa la cantida de tortillas que ingiere esa persona. La variable C en este ejemplo es la *variable dependiente*, porque su valor depende del valor que tome x. Por otra parte, la variable x no depende de nadie, salvo del valor que queramos darle, por eso se dice que esta es la *variable independiente*.

Podemos pensar en una función como una máquina que transforma números: nosotros le damos un número y la función nos devuelve otro. Pero esa máquina debe devolvernos a lo más un único valor por cada valor que nosotros le demos.

Nosotros podemos darle muchos valores, aunque tal vez algunos no los pueda transformar. Es decir, tal vez no nos devuelva un valor cuando sustituyamos un valor específico. Al conjunto de valores que nosotros le podemos dar, le llamaremos *dominio* de la función.

La función nos estará devolviendo valores conforme nosotros le vayamos dando algunos valores. Al conjunto de valores que la función nos devuelve lo llamaremos *contradominio* de la función.

El siguiente diagrama puede ayudarte a entender mejor el concepto de función:



En este diagrama el dominio de la función se denota por el símbolo: $\mathbb{X}$, mientras que el contradominio se denota por el símbolo: $\mathbb{Y}$, y la función está representada por la literal: f.

Observa que la flecha va del conjunto $\mathbb{X}$ al conjunto $\mathbb{Y}$, indicando que la función toma valores del primer conjunto (dominio) y nos devuelve los valores del segundo conjunto (contradominio).

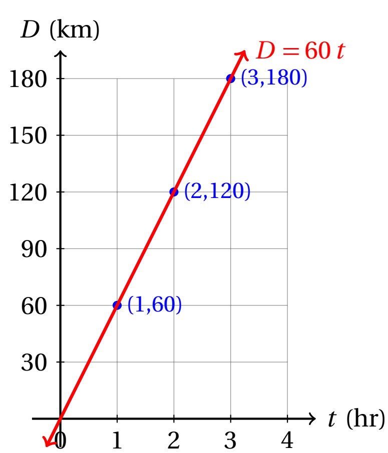
3.1.3 Interpretación gráfica (función lineal)

Considerando el problema:

Problema Un coche avanza con una velocidad constante de 60 km/hr. Escribe la ecuación que nos ayuda a calcular la distancia D recorrida por ese coche t horas después de haber comenzado su recorrido.

La respuesta sabemos que es: $D = 60\,t$, si la distancia se mide en kilómetros.

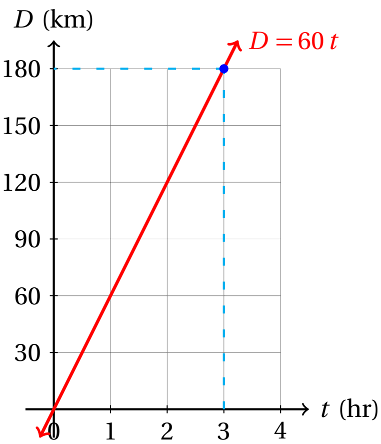
Si graficamos esta ecuación, asignando distintos valores a t y calculando sus respectivos valores para D, obtenemos:



Si nosotros deseamos conocer la distancia que ha recorrido en una cantidad de horas, por ejemplo, en 3 horas, podemos encontrar la respuesta en la gráfica.

Para esto, simplemente colocamos el lápiz en el eje del tiempo (dato que conocemos) y a partir del punto $(3,0)$ movemos verticalmente la punta del lápiz hasta cortar a la recta. A partir de ese punto movemos el lápiz hacia la izquierda hasta cortar el eje vertical (D).

El punto donde se corta a este eje representa la distancia que ha recorrido.



Por otra parte, si conocemos la distancia que recorrió y queremos saber cuánto tiempo requiere para avanzarla, empezamos del eje vertical y moviendo el lápiz horizontalmente (paralelo al eje t), hasta cortar la recta, empezamos a mover el lápiz verticalmente hasta cortar el eje horizontal (t).
El punto donde se corte representa el tiempo que necesitábamos encontrar.
Esta forma de resolver ecuaciones se conoce como el método gráfico, porque utilizamos una gráfica.

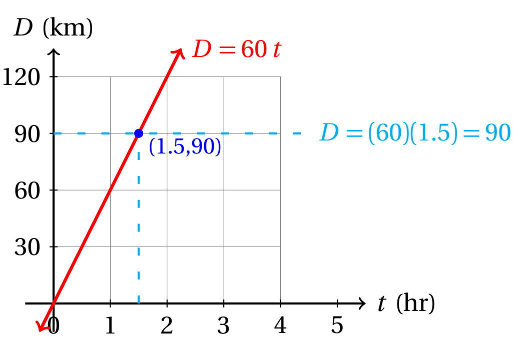
En matemáticas podemos decir que el punto donde se corta al eje (usando la gráfica) es una representación geométrica de la solución de una ecuación lineal.

Cuando hacemos la pregunta: «*¿Cuántas horas deben pasar para recorrer 90 km?*», geométricamente estamos dibujando una recta que corta al eje D en el punto $D = 90$, que representa una distancia de 90 kilómetros.

Cuando encontramos la intersección con la recta $D = 60\,t$ estamos encontrando el punto que satisface a ambas condiciones simultáneamente: (a) que la distancia recorrida sea 90 km, y (b) que el recorrido se haga a una velocidad constante de 60 km/h.

Al encontrar la intersección con el eje t, estamos resolviendo la pregunta anterior.

De manera semejante, podemos resolver la pregunta: «*¿Qué distancia recorrió 1.5 horas después de iniciado el viaje?*» En este caso empezamos dibujando una recta vertical (perpendicular al eje t) hasta que corte a la recta $D = 60\,t$. Después movemos el lápiz horizontalmente hasta cortar el eje D.



La solución gráfica de las ecuaciones algunas veces no es fácil de resolver. Además, no nos da la respuesta exacta, como es el caso de la solución algebraica. Y por si esto fuera poco, generalmente requiere más tiempo resolver una ecuación lineal por este método. Por estas razones es más común resolver las ecuaciones lineales por el método algebraico.

Entonces, ¿por qué tomarnos la molestia de estudiar este tema? Pues este método es de ayuda para algunos tipos de ecuaciones que no son lineales, además de que nos ayudan a intepretar las soluciones de las ecuaciones. Esto nos indicará cuándo algunas ecuaciones no tengan soluciones.

Puedes fácilmente encontrar el dominio de una función lineal. Dado que la función lineal es de la forma:

$$y = m\,x + b$$

Esta máquina para transformar números puede transformar cualquier número, dado que siempre podemos multiplicar un número cualquiera por m y al resultado sumarle b. Esto nos indica que puede transformar cualquier número. Por esto decimos que el dominio de la función lineal es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

Es muy sencillo verificar que el contradominio de la función lineal (siempre y cuando $m \neq 0$) también es el conjunto de los números reales, para eso puedes pensar en la gráfica de una recta que no sea vertical.

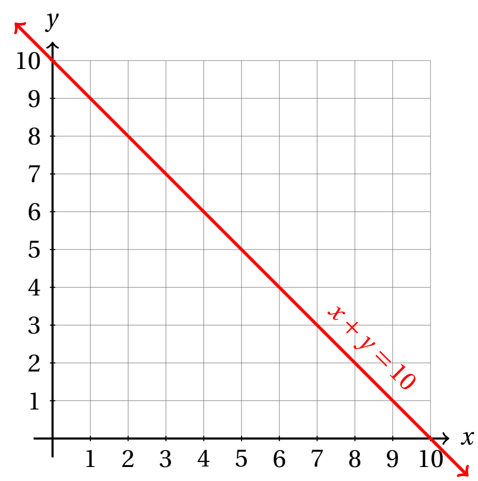
Por cierto, una recta horizontal sí es una función, pero una recta horizontal no lo es.

¿Puedes explicar por qué?

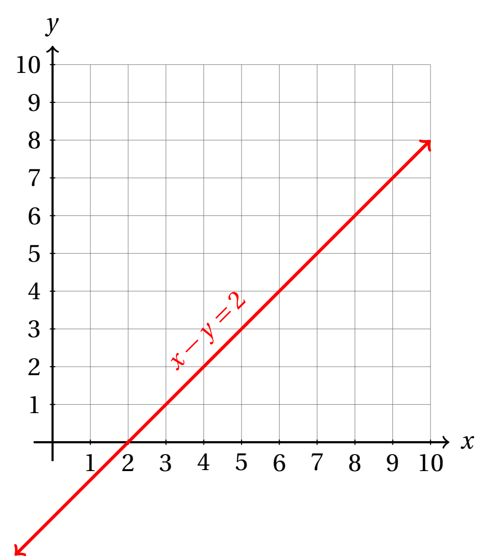
3.2 Sistemas de Ecuaciones lineales (2 incógnitas)

Como ya observaste, una ecuación lineal puede tener más de una variable, y en casos de dos variables, podemos graficar la ecuación en un plano cartesiano.

Por ejemplo, la ecuación: $x + y = 10$, en el plano cartesiano se grafica así:

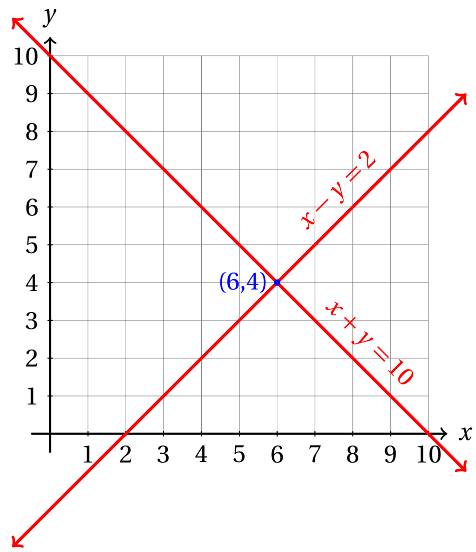


Mientras que la ecuación $x - y = 2$, gráficamente se representa así:



Si consideramos ambas ecuaciones graficadas en el mismo plano cartesiano tendremos dos rectas que se cortan en un solo punto, dado que las rectas evidentemente no son paralelas.

El punto donde se intersectan las dos rectas pertenece a ambas rectas. Y debido a que pertenece a la primera recta, sus coordenadas deben satisfacer la primera ecuación, y por pertenecer a la segunda ecuación, debe satisfacer la segunda ecuación también. Es decir, ese punto donde se intersectan las rectas satisface ambas ecuaciones (por eso pertenece a ambas rectas).



Ahora podemos considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y &= 10 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

y al sustituir los valores $x=6$, $y=4$, vemos que las dos ecuaciones se satisfacen. Esto era de esperarse, dado que ese punto pertenece a las gráficas de ambas ecuaciones, y como ya habíamos dicho, satisfacen a ambas ecuaciones.

Entonces, podemos decir que este conjunto de valores es la solución del sistema de ecuaciones. En efecto,

$$\begin{aligned} x+y &= 10 \quad \Rightarrow \quad 6+4=10 \\ x-y &= 2 \quad \Rightarrow \quad 6-4=2 \end{aligned}$$

En conclusión, la solución del sistema de ecuaciones lineales (que abreviaremos con las siglas: S.E.L.) es: $x=6$, $y=4$.

3.2.1 Métodos algebraicos para resolver S.E.L.

Existen varios métodos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales. En este curso estudiaremos los más comunes.

Antes de iniciar con el estudio de los métodos algebraicos, damos la siguiente definición:

Definición 1 Solución de un S.E.L.
Es el conjunto de valores que se debe sustituir en las variables de un S.E.L. para que cada una de las ecuaciones se reduzca a una igualdad verdadera.

En el programa de estudio de la Dirección General de Bachillerato se sugieren los siguientes:

- ✓ Eliminación, también conocido como Suma y Resta,
- ✓ Sustitución,
- ✓ Igualación, y finalmente

✓ Determinantes.

Estrictamente hablando, ya se introdujo el método más laborioso, que consiste en la graficación de las dos ecuaciones y encontrar el punto donde se intersectan. Este método se conoce como el método gráfico.

La desventaja de este método consiste en que la solución no siempre son números enteros, y en estos casos, lo más que podemos es hacer una aproximación a la solución del S.E.L.

Con los métodos algebraicos siempre obtenemos el valor exacto de la solución del sistema de ecuaciones lineales, sean enteros o no.

MÉTODO DE ELIMINACIÓN

Este método es de los más sencillos. Empezamos observando el S.E.L. Si es posible sumar las ecuaciones para obtener otra nueva ecuación con una incógnita menos, sumamos.

Ejemplo 1

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

- Si sumamos las dos ecuaciones obtenemos una sola ecuación con una sola incógnita, porque la literal y tiene el mismo coeficiente, pero con signo cambiado:

$$\begin{array}{rcl} x + \cancel{y} &=& 10 \\ x - \cancel{y} &=& 2 \\ \hline 2x \quad &=& 12 \end{array}$$

- Esta ecuación lineal con una incógnita es tan fácil de resolver que la traduciremos: «*Pensé un número, lo multipliqué por 2 y obtuve 12, ¿qué número pensé?*» Obviamente pensó el número 6. Entonces, $x = 6$.

- Para encontrar el valor de y podemos multiplicar por -1 cualquiera de las dos ecuaciones (elegimos multiplicar la segunda ecuación) y obtenemos un S.E.L. equivalente:

$$\begin{array}{rcl} \cancel{x} + \; y &=& 10 \\ -\cancel{x} + \; y &=& -2 \\ \hline 2y &=& 8 \end{array}$$

- En palabras, esta última ecuación nos dice: «*Pensé un número, lo multipliqué por 2 y obtuve 8, ¿qué número pensé?*» Sí, pensó el número 4. Entonces, $y = 4$.

- Y la solución del S.E.L., es: $x = 6$, $y = 4$.

- Se te queda como ejercicio verificar que la solución es correcta.

Esta solución no debe causar sorpresa alguna, dado que ya la conocíamos, pues resolvimos este mismo sistema por el método gráfico.

Sin embargo, no todos los S.E.L. que encontraremos podrán resolverse simplemente sumando las ecuaciones. Algunas veces necesitaremos encontrar algún factor que nos ayude con los coeficientes de una variable para que sean iguales y con signo contrario.

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ x - 2\,y &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

- Primero observamos que los coeficientes de la variable y tienen signos cambiados.
- Podemos empezar buscando un número que multiplicado por una ecuación iguale al coeficiente de la otra ecuación.
- Vamos a multiplicar la primera ecuación por 2 para obtener:

$$2\,x + 2\,y = 12$$

- Ahora hemos transformado nuestro problema inicial a otro problema equivalente que sí sabemos como resolver, porque el ejemplo anterior representó uno de estos casos:
- Cuando sumamos las ecuaciones una de las variables se «*eliminó*»:

$$\begin{array}{r} 2\,x + \cancel{2\,y} = 12 \\ x - \cancel{2\,y} = 0 \\ \hline 3\,x = 12 \end{array}$$

- Y la última ecuación implica: $x = 4$.
- Para encontrar el valor de y podemos multiplicar la segunda ecuación por -1, así cambiamos el signo del coeficiente de x de esta ecuación:

$$\begin{array}{r} \cancel{x} + y = 6 \\ -\cancel{x} + 2\,y = 0 \\ \hline 3\,y = 6 \end{array}$$

- Que implica: $y = 2$.
- Por tanto, la solución del S.E.L. es: $x = 4$, $y = 2$.
- Ahora verificamos que la solución es correcta:

$$\begin{aligned} x + y &= 6 & \Rightarrow 4 + 2 &= 6 \\ x - 2\,y &= 0 & \Rightarrow 4 - 2(2) &= 0 \end{aligned}$$

En otros casos, tendremos los coeficientes de todas las variables con el mismo signo, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ x + 2\,y &= 0 \end{aligned}$$

- En este caso primer multiplicamos por -1 cualquiera de las dos ecuaciones: así tenemos los coeficientes de la variable x iguales con signo contrario:

$$\begin{array}{r} -\cancel{x} - y = -6 \\ \cancel{x} + 2\,y = 0 \\ \hline y = -6 \end{array}$$

- Para encontrar el valor de x necesitamos «*eliminar*» la variable y.
- Vamos a multiplicar la primera ecuación por -2, así los coeficientes de esta variable son iguales y de signo cambiado:

$$\begin{array}{rcr} -2x - 2y & = & -12 \\ x + 2y & = & 0 \\ \hline -x \quad\quad & = & -12 \end{array}$$

- Multiplicando por -1 ambos lados de la última igualdad obtenemos: $x = 12$.
- La solución de este S.E.L. es: $x = 12$, $y = -6$
- Ahora comprobamos la solución:

$$\begin{array}{rcl} x + y = 6 & \Rightarrow & 12 - 6 = 6 \\ x + 2y = 0 & \Rightarrow & 12 - 2(6) = 0 \end{array}$$

Y en otros casos se requerirá multiplicar ambas ecuaciones para poder «*eliminar*» una de las variables.

Resuelve:

$$\begin{array}{l} 3x + 2y = 13 \\ 2x + 3y = 12 \end{array}$$

Ejemplo 4

- En este caso, la única posibilidad de resolver este problema[1] es multiplicar la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por 3.
- Así obtenemos en los coeficientes de la variable x del S.E.L. equivalente 6 en ambas ecuaciones.
- Solamente quedará pendiente quién será la que tenga coeficiente negativo.
- Elegimos multiplicar por -2 la primera ecuación y por 3 la segunda:

$$\begin{array}{rcr} -\cancel{6x} - 4y & = & -26 \\ \cancel{6x} + 9y & = & 36 \\ \hline 13y & = & 26 \end{array}$$

- Dividiendo ambos lados de la última igualdad entre 13, obtenemos el valor de la variable y

$$\frac{\cancel{13}y}{\cancel{13}} = \frac{26}{13} \qquad \Rightarrow \qquad y = 2$$

- Ahora vamos a «*eliminar*» la variable y para encontrar el valor de x
- Para esto, multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por -2:

$$\begin{array}{rcr} 9x + \cancel{6y} & = & 39 \\ -4x - \cancel{6y} & = & -24 \\ \hline 5x \quad\quad & = & 15 \end{array}$$

- De la última igualdad inmediatamente obtenemos: $x = 3$

[1] Podemos resolverlo también multiplicando por alguna fracción una de las ecuaciones, pero este método involucra operaciones con fracciones y no es el más sencillo.

- La solución es: $x = 3$, $y = 2$
- Ahora verificamos que la solución sea correcta:

$$\begin{array}{lcl} 3x + 2y = 13 & \Rightarrow & 3(3) + 2(2) = 13 \\ 2x + 3y = 12 & \Rightarrow & 2(3) + 3(2) = 12 \end{array}$$

Ejemplo 5

Resuelve:

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 0 \\ 4x + 3y = 1 \end{array}$$

- Ahora vamos a tener que multiplicar ambas ecuaciones por coeficientes que igualen los coeficientes de la variable que deseemos «*eliminar*».
- Para empezar vamos a eliminar la variable y, para así encontrar el valor de x.
- Así que vamos a multiplicar la primera ecuación por -3 y la segunda por 2:

$$\begin{array}{rcr} -9x - \cancel{6y} & = & 0 \\ 8x + \cancel{6y} & = & 2 \\ \hline -x \qquad & = & 2 \end{array}$$

- Entonces, $x = -2$
- Para encontrar el valor de y debemos eliminar la otra variable (x).
- Ahora vamos a multiplicar la primera ecuación por -4 y a la segunda por 3:

$$\begin{array}{rcr} -\cancel{12x} - 8y & = & 0 \\ \cancel{12x} + 9y & = & 3 \\ \hline y & = & 3 \end{array}$$

- Y la solución del S.E.L. es: $x = -2$, $y = 3$.

$$\begin{array}{lcl} 3x + 2y = 0 & \Rightarrow & 3(-2) + 2(3) = 0 \\ 4x + 3y = 1 & \Rightarrow & 4(-2) + 3(3) = 1 \end{array}$$

Recuerda que no todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución.

Cuando tengas un S.E.L. sin solución, este método puede causar que te confundas. El siguiente es uno de esos ejemplos, para que sepas qué hacer en esos casos.

Ejemplo 6

Resuelve:

$$\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 4x + 4y = 10 \end{array}$$

- Empezamos observando que si multiplicamos por -4 la primera ecuación podemos «*eliminar*» x de ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{rcr} -\cancel{4x} - \cancel{4y} & = & -8 \\ \cancel{4x} + \cancel{4y} & = & 10 \\ \hline 0 & = & 2 \end{array} \qquad \text{(Falso)}$$

- Pero esto **no** tiene sentido, porque $0 \neq 2$.
- Y es que en realidad no tiene sentido buscar el punto donde se intersectan dos rectas que son paralelas y que no son la misma recta.
- En conclusión, el S.E.L. **no** tiene solución.

Sin embargo, existe otro caso: el S.E.L. con un número infinito de soluciones.

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 4\,x + 4\,y &= 8 \end{aligned}$$

Ejemplo 7

- En este caso solamente ha cambiado el número 10 que estaba a la derecha de la segunda igualdad por un 8.
- Si aplicamos el mismo procedimiento que usamos en el ejemplo anterior obtenemos:

$$\begin{array}{r} -\cancel{4x} - \cancel{4y} = -8 \\ \cancel{4x} + \cancel{4y} = 8 \\ \hline 0 = 0 \end{array} \qquad \text{(Cierto)}$$

- Y la última igualdad es verdadera.
- Lo que pasa en este caso es que una ecuación es múltiplo de la otra, es decir, ambas ecuaciones son equivalentes.
- En efecto, si multiplicamos la primera ecuación por 4, obtenemos la segunda ecuación.
- En el ejemplo anterior, cuando el S.E.L. no tenía soluciones, al multiplicar por 4 la primera ecuación obtenemos una ecuación que era igual en los coeficientes de las variables, pero en el lado derecho de la igualdad los valores eran distintos.
- Las ecuaciones en ese caso, a pesar de que sus gráficas son rectas paralelas, **no** son equivalentes, por eso obtenemos la igualdad de dos cosas distintas.
- En el caso de un S.E.L. con un número infinito de soluciones, dado que ambas ecuaciones son equivalentes, si un punto satisface a una de las ecuaciones, debe satisfacer a la otra también, porque, por ser equivalentes, deben tener el mismo conjunto de puntos por solución.
- En ambos casos hablamos de rectas paralelas.

Nota que un S.E.L. puede:

A. No tener solución, es decir, tener cero soluciones, o

B. Tener una única solución, es decir, tener exactamente una solución, o

C. Tener un número infinito de soluciones, es decir, muchos puntos que satisfacen a ambas ecuaciones, simplemente porque al graficar las ecuaciones obtenemos la misma recta.

Es importante que entiendas que **no** es que la solución del S.E.L. sea infinito. Recuerda que la solución de un S.E.L. consiste en el *conjunto de valores* que debemos dar a las variables para que las ecuaciones se reduzcan a igualdades verdaderas.

Infinito **no** es un *conjunto de valores*. Es simplemente una expresión que nos indica que algo no tiene fin.

En este último caso tenemos un número infinito de soluciones. Cada una de esas soluciones debe especificar dos valores, uno para cada variable.

Si un punto satisface una de las ecuaciones, también va a satisfacer a la otra ecuación, si es que el S.E.L. tiene un número infinito de soluciones.

En este caso, las soluciones pueden encontrarse usando cualquiera de las ecuaciones. Por ejemplo, podemos tomar la primera ecuación: $x + y = 2$, y reescribirla como: $y = 2 - x$.

A partir de esta ecuación, si conocemos el valor de x, podemos encontrar el valor que le corresponde a y para que satisfaga la ecuación. En otras palabras, hemos escrito la ecuación en forma de una función: damos el valor de x a la función, y ésta nos devuelve un valor, que corresponde a y para que satisfaga a la ecuación: $x + y = 2$.

Ejemplo 8 Un bote recorre 1.8 kilómetros río arriba en 9 minutos. De regreso el bote requiere de 6 minutos solamente. ¿Cuál es la velocidad de la corriente del río?

- En el recorrido de regreso (río abajo), la corriente del río le ayuda a avanzar más rápido, por eso tarda menos.
- Para resolver este problema debemos recordar que para encontrar la velocidad promedio dividimos la distancia recorrida entre el tiempo que requirió.
- La velocidad promedio en la ida (río arriba) es igual a la distancia (1.8 km) entre el tiempo (9 min):

$$v_{\text{ida}} = \frac{1\,800\text{ m}}{9\text{ min}} = 200\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

- Y esta velocidad es igual a la velocidad del bote en aguas tranquilas menos la velocidad de la corriente.
- Vamos a denotar por b la velocidad del bote en aguas tranquilas, y
- r la velocidad de la corriente del río.
- Entonces,

$$b - r = 200$$

- Esta es nuestra primera ecuación.
- La otra ecuación contendrá la información del regreso:
- Podemos encontrar la velocidad a la que viajó río abajo dividiendo la distancia entre el tiempo:

$$v_{\text{reg}} = \frac{1\,800\text{ m}}{6\text{ min}} = 300\,\frac{\text{m}}{\text{minuto}}$$

- Y esta velocidad es igual a la velocidad del bote más la velocidad de la corriente del río:

$$b + r = 300$$

- Ahora debemos resolver este S.E.L.:

$$\begin{aligned} b - r &= 200 \\ b + r &= 300 \end{aligned}$$

- Para empezar sumamos las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r}
b - \cancel{r} = 200\\
b + \cancel{r} = 300\\
\hline
2\,b \qquad = 500
\end{array}$$

- Esto indica que: $b = 250$ metros/minuto.
- Para encontrar r podemos eliminar la otra variable multiplicando la segunda ecuación por -1:

$$\begin{array}{r}
-\cancel{b} + \quad r = -200\\
\cancel{b} + \quad r = \quad 300\\
\hline
2\,r = \quad 100
\end{array}$$

- Es decir, $r = 50$ metros/minuto.
- Verificamos que se cumplen las condiciones del problema.
- Río arriba la corriente hacia parecer que el bote viajaba a $250 - 50 = 200$ metros/minuto.
- Para recorrer 1 800 metros requiere 9 minutos, ya que viaja 200 metros cada minuto.
- Río abajo, la corriente hacia parecer que el bote viajaba a $250 + 50 = 300$ metros/minuto.
- Para recorrer 1 800 metros de regreso se necesitan 6 minutos a esa velocidad.

3.2.2 Método de Sustitución

El nombre de este método nos indica qué es lo que vamos a hacer: para resolver el S.E.L. de dos ecuaciones con dos incógnitas vamos a «*despejar*» una de las incógnitas de una de las ecuaciones, vamos a sustituir este despeje en la otra ecuación y así tenemos un problema de una ecuación lineal con una incógnita. Después resolvemos esta ecuación lineal y encontramos el valor de una de las variables.

Para encontrar el otro valor podemos sustituir el valor de la variable conocida en el despeje que hicimos antes y terminamos.

El siguiente ejemplo te muestra el procedimiento.

Ejemplo 1

Resuelve:

$$\begin{aligned}
x + y &= 10\\
x - y &= \ \ 2
\end{aligned}$$

- Este ejemplo es el primero que estudiamos con el método de eliminación, así que ya conocemos la solución de este sistema: $x = 6$, $y = 4$.
- Primero vamos a despejar una variable de alguna de las ecuaciones.
- Vamos a despejar y de la primera ecuación.
- Para esto, sumamos en ambos lados de la primera ecuación $-x$, y así obtenemos:

$$\begin{aligned}
-\cancel{x} + \cancel{x} + y &= 10 - x\\
y &= 10 - x
\end{aligned}$$

- Ahora utilizamos este despeje para sustituirlo en la otra ecuación.
- La sustitución es válida en este procedimiento porque si $y = 10 - x$, entonces, los valores de x y de y satisfacen a la primera ecuación.
- Pero también deben satisfacer a la otra ecuación, por eso sustituimos ese valor de y, pues en ambas ecuaciones debe ser el mismo.
- Aquí está la sustitución:

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x - (10 - x) &= 2 \end{aligned}$$

- Observa que ahora tenemos solamente una ecuación con una sola incógnita.
- Obtuvimos esto porque la condición que impone la primera ecuación ya está incluida en esta nueva ecuación lineal.
- Y esto se incluyó cuando sustituimos el despeje que obtuvimos de ella.
- Ahora debemos realizar las operaciones indicadas y resolver para encontrar el valor de la única variable que se encuentra en la ecuación:

$$\begin{aligned} x - 10 + x &= 2 \\ 2x - 10 + 10 &= 2 + 10 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

- Vemos que el valor de x es el que ya conocíamos.
- Ahora vamos a calcular el valor de y. Para esto sustituimos el valor de x que acabamos de encontrar en el despeje que hicimos antes:

$$\begin{aligned} y &= 10 - x \\ &= 10 - 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

- Y de nuevo, el valor que encontramos coincide con el resultado correcto.

Para decidir qué variable despejar y de qué ecuación, es una buena idea identificar la variable que tenga coeficiente igual a uno en una de las ecuaciones. Esto te facilitará los cálculos posteriores.

Ejemplo 2

Resuelve:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 18 \\ 3x - 4y &= 5 \end{aligned}$$

- Primero observamos que la variable y en la primera ecuación tiene coeficiente igual a uno.
- Por eso, vamos a despejar esa variable de esa ecuación:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 18 \\ y &= 18 - 2x \end{aligned}$$

- Ahora sustituimos este despeje en la otra ecuación:

$$\begin{array}{l} 3x - \quad\quad 4y = 5 \\ 3x - 4(18 - 2x) = 5 \end{array}$$

- Ahora vamos a realizar las operaciones indicadas para a encontrar el valor de la única variable en esta ecuación: x

$$\begin{aligned} 3x - 4(18 - 2x) &= 5 \\ 3x - 72 + 8x &= 5 \\ 11x - \cancel{72} + \cancel{72} &= 5 + 72 \\ 11x &= 77 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

- Ahora que conocemos el valor de una variable, podemos utilizar este valor para encontrar el valor de la otra variable.
- Para esto, sustituimos en el despeje que hicimos al principio:

$$\begin{aligned} y &= 18 - 2x \\ &= 18 - 2(7) \\ &= 18 - 14 \\ &= 4 \end{aligned}$$

- Entonces, la solución de este S.E.L. es: $x = 7$, $y = 4$.
- Ahora vamos a comprobar que la solución que encontramos es correcta:

$$\begin{array}{lcl} 2x + \ \ y = 18 & \Rightarrow & 2(7) + \ \ 4 \ \ = 18 \\ 3x - 4y = \ 5 & \Rightarrow & 3(7) - 4(4) = \ 5 \end{array}$$

Una vez que hayamos encontrado el valor de una de las variables, también podemos encontrar el valor de la otra variable sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones que forman en S.E.L.

Esto se justifica porque la solución debe satisfacer a cada una de las ecuaciones que forman el S.E.L.

Resuelve:

$$\begin{array}{l} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{array}$$

Ejemplo 3

- Podemos ver que ninguno de los coeficientes de las variables es igual a 1.
- Esto nos indica que debemos despejar alguna variable y tendremos que trabajar necesariamente con fracciones.
- Elegimos despejar x de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 2x &= 8 - 3y \\ x &= \frac{8 - 3y}{2} \\ &= \frac{8}{2} - \frac{3y}{2} = 4 - \frac{3y}{2} \end{aligned}$$

- Ahora debemos sustituir este despeje en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 3\,x + 2\,y &= 7\\ 3\cdot\left(4 - \frac{3\,y}{2}\right) + 2\,y &= 7 \end{aligned}$$

- Ahora podemos resolver la ecuación y tratar de encontrar el valor de y:

$$12 - \frac{9\,y}{2} + 2\,y = 7$$
$$12 - \frac{9\,y}{2} + \frac{4\,y}{2} = 7$$
$$12 - \frac{5\,y}{2} = 7$$
$$\begin{aligned} 12 - 7 &= \frac{5\,y}{2}\\ 5 &= \frac{5\,y}{2}\\ \frac{5(2)}{5} &= y\\ 2 &= y \end{aligned}$$

- Ahora que conocemos el valor de y, podemos sustituir este valor en cualquiera de las dos ecuaciones y encontrar el valor de x:

$$\begin{aligned} 3\,x + 2\,y &= 7\\ 3\,x + 2(2) &= 7\\ 3\,x + 4 &= 7\\ 3\,x &= 7 - 4 = 3\\ x &= 1 \end{aligned}$$

- Y la solución del S.E.L. es: $x = 1$, $y = 2$.

- Ahora verificamos que la solución sea correcta:

$$\begin{array}{lcl} 3\,x + 2\,y = 7 & \Rightarrow & 3(1) + 2(2) = 7\\ 2\,x + 3\,y = 8 & \Rightarrow & 2(1) + 3(2) = 8 \end{array}$$

Como viste en el ejemplo anterior, algunas veces, cuando usemos este método, necesariamente tendremos que trabajar con fracciones.

Otras veces, podremos simplificar el trabajo cuando tengamos una ecuación con una variable despejada.

Ejemplo 4

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 8\\ y &= 2\,x - 1 \end{aligned}$$

- Como en la segunda ecuación la variable y ya está despejada, vamos a sustituirla de inmediato en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x+y &= 8 \\ x+(2x-1) &= 8 \\ 3x-1 &= 8 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

- Ahora, a partir del valor de x, podemos encontrar el valor de y utilizando el despeje:

$$\begin{aligned} y &= 2x-1 \\ &= 2(3)-1 \\ &= 6-1 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

- Entonces, la solución del S.E.L. es: $x=3$, $y=5$.
- Ahora comprobamos que la solución esté correcta:

$$\begin{array}{lcl} x+y=8 & \Rightarrow & 3+5=8 \\ y=2x-1 & \Rightarrow & 5=2(3)-1 \end{array}$$

En algunos casos aplicados, una ecuación tendrá despejada una variable, sugiriendo el empleo de este método para resolver el S.E.L.

Ejemplo 5

Alberto es 2 años mayor que Blanca. Si sus edades suman 32 años, ¿qué edad tiene cada uno?

- Primero tenemos que convenir en los símbolos que denotarán las edades de cada uno.
- Por comodidad, podemos elegir como A la edad que tiene Alberto y B la edad que tiene Blanca.
- Ahora vamos a traducir a una ecuación la primera información que se nos da: «*Alberto es 2 años mayor que Blanca.*»
- Si Blanca tiene, por ejemplo, 5 años, entonces, Alberto tendrá $5+2=7$ años.
- Es decir, para encontrar la edad de Alberto, sumamos dos a la edad de Blanca.
- La ecuación que modela esa restricción impuesta en el problema es:

$$A = B + 2$$

- Ahora vamos con la segunda restricción: «*Sus edades suman 32 años...*»
- Esta restricción es muy sencilla de traducir: dado que A representa la edad de Alberto y B representa la edad de Blanca, la suma: $A+B$ debe ser igual a 32:

$$A + B = 32$$

- Ahora tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, con la primera ecuación ya despejada.

- Así que sustituimos esta primera ecuación en la segunda y resolvemos:

$$\begin{aligned}A+B &= 32\\(B+2)+B &= 32\\2B+2 &= 32\\2B &= 30\\B &= 15\end{aligned}$$

- Hasta aquí sabemos que Blanca tiene 15 años.
- Entonces, como Alberto tiene 2 años más, debe tener 17.
- Y se cumple que la suma de sus edades es 32 años: $17+15=32$.

Observa cómo cuando resolvimos el S.E.L. podemos fácilmente traducir la penúltima ecuación ($2B=30$) como: «*Pensé un número, lo multipliqué por 2 y obtuve 30. ¿Qué número pensé?*» Obviamente, pensó el 15.

La ecuación anterior ($2B+2=32$) se traduce así: «*Cuando al número* $2B$ *le sumo 2 obtengo 32. ¿Cuánto vale el número* $2B$*?*», pues vale $32-2=30$.

Es una buena idea traducir a palabras cada ecuación que sepas cómo traducir. Eso te ayudará a entenderlas mejor cada vez.

Ejemplo 6

La familia Álvarez viaja de Acaxochitlan hacia Bacaxochitlan a una velocidad de 91 km/hr. La familia Blanco viaja de Bacaxochitlan hacia Acaxochitlan a una velocidad constante de 65 km/hr. Si ambos inician su viaje exactamente a la misma hora, ¿cuántas horas tardarán en encontrarse si la distancia entre ambas poblaciones es de 455 kilómetros y utilizan la misma ruta para viajar?

- Para resolver este problema suponemos que las dos familias utilizan la misma ruta para ir de una población a la otra.
- Como ambos inician el recorrido al mismo tiempo, ambos han utilizado la misma cantidad de tiempo para la hora en que se encuentran.
- Si denotamos como A al tiempo que lleva de recorrido la familia Álvarez, y B la cantidad de tiempo que ha recorrido la familia Blanco, tenemos que:

$$A=B$$

- La familia Álvarez viaja a una velocidad constante de 91 km/hr.
- Esto significa que en A horas ha recorrido: $(91\cdot A)$ kilómetros.
- Por su parte la familia B viaja a 65 km/hr.
- Por lo que ha recorrido $(65\cdot B)$ kilómetros en B horas.
- Cuando ellos se encuentren en el camino, la suma de las distancias que han recorrido será igual a la distancia entre Acaxochitlan y Bacaxohitlan.

$$91A+65B=455$$

- Pero ya sabíamos que $A = B$, por lo que:

$$\begin{aligned} 91\,A + 65\,B &= 455 \\ 91\,A + 65\,A &= 455 \\ 156\,A &= 455 \\ A &= \frac{455}{156} = \frac{35}{12} = 2 + \frac{11}{12} = 2 + \frac{55}{60} \end{aligned}$$

- Esto es, 2 horas con 55 minutos.
- Vamos a verificar el resultado, para esto utilizamos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 91\left(\frac{35}{12}\right) + 65\left(\frac{35}{12}\right) &= 455 \\ \frac{3\,185}{12} + \frac{2\,275}{12} &= \frac{6\,090}{12} = 455 \end{aligned}$$

3.2.3 Método de Igualación

Ya vimos que la solución del S.E.L. debe ser tal que cuando sustituyamos los valores de las variables en cada ecuación obtengamos una igualdad verdadera.

Entonces, el valor de x que obtengamos en una ecuación debe ser el mismo para la otra ecuación. De manera semejante, el valor de y en cada una de las ecuaciones, debe ser el mismo.

Este argumento nos ayuda porque podemos igualar el valor de una variable despejando ésta de ambas incógnitas.

El método de igualación, como su nombre lo indica, consiste en igualar el despeje de una misma variable en distintas ecuaciones y así tener una sola ecuación sin la variable que estamos igualando.

Resuelve:

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + 2\,y &= 11 \end{aligned}$$

Ejemplo 1

- Como dijimos, vamos a despejar la misma variable de cada una de las ecuaciones del S.E.L.:

$$\begin{aligned} x - y = 2 \quad &\Rightarrow \quad x = 2 + y \\ x + 2\,y = 11 \quad &\Rightarrow \quad x = 11 - 2\,y \end{aligned}$$

- Pero ya sabemos que el valor de x en la primera ecuación debe ser el mismo que en la segunda ecuación.
- Esto nos permite igualar los dos despejes:

$$\begin{aligned} x = 2 + y &= 11 - 2\,y \\ y + 2\,y &= 11 - 2 \\ 3\,y &= 9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

- Ahora observa el despeje:

$$x = 2 + y$$

- En palabras el primer despeje dice: «*El valor de x es mayor al valor de y en dos unidades.*»
- Pero $y = 3$, entonces, $x = 2 + 3 = 5$, porque

$$\begin{aligned} x &= 2 + y \\ 5 &= 2 + 3 \end{aligned}$$

- Con lo que la solución del S.E.L. es: $x = 5$, $y = 3$.
- Vamos a verificar el resultado:

$$\begin{array}{rcl} x - \;\; y = 2 & \Rightarrow & 5 - \;\; 3 = 2 \\ x + 2\,y = 11 & \Rightarrow & 5 + 2(3) = 11 \end{array}$$

Los despejes en este como en los métodos que ya estudiamos, siempre resultan sencillos.

Algunas veces tendremos que dividir por algún número.

Ejemplo 2

Resuelve:

$$\begin{aligned} 5\,x - 2\,y &= \;\; 1 \\ 2\,x + 3\,y &= 27 \end{aligned}$$

- Ya sabemos que debemos despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones.
- En este caso, todos los coeficientes de las variables son distintos de 1, por eso, no importa cuál despejemos.
- Así que elegimos despejar y.
- Despejamos y de la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 5\,x - 2\,y &= 1 \\ 5\,x - 1 &= 2\,y \\ \frac{5\,x - 1}{2} &= y \end{aligned}$$

- Ahora despejamos y de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2\,x + 3\,y &= 27 \\ 3\,y &= 27 - 2\,x \\ y &= \frac{27 - 2\,x}{3} \end{aligned}$$

- Ahora igualamos los despejes y resolvemos la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} y = \frac{5\,x - 1}{2} &= \frac{27 - 2\,x}{3} \\ \frac{5\,x - 1}{2} &= \frac{27 - 2\,x}{3} \end{aligned}$$

- Pero primero observa que podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por 6 y los denominadores desaparecen de la ecuación, simplificando la ecuación:[2]

$$
\begin{aligned}
\frac{\cancelto{3}{6}\cdot(5\,x-1)}{\cancel{2}} &= \frac{\cancelto{2}{6}\cdot(27-2\,x)}{\cancel{3}}\\
3\cdot(5\,x-1) &= 2\cdot(27-2\,x)\\
15\,x-3 &= 54-4\,x\\
15\,x+4\,x &= 54+3\\
19\,x &= 57\\
x &= \frac{57}{19}=3
\end{aligned}
$$

- Ahora podemos sustituir este valor en cualquiera de los despejes y encontrar el valor de y:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{5\,x-1}{2}\\
&= \frac{5(3)-1}{2}\\
&= \frac{15-1}{2}\\
&= \frac{14}{2}\\
y &= 7
\end{aligned}
$$

- Entonces, la solución del S.E.L. es: $x=3$, $y=7$.
- Vamos a verificar que la solución esté correcta:

$$
\begin{array}{lcl}
5\,x-2\,y = \ \ 1 & \Rightarrow & 5(3)-2(7) = \ \ 1\\
2\,x+3\,y = 27 & \Rightarrow & 2(3)+3(7) = 27
\end{array}
$$

Resuelve:

$$
\begin{aligned}
3\,x+2\,y &= 1\\
2\,x+3\,y &= 9
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3

- Empezamos despejando la misma incógnita de ambas ecuaciones.
- En este caso nos conviene despejar la variable que tenga coeficiente positivo en ambas ecuaciones.
- Por eso elegimos despejar la variable x.
- Aquí está el despeje para la primera ecuación:

$$
\begin{aligned}
3\,x+2\,y &= 1\\
3\,x &= 1-2\,y\\
x &= \frac{1-2\,y}{3}
\end{aligned}
$$

[2]Multiplicamos por 6, porque 6 es el mínimo común múltiplo de 2 y 3.

- Ahora la despejamos de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 9 \\ 2x &= 9-3y \\ x &= \frac{9-3y}{2} \end{aligned}$$

- Nuestro siguiente paso consiste en igualar los despejes y resolver la ecuación resultante:

$$x = \frac{1-2y}{3} = \frac{9-3y}{2}$$

- Para simplificar la ecuación, empezamos multiplicando ambos lados por el mínimo común múltiplo de 2 y 3, es decir, por 6:

$$\begin{aligned} \overset{2}{\cancel{6}}\left(\frac{1-2y}{\cancel{3}}\right) &= \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{9-3y}{\cancel{2}}\right) \\ 2(1-2y) &= 3(9-3y) \\ 2-4y &= 27-9y \\ -4y+9y &= 27-2 \\ 5y &= 25 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

- Ahora podemos encontrar el valor de x a partir de un despeje y el valor de y, que acabamos de encontrar:

$$\begin{aligned} x &= \frac{9-3y}{2} \\ &= \frac{9-3(5)}{2} \\ &= \frac{9-15}{2} \\ x &= \frac{-6}{2} = -3 \end{aligned}$$

- La solución del S.E.L. es: $x=-3$, $y=5$.

- Ahora verificamos que el resultado sea correcto:

$$\begin{array}{ll} 3x+2y=1 & \Rightarrow 3(-3)+2(5)=1 \\ 2x+3y=9 & \Rightarrow 2(-3)+3(5)=9 \end{array}$$

Ejemplo 4

En las pasadas elecciones del pueblo, el candidato del partido X obtuvo 12 357 votos más que el candidato del partido Y. Entre los dos obtuvieron 45 225 votos. ¿Cuántos votos obtuvo cada uno de ellos?

- Vamos a denotar por x al número de votos que obtuvo el candidato del partido X, y por y el número de votos que obtuvo el candidato del partido Y.

- De acuerdo a la información que se nos proporcionó, tenemos el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} x &= 12\,357 + y \\ x + y &= 45\,225 \end{aligned}$$

- Inmediatamente vemos que en la primera ecuación ya está despejada la variable x, así que vamos a despejar esa misma variable de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} x + y &= 45\,225 \\ x &= 45\,225 - y \end{aligned}$$

- Ahora igualamos los despejes y resolvemos la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} 12\,357 + y &= 45\,225 - y \\ y + y &= 45\,225 - 12\,357 \\ 2\,y &= 32\,868 \\ y &= 16\,434 \end{aligned}$$

- Ahora podemos encontrar el valor de x sustituyendo el valor de y que acabamos de encontrar en la otra ecuación:

$$\begin{aligned} x &= 12\,357 + y \\ x &= 12\,357 + 16\,434 \\ x &= 28\,791 \end{aligned}$$

- La solución es: $x = 28\,791$, $y = 16\,434$.
- Vamos a verificar que la solución esté correcta:
- De la información que nos dan en el texto del problema tenemos: «*el candidato del partido* X *obtuvo 12 357 votos más que el candidato del partido* Y»,
- Y ya sabemos que $y = 16\,434$, por lo que $x = 16\,434 + 12\,357 = 28\,791$.
- Además, «*Entre los dos obtuvieron 45 225 votos*», por lo que:

$$\begin{array}{ccccl} x & + & y & = 45\,225 \\ 28\,791 & + & 16\,434 & = 45\,225 \end{array}$$

Mauricio dijo que tenía \$41.00 pesos en 10 monedas. Si él solamente tenía monedas de \$5.00 y de \$2.00 pesos, ¿cuántas monedas tenía de cada denominación? **Ejemplo 5**

- Ya vimos como resolver este tipo de problemas con una sola ecuación y una incógnita (Pag. 115), pero ahora vamos a resolverlo usando dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Empezamos definiendo como c la cantidad de monedas de \$5.00 pesos y
- d la cantidad de monedas de \$2.00 pesos que posee.
- Sabemos que tiene en total 10 monedas, entonces:

$$c + d = 10$$

- Y en total tiene \$41.00 pesos, entonces,

$$5c+2d=41$$

- Vamos a despejar de ambas ecuaciones la misma incógnita.
- Elegimos c.
- Hacemos el despeje de la primera ecuación:

$$\begin{aligned} c+d &= 10 \\ c &= 10-d \end{aligned}$$

- Ahora hacemos el despeje de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 5c+2d &= 41 \\ 5c &= 41-2d \\ c &= \frac{41-2d}{5} \end{aligned}$$

- Ahora igualamos los despejes y resolvemos la ecuación:

$$c=10-d=\frac{41-2d}{5}$$

- Para simplificar la fracción multiplicamos ambos lados de la igualdad por 5:

$$\begin{aligned} 5(10-d) &= \cancel{5}\left(\frac{41-2d}{\cancel{5}}\right) \\ 50-5d &= 41-2d \\ 50-41 &= -2d+5d \\ 9 &= 3d \\ 3 &= d \end{aligned}$$

- Es decir, tiene 3 monedas de \$2.00 pesos.
- Esto significa que tiene $10-3=7$ monedas de \$5.00 pesos.
- Vamos a verificar que la solución satisface las condiciones del problema:

$$\begin{aligned} c+d=10 &\quad\Rightarrow\quad 3+7=10 \\ 5c+2d=41 &\quad\Rightarrow\quad 5(7)+2(3)=41 \end{aligned}$$

Observa que en el ejemplo anterior se eligieron las literales de manera que sea fácil identificar de qué variable estamos hablando: c para las monedas de cinco pesos y d para las monedas de dos pesos.

Utilizar este principio siempre es muy buena idea, porque frecuentemente ocurre que muchos estudiantes resuelven correctamente el problema, pero a la hora de interpretar el resultado cometen el error de intercambiar las variables con sus significados.

Por ejemplo, si hubieran elegido x para las monedas de \$2.00 pesos, hubieran encontrado que $x=3$, pero después, por descuido, dirían que tienen en total 3 monedas de \$5.00 pesos.

Esto se puede evitar si buscas una literal que te ayude a identificar qué variable está representando.

Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= m \\ c\,x + d\,y &= n \end{aligned}$$

por el método de eliminación.

Sugerencia: Multiplica la primera ecuación por $-c$ y la segunda ecuación por a para poder eliminar la variable x y encontrar el valor de y. Para encontrar el valor de x elimina y multiplicando la primera ecuación por d y la segunda ecuación por $-b$.

Reto 1

3.2.4 Método de Determinantes

Este método es de los más inmediatos[3], además de que nos ayuda desde el principio a reconocer si un S.E.L. tiene solución única o no.

Para empezar definimos el concepto de determinante:

Determinante

Sean a, b, c, d números reales. El arreglo de números:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

se utiliza para denotar al determinante y su valor es igual a: $a\,d - b\,c$.

Definición 1

Entonces, por definición:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

Una forma de memorizar el concepto de determinante y cómo calcularlo consiste en observar que multiplicamos las diagonales del arreglo de números, primero la que va de izquierda a derecha (que es la manera como leemos) y de arriba hacia abajo (que nos arroja el primer producto: $a\,d$), y después multiplicamos los otros dos números que no habíamos considerado: $b\,c$ y restamos este producto del anterior.

En un S.E.L. podemos tener, por ejemplo:

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= m \\ c\,x + d\,y &= n \end{aligned}$$

el cual se puede escribir en forma matricial[4]:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & m \\ c & d & n \end{array}\right]$$

Para obtener la forma matricial de un S.E.L. basta escribir el mismo S.E.L. sin las variables. Es decir, escribimos solamente los coeficientes.

[3] Descubierto por Gabriel Cramer (1 704 – 1 752), matemático suizo. Hay evidencia de que esta regla fue usada anteriormente por el Matemático Inglés Colin Maclaurin (1 689 – 1 746). [12]

[4] En matemáticas, una matriz se define como un arreglo rectangular de números. El álgebra lineal es la rama de las matemáticas que estudia estos objetos matemáticos, así como los vectores.

De aquí se definen 3 determinantes:

✓ El **determinante principal**:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

✓ El *determinante auxiliar en x*:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} = m\,d - b\,n$$

✓ El *determinante auxiliar en y*:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix} = a\,n - m\,c$$

Para hacer más fácil las cosas, observa que en el determinante auxiliar de x hemos sustituido los coeficientes de la variable x por el lado derecho de las ecuaciones del S.E.L., y de manera semejante, para el determinante auxiliar de y se han sustituido los coeficientes de la variable y por los números m, n, y el determinante se ha calculado como se definió anteriormente.

A partir de los determinantes podemos encontrar la solución del S.E.L.:

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= m \\ c\,x + d\,y &= n \end{aligned}$$

En este caso:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{m\,d - b\,n}{a\,d - b\,c} \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta_p} = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a\,n - m\,c}{a\,d - b\,c} \end{aligned}$$

Para dar evidencia de que esto es verdad, vamos a volver a resolver el siguiente S.E.L.:

Ejemplo 1

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

- Primero encontramos el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (1)(1) = (-1) - (1) = -2$$

- Ahora calculamos el determinante auxiliar en x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (10)(-1) - (1)(2) = (-10) - (2) = -12$$

- Y finalmente calculamos el determinante auxiliar en y:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2)-(10)(1) = (2)-(10) = -8$$

- Ahora podemos calcular la solución del S.E.L.:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-12}{-2} = 6 \\ y &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-8}{-2} = 4 \end{aligned}$$

- Y ya sabemos que la solución es correcta[5].

Ejemplo 2

Resuelve:

$$\begin{aligned} 2\,x + \quad y &= 6 \\ x - 2\,y &= 8 \end{aligned}$$

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2)-(1)(1) = (-4)-(1) = -5$$

- Ahora calculamos el determinante auxiliar en x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = (6)(-2)-(1)(8) = (-12)-(8) = -20$$

- Y finalmente calculamos el determinante auxiliar en y:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (2)(8)-(6)(1) = (16)-(6) = 10$$

- Ahora podemos calcular la solución del S.E.L.:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-20}{-5} = 4 \\ y &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-10}{-5} = -2 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a verificar que la solución sea correcta:

$$\begin{aligned} 2\,x + y = 6 \qquad &\Rightarrow \qquad 2(4)+(-2) = 6 \\ x - 2\,y = 8 \qquad &\Rightarrow \qquad 4-2(-2) = 8 \end{aligned}$$

[5]Este S.E.L. ya se resolvió por varios métodos. Puedes ver la solución en las páginas **??** (método gráfico), **??** (eliminación) ó 139 (sustitución).

La ventaja de usar este método consiste en que si el determinante principal es igual a cero, entonces podemos concluir inmediatamente que el S.E.L. **no** tiene solución única. Es posible que no tenga solución, como es posible que tenga un número infinito de soluciones.

Ejemplo 3

Resuelve:

$$\begin{aligned} 2\,x - 3\,y &= 7 \\ 4\,x - 6\,y &= 0 \end{aligned}$$

- Para resolver este S.E.L.[6] vamos a calcular primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = (2)(-6)-(-3)(4) = (-12)-(-12) = 0$$

- Dado que $\Delta_p = 0$, no podremos encontrar los valores de las variables x e y, porque tendremos división por cero.
- De aquí se concluye que el S.E.L. **no** tiene solución única.
- Para saber si el S.E.L. tiene un número infinito de soluciones o no tiene solución, calculamos los otros dos determinantes auxiliares:
- Empezamos calculando el valor del determinante auxiliar de x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = (7)(-6)-(-3)(0) = (-42)-(0) = -42$$

- Y ahora calcumamos el determinante auxiliar en y:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (2)(0)-(7)(4) = (0)-(28) = -28$$

- En este caso tanto Δ_x como Δ_y son distintos de cero, indicando que el S.E.L. **no** tiene solución.
- ¿Por qué? Observa que si multiplicamos la primera ecuación del S.E.L. por 2 obtenemos:

$$2\,x - 3\,y = 7 \qquad \Rightarrow \qquad 4\,x - 6\,y = 14$$

- Y al compararla con la segunda ecuación del S.E.L. podemos concluir que se trata de un S.E.L. formado por dos rectas paralelas distintas.
- En caso de que los determinantes auxiliares hubieran resultado ser iguales a cero, tendríamos que las dos ecuaciones que forman el S.E.L. serían la misma recta, y el S.E.L. tendría en ese caso un número infinito de soluciones.
- Entonces, este S.E.L. **no** tiene solución.

Ejemplo 4

En la oficina municipal utilizan dos fotocopiadoras para preparar invitaciones para el día de las madres. La máquina Y produce 600 fotocopias más por hora que la máquina X. Cuando trabajan juntas producen 19 800 fotocopias en 3 horas. ¿Cuál es la velocidad de fotocopiado de cada máquina?

[6] Este S.E.L. fue tomado de la fuente: [21] indicada en la bibliografía.

- Sabemos que la máquina Y produce 600 fotocopias más por hora que la máquina X.
- Es decir, si x es la velocidad de fotocopiado de la máquina X y y es la velocidad de fotocopiado de la máquina Y, tenemos que:

$$y = x + 600 \qquad \Rightarrow \qquad -x + y = 600$$

- Por otra parte, sabemos que en 3 horas las dos máquinas trabajando juntas producen 19 800 fotocopias:

$$3\,x + 3\,y = 19\,800$$

- Entonces, el S.E.L. que modela nuestro problema es:

$$\begin{aligned} -x + y &= 600 \\ 3\,x + 3\,y &= 19\,800 \end{aligned}$$

- Primero lo escribimos en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 600 \\ 3 & 3 & 19\,800 \end{array}\right]$$

- Ahora es más fácil encontrar los determinantes:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(3) - (1)(3) = (-3) - (3) = -6$$

- Dado que $\Delta_p \neq 0$ sabemos que el S.E.L. tiene solución única.
- Ahora encontramos el determinante auxiliar en x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 600 & 1 \\ 19800 & 3 \end{vmatrix} = (600)(3) - (1)(19800) = (1800) - (19800) = -18000$$

- Y el determinante auxiliar en y:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & 600 \\ 3 & 19800 \end{vmatrix} = (-1)(19800) - (600)(3) = (-19800) - (1800) = -21600$$

- Y la solución de este S.E.L. es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-18\,000}{-6} = 3\,000 \\ y &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-21\,600}{-6} = 3\,600 \end{aligned}$$

- Ahora comprobamos que la solución esté correcta:
- Es evidente que la solución satisface la primera ecuación:

$$y = x + 600 \qquad \Rightarrow \qquad 3\,600 = 3\,000 + 600$$

- Ahora verificamos que satisfaga la segunda ecuación:

$$3\,x + 3\,y = 19\,800 \qquad \Rightarrow \qquad 3(3\,000) + 3(3\,600) = 19\,800$$

- Con lo que probamos que la velocidad de la fotocopiadora X es de 3 000 fotocopias por hora y la fotocopiadora Y tiene una velocidad de 3 600 fotocopias por hora.

Ejemplo 5 En la biblioteca de una primaria encontraron que hay 3 libros de química más que de física y la suma de esos libros es 27. ¿Cuántos libros de cada una de esas materias hay?

- Vamos a denotar al número de física con la letra f y los de química por q.
- Sabemos que si a los libros de física le sumamos 3, obtenemos el número de libros de química:

$$q = f + 3 \qquad \Rightarrow \qquad -f + q = 3$$

- Por otra parte, sabemos que sumamdos los libros de física y los de química en total son 27:

$$f + q = 27$$

- Nuestro S.E.L. es:

$$\begin{aligned} -f + q &= 3 \\ f + q &= 27 \end{aligned}$$

- Es evidente que este S.E.L. se puede resolver rápidamente por el método de eliminación, pero vamos a probar la solución por el método de determinantes.
- Ahora escribimos el S.E.L. en su forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 27 \end{array}\right]$$

- Para resolver este S.E.L., empezamos calculamos los determinantes:

$$\begin{aligned} \Delta_p &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1)-(1)(1) = (-1)-(1) = -2 \\ \Delta_f &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 27 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1)-(1)(27) = (3)-(27) = -24 \\ \Delta_q &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 27 \end{vmatrix} = (-1)(27)-(3)(1) = (-27)-(3) = -30 \end{aligned}$$

- Entonces, la solución de este problema es:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\Delta_f}{\Delta_p} = \frac{-24}{-2} = 12 \\ q &= \frac{\Delta_q}{\Delta_p} = \frac{-30}{-2} = 15 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a verificar que esta solución satisface las condiciones del problema:
  - ✓ La primera condición: «*...hay 3 libros de química más que de física*», se cumple: $15 = 12 + 3$
  - ✓ La segunda condición: «*...la suma de esos libros es 27*», también se cumple: $12 + 15 = 27$

Cuando encuentres un S.E.L., primero observa qué método de solución te ayuda a resolverlo con el mínimo esfuerzo.

Una buena idea consiste en calcular primero el determinante principal del S.E.L., porque esta información te dirá si tiene solución única (en caso de que $\Delta_p \neq 0$).

3.2.5 Interpretación gráfica

En la introducción de la sección *Sistemas de Ecuaciones Lineales* se presentó la interpretación gráfica (o geométrica) de la solución de un S.E.L..

Este tema está relacionado con la *Interpretación Gráfica de las Funciones Lineales*, donde se estudia el concepto de función.

Una ecuación lineal con dos variables puede escribirse en forma de una función. Por ejemplo, consideremos:

$$a\,x + b\,y = k$$

Podemos fácilmente despejar la variable y y reescribir la ecuación en forma de una función:

$$y = \frac{k - a\,x}{b}$$

Esta función nos ayuda a calcular un valor de y una vez que nosotros conozcamos un valor de x.

Entonces, para graficar la ecuación $a\,x + b\,y = k$ podemos expresarla como una función:

$$y = \frac{k - a\,x}{b}$$

y a partir de ésta, encontrar las coordenadas de dos de sus puntos, y trazar la recta que pasa por éstos.

Ejemplo 1

Grafica cada una de las ecuaciones del siguiente S.E.L.:

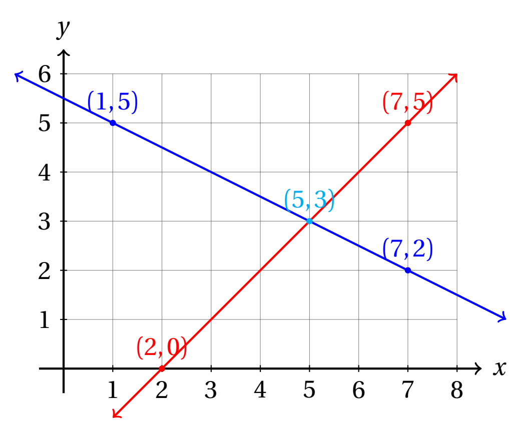
$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + 2\,y &= 11 \end{aligned}$$

- Para graficar las ecuaciones, primero debemos despejar y:

$$\begin{aligned} y &= x - 2 \\ y &= \frac{11 - x}{2} \end{aligned}$$

- Ahora necesitamos encontrar dos puntos para cada una de las rectas.
- Primero encontramos dos puntos (A y B) para la primera recta y después otros dos (C y D) para la segunda.
- Para esto, vamos a sustituir valores para x y calculamos el valor de y que le corresponde.
- Después de tener los puntos por donde pasa cada recta, las graficamos:

Punto	x	y
A	2	0
B	7	5
C	1	5
D	7	2



- Nosotros ya resolvimos este S.E.L. utilizando el método de igualación.
- Así que podemos ver que la solución es correcta, de acuerdo a aquel procedimiento.
- Este S.E.L. tiene solución única, porque al graficar las ecuaciones, obtenemos dos rectas que no son paralelas.

Cuando debamos resolver un S.E.L. de dos ecuaciones y dos variables, y al graficar las ecuaciones en un plano cartesiano, si esas dos rectas **no** son paralelas, tendremos dos rectas que se cortan en algún punto del plano. Ese punto, representa la solución del S.E.L.

Esto es así porque el punto pertenece simultáneamente a ambas rectas, y por tanto, satisface ambas ecuaciones.

Esa es precisamente la definición de la solución del S.E.L.

Otro será el caso cuando tengamos dos rectas paralelas y distintas.

Ejemplo 2

Resuelve el siguiente S.E.L.:

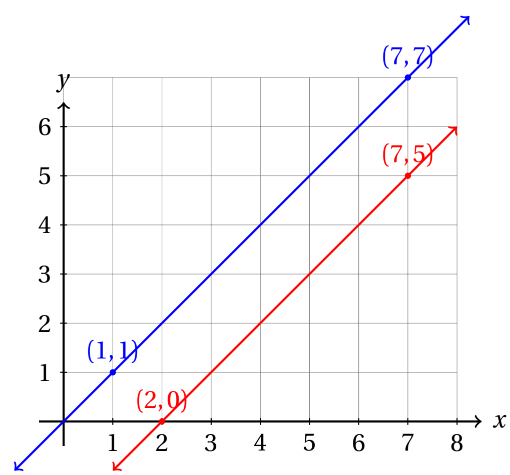
$$\begin{aligned} x - \quad y &= 2 \\ 2\,x - 2\,y &= 0 \end{aligned}$$

- Para resolverlo, vamos a encontrar el determinante principal del S.E.L.:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-2)-(-1)(2) = (-2)-(-2) = 0$$

- Hasta ahora sabemos que el S.E.L. **no** tiene solución única, dado que $\Delta_p = 0$.
- Para saber si se trata de un S.E.L. con un número infinito de soluciones o no tiene solución, vamos a graficar las ecuaciones que forman el S.E.L.:
- Igual que en el ejemplo anterior, empezamos encontrando dos puntos para cada ecuación.
- Después graficamos las rectas:

Punto	x	y
A	2	0
B	7	5
C	1	1
D	7	7



- De la gráfica se hace evidente que este S.E.L. no tiene solución, porque se trata de dos rectas paralelas.

- Para saber si tiene un número infinito de soluciones o no tiene solución, utilizando el método de los determinantes, necesitamos encontrar los determinantes auxiliares y ver cómo se comportan en este caso:

$$\begin{aligned}
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2) - (-1)(0) = (-4) - (0) = -4 \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (2)(2) = (0) - (4) = -4
\end{aligned}$$

- Observa que ni Δ_x, ni Δ_y son iguales a cero[7].

- Esto nos indica que las rectas son paralelas, y por tanto, que el S.E.L. **no** tiene solución.

Ahora vamos a resolver un S.E.L. con un número infinito de soluciones para verificar que al menos uno de los determinantes auxiliares se hace cero.

Ejemplo 3

Resuelve el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

- De nuevo, calculamos el determinante principal del S.E.L.:

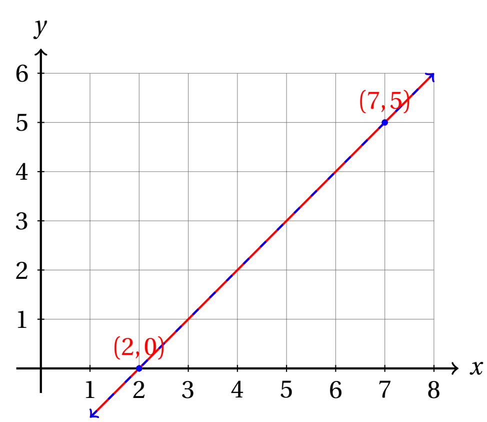
$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-2) - (-1)(2) = (-2) - (-2) = 0$$

- Hasta ahora sabemos que el S.E.L. **no** tiene solución única, dado que $\Delta_p = 0$.

- Para saber si se trata de un S.E.L. con un número infinito de soluciones o no tiene solución, vamos a graficar las ecuaciones que forman el S.E.L.:

- Igual que en el ejemplo anterior, empezamos encontrando dos puntos para cada ecuación:

Punto	x	y
A	2	0
B	7	5
C	2	0
D	7	5



- De la gráfica se hace evidente que este S.E.L. no tiene solución, porque se trata de dos rectas paralelas, que además son la misma recta.

---

[7] Si al menos uno de los dos es distinto de cero, concluimos que el S.E.L. no tiene solución.

- Ahora vamos a estudiar cómo se comportan los determinantes auxiliares:

$$\begin{aligned}\Delta_x &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2)-(-1)(4) = (-4)-(-4) = 0 \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4)-(2)(2) = (4)-(4) = 0\end{aligned}$$

- Observa que: $\Delta_x = 0$, y también $\Delta_y = 0$.
- Esto nos indica que las rectas son paralelas, y además, la misma, y finalmente, que el S.E.L. **no** tiene solución.

Si consideramos el S.E.L. siguiente:

$$\begin{aligned}\alpha_1\,x + \beta_1\,y &= \kappa_1 \\ \alpha_2\,x + \beta_2\,y &= \kappa_2\end{aligned}$$

y suponemos que $\Delta_p = \alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1 = 0$, se sigue que:

$$\begin{aligned}\alpha_1\,\beta_2 &= \alpha_2\,\beta_1 \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{\beta_1}{\beta_2} = \rho\end{aligned}$$

Aquí, existe la posibilidad de que el cociente ρ sea igual o diferente al cociente κ_1/κ_2.

Si se cumple la igualdad:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

Entonces, los tres determinantes, Δ_p, Δ_x y Δ_y serán iguales a cero[8], y a la vez, las ecuaciones del S.E.L. son equivalentes, pues podemos obtener una multiplicando (o dividiendo) la otra por ρ, y por eso tenemos un número infinito de soluciones.

Si un punto está sobre la primera recta, también está sobre la segunda, pues geométricamente son la misma recta.

El otro caso, en el cual:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \neq \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

Se trata del caso en el que las rectas son paralelas y diferentes. Por eso el S.E.L. no tiene solución. Aquí, solamente $\Delta_p = 0$. Los determinantes auxiliares Δ_x, Δ_y pueden ser distintos de cero[9].

Una forma muy sencilla de notar si el S.E.L. tiene un número infinito de soluciones o no tiene soluciones consiste en buscar un número que multiplicado por una ecuación dé igual a la otra ecuación.

En el ejemplo anterior, si multiplicamos la primera ecuación por 2, obtenemos exactamente la segunda ecuación. Esto indica que las dos ecuaciones son la misma.

Si al multiplicar obtenemos el término independiente distinto, pero el resto de la ecuación igual a la otra, entonces tenemos dos rectas paralelas.

Ejemplo 4

Verifica si el S.E.L.:

$$\begin{aligned}x - y &= 2 \\ 2\,x - 2\,y &= 0\end{aligned}$$

tiene o **no** tiene soluciones.

---

[8] Verifica que esto es verdad calculando los tres determinantes.
[9] Uno de ellos puede ser igual a cero, pero no ambos.

- Ya resolvimos este S.E.L..
- Lo que ahora vamos a hacer es buscar un número que multiplicado por la primera ecuación nos resulte la segunda ecuación.
- Evidentemente, podemos multiplicar la primera ecuación por 2 y obtenemos:

$$\begin{array}{rcr} x-y=2 & \Rightarrow & 2x-2y=4 \\ 2x-2y=0 & \Rightarrow & 2x-2y=0 \end{array}$$

- Vemos que el nuevo S.E.L. equivalente al original **no** tiene soluciones, porque se trata de dos rectas paralelas.
- Puedes concluir esto al ver que $4 \neq 0$.

Resuelve los siguientes S.E.L. por el método algebraico más conveniente. **NOTA:** Algunos de los S.E.L.'s tienen un número infinito de soluciones. Indica si se trata de ese caso. Respecto a los problemas, primero encuentra el S.E.L. que modela la situación y resuélvelo. Recuerda verificar que la solución satisfaga las condiciones iniciales del problema.

Ejercicios 3.2

1) $\begin{cases} x+y=-11 \\ -x-2y=20 \end{cases}$ $x=-2, y=-9$

2) $\begin{cases} x+3y=-7 \\ -3x-3y=9 \end{cases}$ $x=-1, y=-2$

3) $\begin{cases} 6x+y=-4 \\ x-y=4 \end{cases}$ $x=0, y=-4$

4) $\begin{cases} 3x+2y=-14 \\ -6x+2y=-14 \end{cases}$ $x=0, y=-7$

5) $\begin{cases} 3x+y=-8 \\ -x-y=6 \end{cases}$ $x=-1, y=-5$

6) $\begin{cases} 6x+3y=-9 \\ 4x-y=21 \end{cases}$ $x=3, y=-9$

7) $\begin{cases} 2x+2y=18 \\ 5x+4y=37 \end{cases}$ $x=1, y=8$

8) $\begin{cases} 2x+2y=-4 \\ x+y=-2 \end{cases}$ $x=0, y=-2$

9) $\begin{cases} x+3y=-10 \\ -2x-2y=-4 \end{cases}$ $x=8, y=-6$

10) $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 5x-3y=-9 \end{cases}$ $x=0, y=3$

11) $\begin{cases} 3x+4y=-23 \\ -2x+4y=-38 \end{cases}$ $x=3, y=-8$

12) $\begin{cases} x+4y=18 \\ -x+3y=10 \end{cases}$ $x=2, y=4$

13) $\begin{cases} 5x+2y=-40 \\ -5x+y=25 \end{cases}$ $x=-6, y=-5$

14) $\begin{cases} x+2y=19 \\ -5x+y=-29 \end{cases}$ $x=7, y=6$

15) $\begin{cases} 5x+2y=50 \\ -6x+y=-43 \end{cases}$ $x=8, y=5$

16) $\begin{cases} 4x+2y=-12 \\ x+3y=-3 \end{cases}$ $x=-3, y=0$

17) $\begin{cases} 3x+y=10 \\ -5x-4y=-12 \end{cases}$ $x=4, y=-2$

18) $\begin{cases} 4x+3y=2 \\ 2x-y=16 \end{cases}$ $x=5, y=-6$

19) $\begin{cases} x+2y=-9 \\ -2x+3y=-10 \end{cases}$ $x=-1, y=-4$

20) $\begin{cases} 5x+y=-26 \\ -3x-3y=30 \end{cases}$ $x=-4, y=-6$

21) $\begin{cases} 5x+2y=54 \\ -5x+4y=-12 \end{cases}$ $x=8, y=7$

22) $\begin{cases} x+4y=26 \\ -6x+y=-31 \end{cases}$ $x=6, y=5$

23) $\begin{cases} 5x+y=-1 \\ -6x-3y=3 \end{cases}$ $x=0, y=-1$

24) $\begin{cases} 3x+y=-11 \\ -5x-4y=16 \end{cases}$ $x=-4, y=1$

25) $\begin{cases} 5x+2y=-28 \\ -3x+4y=22 \end{cases}$ $x=-6, y=1$

26) $\begin{cases} 4x+4y=20 \\ 5x+3y=17 \end{cases}$ $x=1, y=4$

27) $\begin{cases} x+4y=-31 \\ -x+y=-9 \end{cases}$ $x=1, y=-8$

28) $\begin{cases} x+y=-1 \\ -4x-4y=4 \end{cases}$ $x=7, y=-8$

29) $\begin{cases} 6x+4y=10 \\ 6x+y=16 \end{cases}$ $x=3, y=-2$

30) $\begin{cases} 2x+y=-6 \\ 6x-4y=38 \end{cases}$ $x=1, y=-8$

31) $\begin{cases} 4x + 2y = -36 \\ 5x + y = -45 \end{cases}$ $x = -9,\ y = 0$

32) $\begin{cases} x + 4y = -6 \\ -x + 3y = -15 \end{cases}$ $x = 6,\ y = -3$

33) $\begin{cases} 6x + y = -50 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$ $x = -7,\ y = -8$

34) $\begin{cases} 6x + 3y = 42 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$ $x = 4,\ y = 6$

35) $\begin{cases} 5x + 2y = -5 \\ -2x + 2y = 16 \end{cases}$ $x = -3,\ y = 5$

36) $\begin{cases} 2x + y = -13 \\ 4x - y = -35 \end{cases}$ $x = -8,\ y = 3$

37) $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ $x = 0,\ y = 0$

38) $\begin{cases} x + y = 8 \\ -4x - 3y = -33 \end{cases}$ $x = 9,\ y = -1$

39) $\begin{cases} x + 3y = -3 \\ -x - y = -3 \end{cases}$ $x = 6,\ y = -3$

40) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -5x - 4y = -14 \end{cases}$ $x = 2,\ y = 1$

41) $\begin{cases} 5x + 4y = -12 \\ -3x + 4y = -12 \end{cases}$ $x = 0,\ y = -3$

42) $\begin{cases} 5x + 3y = 55 \\ -x - 3y = -23 \end{cases}$ $x = 8,\ y = 5$

43) $\begin{cases} 3x + y = -26 \\ -2x - y = 19 \end{cases}$ $x = -7,\ y = -5$

44) Melissa compró 2 kg de tomate y 3 kg de papa por lo que pagó \$45.00 pesos. Nancy compró (al mismo precio) 3 kg de tomate y 2 kg de papa por \$50.00 pesos. ¿Cuál es el precio de cada kilogramo de papa? \$7.00 pesos/kg.

45) Si a la edad de Isabel la multiplicamos por 3 y al resultado le sumamos 4 obtenemos la edad de su tía Ana. Ambas edades suman 40. ¿Qué edad tiene cada una? Isabel: 9 años. Tía Ana: 31 años.

46) En un circo había 365 asistentes entre adultos y niños. Cada boleto de adulto costaba \$80.00 pesos, mientras que cada boleto de niño costaba \$45.00 pesos. ¿Cuántos niños y cuántos adultos asistieron al circo a una función, si se recaudaron por entradas \$25 175.00 pesos? Entraron 250 adultos y 115 niños.

47) En el cine del pueblo a la función de estreno asistieron 305 adultos y 150 niños, por lo que se recaudó un total de \$28 850.00 pesos. El boleto de adulto cuesta \$20.00 más que el de niño. ¿Cuáles son los precios de las entradas de adulto y de niño? Adulto. \$70.00 pesos, niño: \$50.00 pesos.

48) Un vendedor mezcla cacahuates y semilla de pipián para vender. El kilogramo de cacahuate le cuesta \$30.00 pesos y el kilogramo de semilla de pipián cuesta \$70.00 pesos. ¿Cuántos gramos de cada producto debe incluir en la mezcla si desea que el costo de producirlo sea de \$4.00 pesos por cada 100 gramos? 75 gr de cacahuate y 25 gr de semilla de pipián.

49) En el hotel «*El descanso*» cambiaron los precios de las habitaciones que ofrecen. Originalmente la habitación doble tenía un costo de \$150.00 por noche, mientras que la sencilla costaba \$100.00 pesos por noche. Ahora, cuando el hotel tiene sus 65 habitaciones dobles y sus 35 habitaciones sencillas ocupadas todas, su ingreso diario es de \$15 750.00 pesos. ¿Cuáles son los nuevos precios de cada habitación, si la diferencia de precios sigue siendo de \$50.00 pesos? Sencilla: \$125.00 pesos, doble: \$175.00 pesos.

50) Un D.J. cobra \$100.00 pesos por cada hora de trabajo durante las primeras cuatro horas y cada hora adicional la cobra a \$175.00 pesos. En el aniversario de una tienda trabajó buena parte del día y por eso recibió \$925.00 de salario. ¿Cuántas horas trabajó en total ese día? 9 horas

51) Un trabajador recibe \$25.00 pesos por hora trabajada durante las primeras cuarenta horas de trabajo durante la semana y por cada hora extra adicional recibe \$60.00 pesos. Durante la semana pasada recibió \$1 420.00 pesos. ¿Cuántas horas extra trabajó? 7 horas.

52) Don Polo tiene 100 Ha de terreno para sembrar. El año pasado sembró maíz y frijol. Cada hectárea de siembre de maíz le costó \$450.00 pesos, mientras que cada hectárea de frijol costó \$1 500.00 pesos. En total necesitó de \$76 500.00 pesos para sembrar todo su terreno. ¿Cuántas hectáreas de frijol y cuántas de maíz sembró? Frijol: 30 Ha, maíz: 70 Ha.

53) Un total de \$20,000.00 pesos se invirtieron en acciones que otorgaban el 5% una parte y el resto en acciones que otorgaban el 8% anualmente. Al final del año se recaudaron \$1 240.00 pesos como utilidad de la inversión. ¿Cuánto se invirtió en cada tipo de acciones? Al 5%: \$12 000.00 pesos; al 8%: \$8 000.00 pesos.

54) Una empresa decidió invertir \$25 000.00 pesos en su campaña publicitaria. De acuerdo a la información que la compañía de publicidad les entregó, pueden utilizar esa inversión en (**A**) 72 días de anuncios de radio, transmitiendo 5 anuncios diariamente en las horas que ellos prefieran, y además, 200 playeras para regalar a los clientes que visiten sus instalaciones. La otra opción (**B**) consiste de 300 playeras y 58 días de anuncios de radio, transmitiendo 5 anuncios diariamente en las horas que ellos prefieran. ¿Cuánto cuesta cada playera publicitaria? \$35.00 pesos.

55) De acuerdo con la información del ejercicio anterior, ¿cuánto cuesta cada anuncio de radio? \$50.00 pesos.

56) **Reto:** David cambió el orden de las cifras de un número de dos cifras. El número que obtuvo era dos unidades mayor que el doble del número inicial. Notó que la suma de las cifras del número es igual a 7. ¿Cuál era el número inicial? 25

57) **Pronósticos:** Los parámetros m y b de la ecuación de la recta $y = m\,x + b$ que mejor se ajusta a los puntos $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(5,5)$ y $(7,6)$ está dado por la solución del siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} 18\,m + 5\,b &= 20 \\ 88\,m + 18\,b &= 87 \end{aligned}$$

a) Encuentra la ecuación de la recta de mejor ajuste para esos puntos.

b) Grafica la recta y los puntos en el mismo plano cartesiano.

58) **Geometría Analtica:** Las coordenadas del centro $C(x, y)$ de la circunferencia que pasa por los puntos: $A(0,2)$, $B(1,7)$ y $C(6,2)$ están dados por la solución del siguiente S.E.L.:

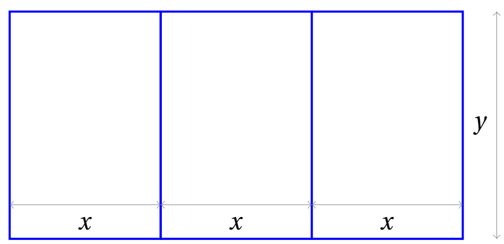
$$\begin{aligned} 5x - y &= 11 \\ 2x - 3y &= -6 \end{aligned}$$

a) Calcula las coordenadas del centro de la circunferencia $x = 3,\ y = 4.$

b) Grafica los tres puntos por donde pasa la circunferencia y su centro.

c) Traza la circunferencia con la ayuda de un compás.

59) Para cercar el terreno que se muestra enseguida se requirieron de 74 metros de tela ciclónica de alambre. Para cercar uno de los tres sectores completamente se requieren de 16 metros de malla. ¿Cuáles son las dimensiones de cada una de las divisiones? (**NOTA:** el dibujo no está a escala.) $x = 3$, $y = 5$.



60) **Reto:** Describe los métodos algebráicos (eliminación, igualación, sustitución y determinantes) para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

61) **Reto:** Explica en una hoja de papel cómo identificas un S.E.L. que no tiene soluciones.

62) **Reto:** Explica en una hoja de papel cómo identificas un S.E.L. que tiene un número infinito de soluciones.

Ahora vamos a generalizar el procedimiento que hemos utilizado para resolver sistemas de una ecuación con una incógnita y de 2 ecuaciones con dos incógnitas.

Para empezar, debemos notar que cuando resolvimos un S.E.L. de 2 ecuaciones con dos incógnitas, en los métodos de eliminación (suma y resta), sustitución e igualación, el propósito que perseguimos siempre fue de transformar el S.E.L. en un problema de una ecuación lineal con una sola incógnita. Es decir, redujimos un problema nuevo a un tipo de problema que ya sabemos cómo resolver.

En este caso haremos lo mismo.

Ejemplo 5

Resuelve el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 2 \end{aligned}$$

- En este primer ejemplo utilizaremos el método de suma y resta.
- Para esto, primero debemos decidir qué variable vamos a eliminar.
- Por ejemplo, podemos eliminar la variable z.

- Sumamos las primeras dos ecuaciones del S.E.L.:

$$\begin{array}{r} x+\ \ y+z=6 \\ x+\ \ y-z=0 \\ \hline 2x+2y\qquad =6 \end{array}$$

  Así hemos obtenido una ecuación que tiene solamene las variables x, y.

- Podemos simplificar la ecuación dividiendo ambos lados de la igualdad entre 2 y obtener:

$$x+y=3$$

- A esta nueva ecuación la llamaremos la ecuación A
- Ahora vamos a sumar las ecuaciones dos y tres:

$$\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ x-y+z=2 \\ \hline 2x\qquad\quad =2 \end{array}$$

- Esta última ecuación implica que[10] $x=1$.
- De la ecuación A sabemos que $x+y=3$, pero $x=1$, por lo que necesariamente, $y=2$.
- De la primera ecuación del S.E.L. y con los valores de las variables x, y podemos encontrar el valor de la variable z.
- Para esto, sustituimos los valores que ya conocemos en cualquiera de las ecuaciones del S.E.L..

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ 1+2+z &= 6 \\ z &= 6-3=3 \end{aligned}$$

- Entonces, la solución del S.E.L. es: $x=1$, $y=2$, $z=3$.
- Vamos a verificar la solución:

$$\begin{array}{lcl} x+y+z=6 & \Rightarrow & 1+2+3=6 \\ x+y-z=0 & \Rightarrow & 1+2-3=0 \\ x-y+z=2 & \Rightarrow & 1-2+3=2 \end{array}$$

Al resolver un S.E.L. de 3 ecuaciones con 3 incógnitas podemos usar cualquiera de los métodos que ya hemos estudiado.

En el siguiente ejemplo aplicaremos el método de sustitución.

Ejemplo 6

Resuelve el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 10 \\ x+y-z &= 0 \\ x-y+z &= 6 \end{aligned}$$

- Iniciamos despejando la variable x de alguna de las ecuaciones.

[10] Traduce a palabras la ecuación para encontrar su solución.

- Elegimos la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ x &= z-y \end{aligned}$$

- Ahora sustituimos este valor de x en las otras dos ecuaciones.
- Empezamos sustituyendo en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} (x)+y+z &= 10 \\ (z-y)+y+z &= 10 \\ 2z &= 10 \\ z &= 5 \end{aligned}$$

- Por suerte hemos encontrado el valor de z.
- Ahora vamos a sustituir el valor de y en la tercera ecuación:

$$\begin{aligned} x-y+z &= 6 \\ (z-y)-y+z &= 6 \\ -2y+2z &= 6 \end{aligned}$$

- Esta última ecuación puede simplificarse si dividimos entre dos ambos lados de la igualdad:

$$-y+z=3$$

- Pero ya sabemos que $z=5$, por lo que:

$$\begin{aligned} -y+z &= 3 \\ -y+5 &= 3 \end{aligned}$$

- Implica que $y=2$.
- Para encontrar el valor de x utilizamos el primer despeje que hicimos:

$$\begin{aligned} x &= z-y \\ x &= 5-2=3 \end{aligned}$$

- Con lo que la solución del S.E.L.es: $x=3$, $y=2$, $z=5$.
- Vamos a verificar el resultado:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 10 \quad \Rightarrow 3+2+5=10 \\ x+y-z &= 0 \quad \Rightarrow 3+2-5=0 \\ x-y+z &= 6 \quad \Rightarrow 3-2+5=6 \end{aligned}$$

Igual pudimos haber sustituido el valor de la variable z que encontramos al inicio y simplificar el problema aún más.

El siguiente ejemplo se resuelve con el método de igualación.

Ejemplo 7

Resuelve el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 10 \\ x+y-z &= 4 \\ x-y+z &= 8 \end{aligned}$$

- Empezamos despejando la variable x de dos ecuaciones.
- Elegimos las primeras dos ecuaciones del S.E.L.:

$$\begin{array}{rcl} x+y+z=10 & \Rightarrow & x=10-y-z \\ x+y-z=4 & \Rightarrow & x=4-y+z \end{array}$$

- Ahora igualamos esos despejes y obtendremos una ecuación:

$$\begin{array}{rcl} x=10-y-z & = & 4-y+z \\ 6 & = & 2z \end{array}$$

- Que implica $z=3$.
- Ahora vamos a simplificar el problema.
- En la siguiente igualación, vamos a sustituir el valor que ya conocemos.
- Despejamos x de nuevo, pero ahora de las últimas dos ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} x+y-z=4 & \Rightarrow & x=4-y+z \\ x-y+z=8 & \Rightarrow & x=8+y-z \end{array}$$

- Y al igualar obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} x=4-y+z & = & 8+y-z \\ -2y+2z & = & 8-4 \\ -2y+2z & = & 4 \end{array}$$

- Simplificamos la ecuación dividiendo entre dos ambos lados de la igualdad:

$$-y+z=2$$

- Pero ya sabíamos que $z=3$, por lo que $y=1$.
- Finalmente, podemos encontrar el valor de la variable x a partir de cualquiera de los despejes:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 8+y-z \\ x & = & 8+1-3=6 \end{array}$$

- Ahora verificamos que la solución sea correcta:

$$\begin{array}{rcl} x+y+z=10 & \Rightarrow & 6+1+3=10 \\ x+y-z=\ \ 4 & \Rightarrow & 6+1-3=\ \ 4 \\ x-y+z=\ \ 8 & \Rightarrow & 6-1+3=\ \ 8 \end{array}$$

El siguiente ejemplo se resuelve a través del método de los determinantes.

Para esto, primero definimos cómo encontrar un determinante de tres por tres.

Definición 1

DETERMINANTE DE TERCER ORDEN

Se calcula con la siguiente relación:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (a)(e)(i)+(d)(h)(c)+(g)(b)(f)-(c)(e)(g)-(f)(h)(a)-(i)(b)(d)$$

Ejemplo 8

Resuelve el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ x + y - z &= \ \ 4 \\ x - y + z &= \ \ 2 \end{aligned}$$

- Primero encontramos el determinante principal Δ_p del S.E.L.:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1)+(-1)+(-1)-(1)-(1)-(1) = -4$$

- Dado que $\Delta_p \neq 0$, el S.E.L. tiene solución única.
- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para cada una de las variables.
- Recuerda que en cada caso sustituimos la columna de las constantes por la columna de la variable correspondiente.
- Empezamos calculando el determinante auxiliar en x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (10)+(-4)+(-2)-(2)-(10)-(4) = -12$$

- Ahora calculamos el determinante auxiliar en y:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (4)+(2)+(-10)-(4)-(-2)-(10) = -16$$

- Y finalmente, calculamos Δ_z:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2)+(-10)+(4)-(10)-(-4)-(2) = -12$$

- Ahora podemos calcular el valor de cada una de las variables:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-12}{-4} = 3 \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta_p} = \frac{-16}{-4} = 4 \\ z &= \frac{\Delta_z}{\Delta_p} = \frac{-12}{-4} = 3 \end{aligned}$$

- Ahora verifica que la solución sea correcta.

El siguiente ejemplo es una aplicación sencilla de los S.E.L.'s de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

Ejemplo 9

Aarón, Bernardo y Claudio están jugando canicas. Aarón y Bernardo tienen 2 canicas más que el doble de lo que tiene Claudio. Entre Aarón y Claudio tienen 7 canicas más de las que tiene Bernardo, y entre los tres juntan 47 canicas. ¿Cuántas tiene cada uno de ellos?

- Primero debemos escribir el S.E.L. que modela esta situación.
- El texto del problema nos dice que «*Aarón y Bernardo tienen 2 canicas más que el doble de lo que tiene Claudio.*»
- Esto significa que si sumamos las cantidades de canicas que tiene Aarón más las que tiene Bernardo, esto será igual al doble de las que tiene Claudio más dos.
- Matemáticamente, si A representa la cantidad de canicas que tiene Aarón, B las que tiene Bernardo, y C las que tiene Claudio, tenemos:
$$A+B=2C+2$$
- Lo cual puede reescribirse de la siguiente forma:
$$A+B-2C=2$$
- La siguiente oración del problema dice: «*Entre Aarón y Claudio tienen 7 canicas más de las que tiene Bernardo*», esto es:
$$A+C=B+7$$
- Que puede escribirse como: $A-B+C=7$.
- La siguiente oración del problema dice: «*Entre los tres juntan 47 canicas*». Esto es:
$$A+B+C=47$$
- Entonces, el S.E.L. que modela esta situación es:
$$\begin{aligned} A+B-2C &= 2\\ A-B+C &= 7\\ A+B+C &= 47 \end{aligned}$$
- Ahora debemos resolverlo.
- Vamos a utilizar el método de los determinantes.
- Calculamos primero el determinante principal Δ_p:
$$\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)+(-2)+(1)-(2)-(1)-(1)=-6$$
- Dado que $\Delta_p\neq 0$, el S.E.L. tiene solución única.
- Así que podemos seguir calculando los determinantes auxiliares:
$$\begin{aligned} \Delta_A &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2\\ 7 & -1 & 1\\ 47 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-2)+(-14)+(47)-(94)-(2)-(7)=-72\\ \Delta_B &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2\\ 1 & 7 & 1\\ 1 & 47 & 1 \end{vmatrix}=(7)+(-94)+(2)-(-14)-(47)-(2)=-120\\ \Delta_C &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 7\\ 1 & 1 & 47 \end{vmatrix}=(-47)+(2)+(7)-(-2)-(7)-(47)=-90 \end{aligned}$$

- Y a partir de estos valores podemos conocer cuánto tiene cada uno de ellos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Delta_A}{\Delta_p} = \frac{-72}{-6} = 12 \\ B &= \frac{\Delta_B}{\Delta_p} = \frac{-120}{-6} = 20 \\ C &= \frac{\Delta_C}{\Delta_p} = \frac{-90}{-6} = 15 \end{aligned}$$

- Ahora verificamos que la solución sea correcta.
- **Primera Condición:** «*Aarón (12) y Bernardo (20) tienen 2 canicas más que el doble de lo que tiene Claudio (15).*» se cumple, porque:
$$12 + 20 = 2(15) + 2$$
- **Segunda Condición:** «*Entre Aarón y Claudio tienen 7 canicas más de las que tiene Bernardo.*» se cumple, porque:
$$12 + 15 = 20 + 7$$
- **Tercera Condición:** «*Entre los tres juntan 47 canicas.*» se umple, porque:
$$12 + 20 + 15 = 47$$
- Entonces, Aarón tiene 12 canicas, Bernardo tiene 20 y Claudio tiene 15.

Tres bombas de distintos colores se utilizan para llenar una piscina. Cuando trabajan solamente las bombas amarilla y blanca tardan 12 minutos. Cuando trabajan solamente las bombas blanca y café tardan 6 minutos y 40 segundos, es decir $6 + 2/3$ minutos. Cuando trabajan las bombas amarilla y café tardan 7 minutos y medio, es decir, 7.5 min. ¿Cuánto tardarán las tres en llenar la piscina trabajando juntas?

Reto 1

3.2.6 S.E.L. 3×3 con y sin solución

En los ejemplos de la sección anterior estudiamos solamente S.E.L.'s que tenían solución única.

Sin embargo, existen algunos que **no** tienen solución.

Por ejemplo, el siguiente S.E.L..

Resuelve el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + y - z &= 0 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1

- Para darnos cuenta de que este S.E.L. no tiene solución, basta encontrar el determinante principal y si éste es igual a cero, hemos terminado:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1) + (1) + (-1) - (1) - (-1) - (1) = 0$$

- Dado que $\Delta_p = 0$, el S.E.L. no tiene solución única.
- Sin embargo, todavía es posible que tenga un número infinito de soluciones, como puede que no tenga ni una solución.
- Para averiguar qué caso corresponde, calculamos los determinantes auxiliares:

$$\begin{aligned}
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (6)+(0)+(-2)-(2)-(-6)-(0) = 8 \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (0)+(2)+(-6)-(0)-(-2)-(6) = -8 \\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)+(6)+(0)-(6)-(0)-(2) = 0
\end{aligned}$$

- Dado que no todos los determinantes son iguales a cero, el S.E.L. **no** tiene ninguna solución.
- En este caso estamos hablando dos espacios geométricos paralelos.
- Para convencerte que esto es verdad, observa la primera y tercera ecuaciones del S.E.L.
- Solamente difieren en el término independiente (a la derecha de la igualdad).
- Esto nos indica que tienen la misma dirección, pero no pasan por el mismo punto.
- Entonces, no existe ningún punto que satisfaga simultáneamente a la primera y tercera ecuaciones del S.E.L., por lo que no tiene solución.

Algunos problemas tienen solución matemática, sin embargo, esta solución no tiene sentido físico.

Ejemplo 2

Un comerciante desea preparar una mezcla de nueces, cacahuates y pistaches para vender con las siguientes propiedades:

Componente	**Precio (100 gr)**	**Vitamina X**	**Vitamina Y**
Nueces	\$25.00 pesos	12	5
Cacahuates	\$20.00 pesos	20	7
Pistaches	\$35.00 pesos	15	6
Mezcla	\$$P$ pesos	17	6

¿A qué precio P debe vender 100 gramos de esa mezcla?

- Para conocer el precio de 100 gramos de esa mezcla necesitamos resolver primero encontrar el S.E.L. que modela esa situación.
- Una vez que tengamos el sistema que modela esa situación podremos resolverlo, para conocer los valores de los gramos que debe contener de cada componente, y a partir de esa información, calcular el precio de los 100 gramos de la mezcla.
- Empezamos con el S.E.L.

- Sean n el número de gramos de nuez que contendrán 100 gramos de esa mezcla,
- c el número de gramos de cacahuate que contendrán esos 100 gramos de la mezcla, y
- p el número de gramos de pistache que contendrán los 100 gramos de mezcla.
- Evidentemente, la suma de los gramos debe ser 100, por eso:
$$n+c+p=100$$
- La ecuación que nos ayuda a calcular la cantidad de Vitamina X que contiene la mezcla es:
$$12\,n+20\,c+15\,p=17$$
- Y la ecuación que nos ayuda a calcular la cantidad de Vitamina Y que contiene esa mezcla es:
$$5\,n+7\,c+6\,p=6$$
- Entonces, el S.E.L. que modela este problema es:
$$\begin{array}{rrrl} n\,+ & c\,+ & p = & 100\\ 12\,n\,+ & 20\,c\,+ & 15\,p = & 17\\ 5\,n\,+ & 7\,c\,+ & 6\,p = & 6 \end{array}$$
- Ahora debemos resolver el sistema.
- Utilizaremos el método de los determinantes.
- Calculamos el determinante principal, que denotaremos por: Δ_π:
$$\Delta_\pi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 12 & 20 & 15\\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = (120)+(84)+(75)-(100)-(105)-(72)=2$$
- Dado que $\Delta_\pi \neq 0$, el S.E.L. tiene solución única.
$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} 100 & 1 & 1\\ 17 & 20 & 15\\ 6 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 1\,487\\ \Delta_c &= \begin{vmatrix} 1 & 100 & 1\\ 12 & 17 & 15\\ 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 299\\ \Delta_p &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 100\\ 12 & 20 & 17\\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -1\,586 \end{aligned}$$
- No hay necesidad de ir más adelante.
- Dado que $\Delta_\pi > 0$, cuando dividamos cualquier número negativo entre Δ_π obtendremos un cociente negativo.
- Este argumento nos dice que $p<0$.
- No podemos agregar $-1586/2=-793$ gramos de pistaches a la mezcla.
- Esto nos indica que, a pesar de que la representación matemática del problema tiene solución única, el problema físico no se puede resolver.
- El signo negativo de $p=-793$ indica que deberíamos quitar en lugar de agregar, pero ¿cómo vamos a quitarle? si inicialmente, la mezcla contenía cero gramos de pistaches.

Resuelve los siguientes S.E.L. por el método algebraico más conveniente. En cao de que un S.E.L. no tenga soluciones, o presente un número infinito de soluciones, indícalo. Respecto a los problemas, primero encuentra el S.E.L. que modela la situación y resuélvelo. También verifica que la solución satisfaga sus condiciones.	**Ejercicios 3.2**

1) $\begin{cases} 2x+3y+6z=-23 \\ -4x+2y+z=28 \\ x+4y+2z=-7 \end{cases}$ $x=-7, y=1, z=-2$

2) $\begin{cases} x+y-4z=-7 \\ -2x+5y+z=-28 \\ x+3y+z=-19 \end{cases}$ $x=-1, y=-6, z=0$

3) $\begin{cases} x+4y-2z=-16 \\ x+y+z=-7 \\ 3x+y+3z=-3 \end{cases}$ $x=8, y=-9, z=-6$

4) $\begin{cases} x+y-6z=-36 \\ -2x+4y+4z=-6 \\ 5x+3y+z=-69 \end{cases}$ $x=-9, y=-9, z=3$

5) $\begin{cases} 3x+2y-z=-1 \\ 4x+5y+4z=-31 \\ x+y+3z=-20 \end{cases}$ $x=-3, y=1, z=-6$

6) $\begin{cases} x+3y-2z=26 \\ -3x+y+z=2 \\ 3x+y+2z=-10 \end{cases}$ $x=-1, y=5, z=-6$

7) $\begin{cases} x+4y-2z=-9 \\ x+3y+2z=-15 \\ x+4y+4z=-21 \end{cases}$ $x=-5, y=-2, z=-2$

8) $\begin{cases} 6x+2y+z=16 \\ x+6y+2z=-20 \\ 5x+3y+z=8 \end{cases}$ $x=4, y=-4, z=0$

9) $\begin{cases} 6x+y+2z=-30 \\ -3x+3y+3z=-21 \\ 6x+4y+z=-21 \end{cases}$ $x=-2, y=0, z=-9$

10) $\begin{cases} x+2y-4z=15 \\ 2x+y+2z=10 \\ 3x+y+z=19 \end{cases}$ $x=7, y=0, z=-2$

11) $\begin{cases} 6x+y+z=32 \\ -2x+6y+3z=16 \\ 4x+y+z=24 \end{cases}$ $x=4, y=0, z=8$

12) $\begin{cases} 3x+y-2z=4 \\ -2x+y+z=-13 \\ x+4y+z=-19 \end{cases}$ $x=4, y=-6, z=1$

13) $\begin{cases} 3x+2y-2z=-26 \\ x+2y+4z=-12 \\ 2x+3y+z=-25 \end{cases}$ $x=-4, y=-6, z=1$

14) $\begin{cases} x+y-z=8 \\ -x+y+2z=6 \\ 4x+3y+3z=55 \end{cases}$ $x=7, y=5, z=4$

15) $\begin{cases} 2x+y+4z=-3 \\ -x+y+3z=16 \\ 4x+2y+4z=-14 \end{cases}$ $x=-7, y=3, z=2$

16) $\begin{cases} 6x+3y+z=37 \\ -x+2y+3z=-10 \\ x+4y+3z=4 \end{cases}$ $x=6, y=1, z=-2$

17) $\begin{cases} 5x+3y-4z=60 \\ -x+4y+z=10 \\ 4x+y+4z=5 \end{cases}$ $x=5, y=5, z=-5$

18) $\begin{cases} x+y-z=-6 \\ -x+2y+2z=-18 \\ 2x+3y+2z=-9 \end{cases}$ $x=6, y=-9, z=3$

19) $\begin{cases} 4x+4y+4z=-80 \\ 4x+5y+z=-58 \\ 6x+y+3z=-68 \end{cases}$ $x=-6, y=-5, z=-9$

20) $\begin{cases} 6x+4y+z=66 \\ x+5y+z=48 \\ 6x+3y+z=59 \end{cases}$ $x=5, y=7, z=8$

21) $\begin{cases} 3x+3y-5z=-4 \\ -x+y+2z=0 \\ 5x+y+z=-44 \end{cases}$ $x=-8, y=0, z=-4$

22) $\begin{cases} x+y-2z=-17 \\ -x+3y+2z=1 \\ 6x+3y+2z=22 \end{cases}$ $x=3, y=-4, z=8$

23) $\begin{cases} 6x+2y+5z=-90 \\ x+3y+z=-24 \\ 6x+y+4z=-81 \end{cases}$ $x=-9, y=-3, z=-6$

24) $\begin{cases} 5x+y-6z=3 \\ -x+3y+z=-12 \\ 3x+2y+2z=-43 \end{cases}$ $x=-7, y=-4, z=-7$

25) $\begin{cases} x+y-3z=-21 \\ -4x+6y+z=-11 \\ 2x+2y+z=-7 \end{cases}$ $x=-2, y=-4, z=5$

26) $\begin{cases} x + y - 5z = 15 \\ -x + 2y + 2z = -9 \\ 4x + y + z = 36 \end{cases}$ $x = 9, y = 1, z = -1$

27) $\begin{cases} 3x + 2y - 6z = -43 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = -4 \end{cases}$ $x = -9, y = 1, z = 3$

28) $\begin{cases} 5x + y - 5z = -86 \\ -x + 4y + 3z = 29 \\ 3x + 3y + z = -22 \end{cases}$ $x = -9, y = -1, z = 8$

29) $\begin{cases} x + 4y - 6z = 40 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x + y + 4z = -3 \end{cases}$ $x = -2, y = 9, z = -1$

30) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = -51 \\ x + 4y + 4z = 15 \\ 4x + 2y + 2z = -24 \end{cases}$ $x = -9, y = 0, z = 6$

31) $\begin{cases} 4x + y + 2z = 11 \\ -x + 2y + 4z = 22 \\ 6x + 2y + 4z = 22 \end{cases}$ $x = 0, y = -7, z = 9$

32) $\begin{cases} x + 3y - 6z = -60 \\ -x + 4y + 4z = 28 \\ 2x + 4y + 4z = 28 \end{cases}$ $x = 0, y = -2, z = 9$

33) $\begin{cases} 5x + y - 2z = 32 \\ -2x + 5y + 3z = -18 \\ 2x + 4y + z = 11 \end{cases}$ $x = 9, y = -3, z = 5$

34) $\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ -4x + 5y + 3z = 17 \\ 5x + y + 4z = 15 \end{cases}$ $x = 2, y = 5, z = 0$

35) $\begin{cases} 6x + 3y + 5z = -44 \\ -3x + y + z = 21 \\ x + y + 2z = -8 \end{cases}$ $x = -7, y = 1, z = -1$

36) Para la fiesta de graduación compré unos zapatos, un pantalón y una camisa. Los zapatos y el pantalón me costaron $410.00 El pantalón y la camisa me costaron lo mismo que los zapatos. La camisa y los zapatos cuestan $340.00 ¿Cuánto me costó cada uno?
Zapatos: $250.00, pantalón: $160.00, y camisa: $90.00

37) Alicia, Blanca y Claudia son amigas. Alicia, la mayor, tiene tantos años como la suma de las edades de Blanca y Claudia. La edad de Blanca es la cuarta parte de la suma de las edades de Alicia y Claudia. Si a la edad de Claudia le sumamos 3 años, obtenemos el promedio de las edades de Alicia y Blanca. ¿Qué edad tiene cada una de ellas? Alicia: 30 años, Blanca: 12 años, Claudia, 18 años.

38) Ana, Itzel y Gaby son mis sobrinas. La suma de las edades de Ana e Itzel es 10 años. La suma de las edades de Itzel y Gaby es 5 años. La suma de las edades de Ana y Gaby es 13 años. ¿Qué edad tiene cada una de ellas? Ana: 9 años, Gaby: 4 años, Itzel: 1 año.

39) Un nutriólogo necesita combinar tres complementos alimenticios A, B, C. El alimento A contiene 40 componentes de proteínas y 25 de vitamínas por cada 100 gramos. El complemento B contiene 60 componentes de proteínas y 20 de vitamínas por cada 100 gramos. El complemento alimenticio C contiene 45 componentes de proteínas y 30 de vitamínas por cada 100 gramos. La mezcla que requiere el nutriólogo debe contener 48.25 componentes de proteínas y 29.75 componentes de vitaminas por cada 100 gramos. ¿Cuántos gramos de cada alimento A, B, C debe contener la mezcla?
A: 35 gr, B: 15 gr., C: 30 gr.

40) Compré tres libros. Todos excepto el primero costaron \$370.00 pesos. Todos excepto el segundo costaron \$480.00 pesos. Todos excepto el tercero costaron \$430.00 pesos. ¿Cuánto costó cada libro?
Primero: \$215.00, segundo: \$180.00, tercero: \$150.00 pesos.

41) **Geometría Analtica:** Los parámetros a, b, c de la ecuación de la parábola $y = a\,x^2 + b\,x + c$ que pasa por los puntos: $A(1,4)$, $B(2,1)$ y $C(6,9)$ están dados por la solución del siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 4 \\ 4a + 2b + c &= 1 \\ 36a + 6b + c &= 9 \end{aligned}$$

¿Cuál es la ecuación de la parábola? $y = x^2 - 6x + 9.$

42) **Geometría Analtica:** Los parámetros a, b, c de la ecuación de la parábola $y = a\,x^2 + b\,x + c$ que pasa por los puntos: $A(-1,7)$, $B(2,2)$ y $C(4,-2)$ están dados por la solución del siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} a - b + c &= -7 \\ 4a + 2b + c &= 2 \\ 16a + 4b + c &= -2 \end{aligned}$$

¿Cuál es la ecuación de la parábola? $y = -x^2 + 4x - 2.$

43) **Reto:** María compró cuatro libros. Todos excepto el primero costaron \$555.00 pesos. Todos excepto el segundo costaron \$590.00 pesos. Todos excepto el tercero costaron \$620.00 pesos. Todos excepto el cuarto costaron \$545.00 pesos. ¿Cuánto costó cada libro?
Primero: \$215.00, segundo: \$180.00, tercero: \$150.00, cuarto: \$225.00 pesos.

Capítulo 4

Ecuaciones de segundo grado

Por aprender...

Por qué es importante...

Las ecuaciones cuadráticas aparecerán muy frecuentemente en la resolución de problemas prácticos. También son de ayuda en la resolución de otros problemas geométricos, algebraicos y aritméticos.

4.1 Resolución de Ecuaciones de Segundo Grado

Definición 1

Ecuación de Segundo Grado

Es una ecuación que se puede escribir de la forma:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \tag{4.1}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, *y* $a \neq 0$.
A la ecuación de segundo grado también se le conoce como ecuación cuadrática, debido a que el término principal es el término cuadrático.

En la ecuación cuadrática encontramos tres términos:

$$\underbrace{a\,x^2}_{\text{Cuadrático}} + \underbrace{b\,x}_{\text{Lineal}} + \underbrace{c}_{\text{Independiente}} = 0$$

Es importante que aprendas a reconocer cada uno de los términos así como sus coeficientes.

En caso de que tengas una ecuación que no tiene la forma 4.1, pero que puedes reducirla a esa forma, entonces esa ecuación también es cuadrática.

Ejemplo 3

Las siguientes ecuaciones son ecuaciones cuadráticas.

- $2\,x^2 = 0$
- $x^2 - 1 = 80$
- $\dfrac{x^2}{5} + x = 100$
- $\sqrt{5}\,x^2 + 12\,x - \dfrac{7}{2} = 0$
- $(x-2)(3\,x+5) = 0$
- $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x-5} = 1$
- $\dfrac{1}{x+7} + \dfrac{1}{x-1} = 1$

También es importante identificar ecuaciones que **no** son cuadráticas.

Ejemplo 4

Las ecuaciones que se enlistan enseguida **no** son cuadráticas.

- $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, esta es una ecuación de tercer grado, porque el mayor exponente presente en la misma es 3.
- $x^4 - 1 = 0$, esta es una ecuación de cuarto grado, aunque a través de una transformación, podemos escribirla como si se tratara de una ecuación cuadrática.
- $5\,x + 1 = 0$, es una ecuación lineal, o de primer grado.
- $1 - x^3$. Esta ni siquiera es una ecuación, pues no tiene el signo de igualdad. Se trata de un binomio.

- $7x^5 - x^2 + 1 = 0$, es una ecuación de quinto grado.

Como podrás haber entendido, las ecuaciones se clasifican de acuerdo al exponente más grande que aparece entre sus términos.

La solución de una ecuación cuadrática es el conjunto de todos los valores que podemos sustituir en la literal para que la igualdad se reduzca a una igualdad.

Ejemplo 5

Encuentra la solución de la ecuación:

$$2x^2 = 0$$

- Para encontrar la solución de esta ecuación cuadrática vamos a traducir a palabras lo que nos está diciendo:
- En palabras nos dice: «*Pensé un número, lo multipliqué por sí mismo. Al resultado lo multipliqué por dos y finalmente obtuve cero. ¿Qué número pensé?*»
- Como el resultado de la multiplicación es cero, antes de multiplicar, debía tener cero.
- Esto nos indica que pensó el número cero, porque cero es el único número que al multiplicarlo por sí mismo nos da cero.
- Es decir, esta ecuación cuadrática tiene una única solución y es: $x = 0$.
- **Verificación:**

$$2x^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2(0)^2 = 0$$

Ejemplo 6

Encuentra la solución de la ecuación:

$$x^2 - 1 = 80$$

- Esta ecuación nos dice en palabras: «*Pensé un número, lo multipliqué por sí mismo. Al resultado le resté 1 y finalmente obtuve 80. ¿Qué número pensé?*»
- Antes de restar uno, no tenía 80, sino 81.
- Y ese es el resultado que obtuvo cuando multiplicó por sí mismo el número que pensó.
- Entonces, debió pensar el número 9, porque: $(9)(9) = 81$.
- Pero también pudo haber pensado el número -9, porque: $(-9)(-9) = 81$.
- Es decir, esta ecuación cuadrática tiene dos soluciones distintas: $x = 9$, y $x = -9$.
- Ahora hacemos la comprobación:

$$\begin{array}{lcl} x^2 - 1 = 80 & \Rightarrow & (9)^2 - 1 = 80 \\ x^2 - 1 = 80 & \Rightarrow & (-9)^2 - 1 = 80 \end{array}$$

Existen varios métodos para resolver ecuaciones cuadráticas.

Algunos métodos requieren que puedas identificar los coeficientes de la ecuación.

Llena la siguiente tabla con los coeficientes de cada ecuación donde corresponde. **Ejemplo 7**

- El coeficiente a se llama *cuadrático* porque es el número que está multiplicando a la literal elevada al cuadrado.
- El coeficiente b se llama *lineal* porque es el número que está multiplicando a la literal sin elevar al cuadrado.
- Y el coeficiente c se llama *idependiente* pues **no** contiene variables.
- Lo siguientes ejemplos servirán para mostrarlo mejor:

Ecuación	**Coeficiente**		
$a\,x^2+b\,x+c=0$	a	b	c
$2\,x^2=0$	2	0	0
$\sqrt{5}\,x^2+12\,x-\dfrac{7}{2}=0$	$\sqrt{5}$	12	$-7/2$
$\dfrac{x^2}{5}+x=100$	$1/5$	1	-100
$(x-2)(3\,x+5)=0$	3	-1	-10

- Observa que en el ejemplo de la ecuación: $(x-2)(3\,x+5)=0$, primero multiplicamos los binomios para expresar la ecuación en la forma (4.1).
- De otra forma, no concemos los coeficientes de la ecuación.
- También es importante mencionar que cuando no aparece un término, el coeficiente es cero.
- Esto es así porque $0\,x=0$.
- Pero recuerda que $a\neq 0$, porque si no aparece un término cuadrático en la ecuación, entonces, no se trata de una ecuación cuadrática.

ECUACIÓN CUADRÁTICA INCOMPLETA
Una ecuación cuadrática $a\,x^2+b\,x+c=0$ es incompleta cuando $b=0$, o $c=0$, o tal vez ambos son iguales a cero.
Si todos los coeficientes de la ecuación cuadrática son distintos de cero, entonces decimos que la ecuación es cuadrática completa. **Definición 2**

Como viste en los anteriores ejemplos, resolver ecuaciones incompletas es muy sencillo.

El siguiente ejemplo encontramos la solución de una ecuación completa.

Encuentra la(s) solución(es) de la siguiente ecuación cuadrática: **Ejemplo 8**

$$(x-2)(3\,x+5)=0$$

- Para empezar, no es una buena idea multiplicar los binomios.
- Es mejor observar que los dos binomios se están multiplicando y el resultado de esa multiplicación es igual a cero.
- Para que eso ocurra, al menos uno de los binomios debe ser cero.
- Entonces, tenemos dos casos: bien $x-2=0$, o bien $3x+5=0$.
- Ahora encontramos los valores que debe tener x para que se cumplan las anteriores condiciones:

$$\begin{array}{rcl} x-2=0 & \Rightarrow & x=2 \\ 3x+5=0 & \Rightarrow & x=-\dfrac{5}{3} \end{array}$$

- Esas son las soluciones de la ecuación cuadrática.
- Para verificar que la ecuación cuadrática es completa, necesitamos multiplicar los binomios:

$$(x-2)(3x+5)=3x^2-x-10=0$$

Para resolver las ecuaciones cuadráticas, completas o incompletas se han inventado métodos muy sencillos.

En las siguiente secciones estudiaremos algunos de ellos.

4.1.1 Método de despeje

Cuando tenemos una ecuación cuadrática incompleta es muy buena idea hacer un despeje para resolverla.

Este método es el más sencillo para este tipo de ecuaciones.

Ejemplo 1

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2+1=50$$

- Como se trata de una ecuación incompleta, que carece del término lineal, $(b=0)$ podemos resolverla fácilmente con un despeje:

$$\begin{array}{rcl} x^2+1 & = & 50 \\ x^2 & = & 50-1 \\ x^2 & = & 49 \end{array}$$

- Ahora observa que tenemos una ecuación equivalente a la inicial.
- Esta ecuación en palabras nos está diciendo: «*Pensé un número, lo multipliqué por sí mismo y obtuve 49. ¿Qué número pensé?*»
- Obviamente, pudo haber pensado el número 7.
- Pero también es posible que haya pensado el número -7, porque: $(-7)^2=49$.
- Entonces, las soluciones de la ecuación son: $x=7$, y $x=-7$.

- **Verificación:**

$$\begin{array}{ccc} x^2+1=50 & \Rightarrow & (7)^2+1=50 \\ x^2+1=50 & \Rightarrow & (-7)^2+1=50 \end{array}$$

Encuentra la(s) solución(es) de la siguiente ecuación cuadrática:

$$4x^2=100$$

Ejemplo 2

- En este caso, de nuevo, no aparece de nuevo el término lineal.
- Para simplificar la ecuación dividimos ambos lados de la igualdad entre 4, y obtenemos:

$$x^2=25$$

- Ahora traducimos a palabras la ecuación: «*Pensé un número, lo multipliqué por sí mismo y obtuve 25. ¿Qué número pensé?*»
- Pues bien pudo pensar el número 5, como pudo pensar el número -5.
- Como siempre aparecen dos casos, uno positivo y otro negativo, vamos a hacer el despeje de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x^2 &= 25 \\ x &= \pm\sqrt{25} \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

- Y entenderemos por el símbolo $\pm$ que hay dos soluciones, el primero cuando consideramos el signo $+$ y el segundo cuando consideramos el signo $-$.
- Ahora verificamos que la solución sea correcta:

$$\begin{array}{ccc} 4x^2=100 & \Rightarrow & 4(5)^2=100 \\ 4x^2=100 & \Rightarrow & 4(-5)^2=100 \end{array}$$

Ahora solamente vamos a hacer el despeje cuando encontremos una ecuación cuadrática sin término lineal.

Encuentra la solución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$3x^2+3=30$$

Ejemplo 3

- De nuevo, se trata de una ecuación cuadrática incompleta.

- Vamos a despejar la incógnita: x

$$\begin{aligned} 3x^2+3 &= 30 \\ 3x^2 &= 30-3=27 \\ x^2 &= \frac{27}{3}=9 \end{aligned}$$

- Ahora sabemos que pensó alguno de los dos números, $x=\pm 3$.
- Porque al hacer el despeje:

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 \\ x &= \pm\sqrt{9} \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

- **Verificación:**

$$\begin{aligned} 3x^2+3=30 \quad &\Rightarrow \quad 3(3)^2+3=30 \\ 3x^2+3=30 \quad &\Rightarrow \quad 3(-3)^2+3=30 \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Encuentra la solución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2+\frac{3}{4}=1$$

- Empezamos haciendo el despeje de la literal:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

- Ahora aplicamos las leyes de los exponentes y de los radicales:

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2}=\pm\frac{(1)^{1/2}}{(4)^{1/2}}=\pm\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} \\ x &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Y las soluciones son: $x=\frac{1}{2}$, y $x=-\frac{1}{2}$.
- **Verificación:**

$$\begin{aligned} x^2+\frac{3}{4}=1 \quad &\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=1 \\ x^2+\frac{3}{4}=1 \quad &\Rightarrow \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=1 \end{aligned}$$

Encuentra la solución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + 5 = 12$$

Ejemplo 5

- Despejando la literal x obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &= 12 \\ x^2 &= 12 - 5 = 7 \\ x &= \pm\sqrt{7} \end{aligned}$$

- Lo cual nos indica que las soluciones de la ecuación son $x = \sqrt{7}$, y $x = -\sqrt{7}$.
- **Verificación:**

$$\begin{aligned} x^2 + 5 = 12 \quad &\Rightarrow \quad (\sqrt{7})^2 + 5 = 12 \\ x^2 + 5 = 12 \quad &\Rightarrow \quad (-\sqrt{7})^2 + 5 = 12 \end{aligned}$$

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + 12 = 5$$

Ejemplo 6

- Hacemos el despeje:

$$\begin{aligned} x^2 + 12 &= 5 \\ x^2 &= 5 - 12 = -7 \\ x^2 &= -7 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a traducir lo que esta última igualdad nos dice en palabras: «*Pensé un número, lo multipliqué por sí mismo y obtuve* -7».
- Pero al multiplicar un número positivo por sí mismo obtenemos un numero positivo,
- Por otra parte, cuando multiplicamos un número negativo por sí mismo, también obtenemos un resultado positivo.
- Lo que esto nos indica es que **no** hay algún número real que al multiplicarse por sí mismo nos dé como resultado un número negativo.
- Al terminar el despeje obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 &= -7 \\ x &= \pm\sqrt{-7} \end{aligned}$$

- Debido a esto, se han inventado los números imaginarios.

Definición 1

NÚMERO IMAGINARIO

El número i es la unidad imaginaria que tiene la siguiente propiedad:

$$i^2 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad i = \sqrt{-1}$$

Un número imaginario es un múltiplo de la unidad imaginaria.

Entonces, la solución del último ejemplo puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{-7} \\ &= \pm\sqrt{(-1)(7)} \\ &= \pm\sqrt{-1}\sqrt{7} \\ &= \pm i\sqrt{7} \end{aligned}$$

Con la propiedad de que $i^2 = -1$.

Otra forma de definir al número imaginario i es la siguiente:

Comentario

El número imaginario i la solución positiva de la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + 1 = 0$$

Porque si despejamos la incógnita, obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ x &= \pm\sqrt{-1} \end{aligned}$$

La solución positiva es: $x = \sqrt{-1}$, que es precisamente como definimos al número i.

Nosotros podemos sumar un número imaginario con un número real. El resultado es un número complejo.

Definición 2

NÚMERO COMPLEJO

Es un número que tiene una parte real y una parte imaginaria:

$$z = a + i\,b$$

donde z es un número complejo, $a, b \in \mathbb{R}$, y el número i es la unidad imaginaria.

Por ejemplo, el número $3 + 2\,i$ es un número complejo. En este número complejo, 3 es la parte real y 2 es la parte imaginaria.

Ejemplo 7

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$(x-5)^2 + 3 = 1$$

- En este caso, la ecuación puede expresarse de la forma 4.1, pero no se trata de una ecuación incompleta.
- Sin embargo, dado que ya está factorizada en forma de un binomio al cuadrado una parte de la

ecuación, es más fácil resolverla a través de un despeje.

$$\begin{aligned}(x-5)^2+3 &= 1\\ (x-5)^2 &= 1-3=-2\\ x-5 &= \pm\sqrt{-2}\\ x &= 5\pm\sqrt{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 5\pm\sqrt{(-1)(2)}\\ x &= 5\pm\sqrt{-1}\sqrt{2}\\ x &= 5\pm i\sqrt{2}\end{aligned}$$

- Las soluciones de la ecuación son: $x_1=5+i\sqrt{2}$, y $x_2=5-i\sqrt{2}$.

Entonces, si encuentras una ecuación cuadrática completa que puedes factorizar fácilmente, te conviene, mejor, factorizarla y después hacer un despeje.

Este es el método que vamos a estudiar en la siguiente sección.

4.1.2 Método de factorización

Ahora utilizaremos la factorización que estudiamos en la sección *Factorización*.

Recuerda que una ecuación cuadrática se obtiene, algunas veces, debido a la multiplicación de un monomio por un binomio.

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2-2x=0$$

Ejemplo 1

- Aquí podemos aplicar la ley distributiva, porque la literal x aparece en ambos términos:

$$x^2-2x=x(x-2)=0$$

- Ahora tenemos el producto de dos cantidades: x es la primera y la segunda es $(x-2)$.
- Cuando multiplicamos estas cantidades, el resultado es igual a cero.
- Esto nos indica que al menos una de esas cantidades debe ser cero.
- Entonces, tenemos dos casos:
  - ✓ Bien $x=0$ .... *Primera solución*
  - ✓ Bien $x-2=0$, que sugiere: $x=2$ .... *Segunda solución*
- Entonces, las raíces de la ecuación son: $x=0$, y $x=2$.
- **Verificación:**

$$\begin{aligned}x^2-2x=0 &\quad\Rightarrow\quad (0)^2-2(0)=0\\ x^2-2x=0 &\quad\Rightarrow\quad (2)^2-2(2)=0\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$12\,x^2 - 21\,x = 0$$

- En este caso, el factor común es: $3\,x$.
- Aplicamos la ley distributiva factorizándolo:

$$12\,x^2 - 21\,x = 3x\,(4\,x - 7) = 0$$

- Observa que si multiplicas $3x\,(4\,x-7)$ obtienes el binomio que forma parte de la ecuación original.
- Para que el resultado de esta multiplicación sea cero, cualquiera de los factores debe ser cero, bien $3\,x = 0$, bien $4\,x - 7 = 0$.
- En el primer caso, es fácil concluir que $x = 0$.
- Para el segundo caso, tenemos que despejar x:

$$4\,x - 7 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{7}{4}$$

- Entonces, las raíces de la ecuación cuadrática son: $x_1 = 0$, y $x_2 = 7/4$.
- **Verificación:**

$$\begin{array}{lcl} 12\,x^2 - 21\,x = 0 & \Rightarrow & 12(0)^2 - 21(0) = 0 \\ 12\,x^2 - 21\,x = 0 & \Rightarrow & 12\left(\frac{7}{4}\right)^2 - 21\left(\frac{7}{4}\right) = 0 \end{array}$$

Otras veces la ecuación se originó con la multiplicación de dos binomios.

Cuando sabemos qué binomios se multiplicaron para obtener la ecuación cuadrática, podemos fácilmente resolverla.

Ejemplo 3

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + 12\,x + 35 = 0$$

- Empezamos observando que ahora tenemos un trinomio cuadrado del lado izquierdo de la igualdad.
- Así que tenemos que probar primero si se trata de un trinomio cuadrado perfecto.
- Para eso sacamos la mitad de 12 y lo elevamos al cuadrado: $6^2 = 36 \neq 35$.
- Esto nos indica que el trinomio cuadrado no es perfecto.
- Ahora tenemos que encontrar dos números que sumados den 12 y multiplicados den 35.

- Esos número son 5 y 7.

$$\begin{array}{rcl} 5+7 & = & 12 \\ 5\times 7 & = & 35 \end{array}$$

- Entonces, la ecuación puede escribirse como:

$$x^2+12\,x+35=(x+5)(x+7)=0$$

- Para que el resultado de la multiplicación sea igual a cero, al menos uno de los factores debe ser cero:

$$\begin{array}{lcl} x+5=0 & \Rightarrow & x=-5 \\ x+7=0 & \Rightarrow & x=-7 \end{array}$$

- Así hemos encontrado las soluciones.
- Ahora hacemos la verificación:

$$\begin{array}{lcl} x^2+12\,x+35=0 & \Rightarrow & (-5)^2+12(-5)+35=0 \\ x^2+12\,x+35=0 & \Rightarrow & (-7)^2+12(-7)+35=0 \end{array}$$

Ejemplo 4

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2+8\,x+16=0$$

- Vamos a factorizar el trinomio cuadrado.
- Primero verificamos si se trata de un trinomio cuadrado perfecto.
- La mitad de 8 es 4 y $4^2=16$.
- Esto nos indica que sí se trata de un cuadrado perfecto.

$$x^2+8\,x+16=(x+4)^2=0$$

- Ahora despejamos el valor de x:

$$\begin{array}{rcl} (x+4)^2 & = & 0 \\ x+4 & = & 0 \\ x & = & -4 \end{array}$$

- En este caso, las dos raíces de la ecuación son la misma raíz: $x=-4$.
- Verificación:

$$x^2+8\,x+16=0 \quad\Rightarrow\quad (-4)^2+8(-4)+16=0$$

Ejemplo 5

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

- Es evidente que el trinomio $x^2 - 2x - 24$ no es cuadrado perfecto.
- Para factorizar el trinomio cuadrado debemos encontrar dos números que sumados den -2 y multiplicados den -24.
- Como el producto de los números es negativo, los números que buscamos tienen signos cambiados: uno es positivo y el otro negativo.
- Y como la suma de esos números es -2, el mayor debe ser negativo.
- Empezamos factorizando 24:
$$24 = 2^3 \cdot 3$$
- Podemos usar 6 y 4.
- Como el mayor de los números es positivo, tenemos -6 y 4.
- Estos números son los que estamos buscando, porque:
$$\begin{aligned} -6+4 &= -2 \\ (-6)(4) &= -24 \end{aligned}$$
- Entonces, la ecuación puede reescribirse como:
$$x^2 - 2x - 24 = (x-6)(x+4) = 0$$
- Y las raíces son: $x = 6$ y $x = -4$.
- **Verificación:**
$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 24 = 0 \quad &\Rightarrow \quad (6)^2 - 2(6) - 24 = 0 \\ x^2 - 2x - 24 = 0 \quad &\Rightarrow \quad (-4)^2 - 2(-4) - 24 = 0 \end{aligned}$$

Recuerda, la factorización es una base importante.

Si no recuerdas la factorización, tendrás más problemas cuando tengas que resolver una ecuación cuadrática.

Ejemplo 6

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$2x^2 - x - 15 = 0$$

- En este caso, debemos factorizar un trinomio con coeficiente del término cuadrático distinto de 1.

- Así que posiblemente aplicaremos el caso: $(a\,x+b)(c\,x+d)$.
- Sabemos que $a\cdot c=2$, así que $a=2$ y $c=1$.
- Ahora nos falta solamente encontrar los números b y c.
- Sabemos que el coeficiente del término lineal en este caso es: $b\,c+a\,d$.
- Y que el término independiente es: $b\,d=-15$.
- Así que tenemos dos opciones,
  - ✓ Bien $b=3$, $d=5$, con alguno de ellos negativo,
  - ✓ Bien $b=5$, $d=3$, con uno de ellos negativo.
- Probamos el primero de los casos:

$$\begin{aligned}(2\,x+3)(x-5) &= 2\,x^2+(-10+3)\,x-15\\ &= 2\,x^2-7\,x-15\end{aligned}$$

- Siguiente caso: cambiamos solamente el signo de lugar:

$$\begin{aligned}(2\,x-3)(x+5) &= 2\,x^2+(10-3)\,x-15\\ &= 2\,x^2+7\,x-15\end{aligned}$$

- Tampoco funcionó.
- Siguiente caso:

$$\begin{aligned}(2\,x-5)(x+3) &= 2\,x^2+(6-5)\,x-15\\ &= 2\,x^2+x-15\end{aligned}$$

- Observa que la única diferencia está en el signo del coeficiente del término lineal.
- Esto indica que solamente hay que cambiar los signos de posición en los binomios:

$$\begin{aligned}(2\,x+5)(x-3) &= 2\,x^2+(-6+5)\,x-15\\ &= 2\,x^2-x-15\end{aligned}$$

- Eso debimos saberlo del hecho de que el mayor era el negativo, dado que el resultado de la suma es un número negativo.
- Entonces, la ecuación queda:

$$2\,x^2-x-15=(2\,x+5)(x-3)=0$$

- Ahora es fácil encontrar las raíces: alguno de los factores se debe hacer cero para que el producto indicado sea igual a cero:

$$\begin{aligned}2\,x+5=0 \qquad &\Rightarrow \qquad x=-\frac{5}{2}\\ x-3=0 \qquad &\Rightarrow \qquad x=3\end{aligned}$$

- Verificación:

$$
\begin{array}{lcl}
2x^2 - x - 15 = 0 & \Rightarrow & 2\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(-\frac{5}{2}\right) - 15 = 0 \\
2x^2 - x - 15 = 0 & \Rightarrow & 2(3)^2 - (3) - 15 = 0
\end{array}
$$

Ejemplo 7

Eunice compró cierto número de docenas naranjas por \$200.00 pesos. Si hubiera pagado \$5.00 pesos más por cada docena, hubiera recibido dos docenas menos por la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto le costó cada docena?

- Para resolver este problema aplicado empezamos definiendo variables
  - ✓ n va a representar el número de docenas de naranjas que compró, y
  - ✓ p va a representar el precio que pagó por cada docena.
- Ahora sabemos que pagó en total \$200.00 pesos por las n docenas que compró, es decir,
- Si multiplico el precio de cada docena por el número de docenas de naranjas que compró, debo obtener 200:

$$p \cdot n = 200$$

- A nosotros nos piden encontrar el precio de cada docena de naranjas, así que vamos a despejar la otra variable:

$$n = \frac{200}{p}$$

  Así, cuando sustituyamos, obtendremos una ecuación en términos de p, que es lo que deseamos calcular.
- Por otra parte, si hubiera pagado $p+5$ (cinco pesos más por cada docena), hubiera recibido $n-2$ (dos docenas menos) por la misma cantidad de dinero, es decir:

$$(n-2)(p+5) = 200$$

- En esta ecuación tenemos dos incógnitas.
- Para reducirla a una incógnita sustituimos el despeje de la primera ecuación que encontramos:

$$(n-2)(p+5) = 200 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{200}{p} - 2\right)(p+5) = 200$$

- Ahora vamos a simplificar la ecuación.
- Para eso, multiplicamos ambos lados de la ecuación por p:

$$
\begin{array}{rcl}
p\left(\frac{200}{p} - 2\right)(p+5) & = & 200\,p \\
(200 - 2\,p)(p+5) & = & 200\,p \\
\cancel{200\,p} + 1\,000 - 2\,p^2 - 10\,p & = & \cancel{200\,p} \\
-2\,p^2 - 10\,p + 1\,000 & = & 0 \\
2\,p^2 + 10\,p - 1\,000 & = & 0 \\
p^2 + 5\,p - 500 & = & 0
\end{array}
$$

- Ahora debemos factorizar esta ecuación cuadrática.
- Buscamos dos números que sumados den 5 y multiplicados den 500.
- Esos números son: 25 y -20:

$$\begin{aligned} p^2+5\,p-500 &= 0 \\ (p+25)(p-20) &= 0 \end{aligned}$$

- Nosotros sabemos que el precio de cada docena debe ser un número positivo, por eso: $p=20$.
- Entonces, compró: $n=200/20=10$ docenas de naranjas.
- Vamos a comprobar el resultado:

✓ Si compró $n=10$ docenas de naranjas a \$20.00 pesos cada una, pagó $(10)(20)=200$ pesos.

✓ Si hubiera pagado \$5.00 pesos más por cada docena hubiera pagado \$25.00 pesos por cada una, y hubiera recibido $n-2=8$ docenas de naranjas.

✓ Por eso hubiera pagado: $(8)(25)=200$ pesos.

Comentario

Recuerda que no todos los trinomios cuadrados pueden factorizarse usando números enteros.

Algunas veces se requieren de números irracionales. Esos casos requieren de otro método para su solución.

Este otro método de solución es el caso más general de ecuación cuadrática, porque incluye todos los posibles casos de raíces para este tipo de ecuaciones.

Con este nuevo método podremos clasificar las raíces de las ecuaciones cuadráticas en tres casos. Cada uno de esos casos está relacionado con un número que se conoce como discriminante, porque de cierta manera discrimina entre las distintas raíces de la ecuación cuadrática.

El discriminante es parte de una fórmula que ya debes conocer, si es que pudiste resolver el último reto.

...y si no la conoces, de cualquier manera la deberás aprender.

Se trata de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, es decir, la fórmula «*mágica*» que resuelve cualquier ecuación cuadrática.

Eso es lo que estudiaremos en la siguiente sección.

4.1.3 Método de fórmula general

Ahora vamos a utilizar el método infalible.

La siguiente fórmula, que llamaremos «*fórmula general*» nos ayudará a resolver cualquier ecuación cuadrática.

Fórmula General

La fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado es la siguiente:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}$$

donde a,b,c son los coeficientes de la ecuación cuadrática: $a\,x^2+b\,x+c=0$.

Definición 1

Para resolver ecuaciones de segundo grado usando la fórmula general, primero debemos identificar los valores de los coeficientes.

Ejemplo 1

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

- Observa que en este caso no podemos hacer la factorización, porque:
  - ✓ El trinomio cuadrado **no** es perfecto, y
  - ✓ No hay dos números enteros que sumados den 2 y multiplicados den -1.
- En estos casos, la fórmula general es la que nos salva.
- Los coeficientes en este caso son: $a = 1$, $b = 2$, y $c = -1$.
- Vamos a sustituir los coeficientes en la fórmula y después realizamos los cálculos que quedan indicados.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - (-4)}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} \end{aligned}$$

- Podemos ver que el radicando puede ser factorizado como $8 = 2^3 = 2 \cdot 2^2$, y después, simplificar:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2 \cdot 2^2}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

- Y ahora podemos simplificar, dividiendo entre dos:

$$\begin{aligned} x = &= -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \pm \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} \\ &= -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

- Y las soluciones de la ecuación cuadrática son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + \sqrt{2} \\ x_2 &= -1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

- Para verificar que las soluciones de la ecuación cuadrática son correctas podemos utilizar el método de factorización.

- Al sumar las raíces debemos obtener el negativo del coeficiente del término lineal, y al multiplicarlos, debemos obtener término independiente.

$$\begin{array}{ccc} x_1 + x_2 = -2 & \Rightarrow & \left(-1+\cancel{\sqrt{2}}\right)+\left(-1-\cancel{\sqrt{2}}\right) \\ (x_1)(x_2) = -1 & \Rightarrow & \left(-1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(-1-\sqrt{2}\right) \end{array}$$

En la comprobación tanto la suma de las raíces como la multiplicación son muy sencillas.

Para realizar la multiplicación de una manera sencilla aplica el producto de binomios conjugados: el resultado es una diferencia de cuadrados.

Reto 1

Explica por qué la suma de las raíces debe ser igual al negativo del coeficiente del término lineal

Ejemplo 2

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$5\,x^2 + 57\,x - 36 = 0$$

- Esta ecuación sí se puede resolver por el método de factorización, pero sería muy laborioso.
- Preferimos usar el método de la fórmula general:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\ &= \frac{-(57) \pm \sqrt{(57)^2 - 4(5)(-36)}}{2(5)} \\ &= \frac{-57 \pm \sqrt{3249 - (-720)}}{10} \\ &= \frac{-57 \pm \sqrt{3969}}{10} \end{aligned}$$

- El número $3969 = 63^2$, así que podemos simplificar el radicando:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-57 \pm \sqrt{63^2}}{10} \\ &= \frac{-57 \pm 63}{10} \end{aligned}$$

- Ahora encontramos las dos raíces:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-57+63}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \\ x_2 &= \frac{-57-63}{10} = \frac{-120}{10} = -12 \end{aligned}$$

- Esto quiere decir que podemos reescribir la ecuación de la siguiente manera equivalente:

$$(x+12)\left(x - \frac{3}{5}\right) = 0$$

- Y al multiplicar ambos lados de la igualdad por 5, obtenemos una ecuación equivalente que no incluye fracciones:
$$(x+12)(5x-3)=0$$

- Ahora que conoces la factorización, se te queda como ejercicio multiplicar los binomios para verificar que las ecuaciones son equivalentes y después realizar la comprobación sustituyendo las raíces en la ecuación.

Algunas veces encontraremos ecuaciones que al simplificarse, se reducen a una ecuación cuadrática.

En estos casos, después de haber expresado la ecuación en la forma (4.1), debemos reconocerla como tal y proceder a su solución por cualquiera de los métodos que ya hemos estudiado.

Ejemplo 3

Resuelve la siguiente ecuación:
$$\frac{5}{x+2}-\frac{1}{x-2}=3$$

- Esta ecuación, para empezar, ni siquiera parece cuadrática.
- Vamos a simplificarla, para ver si podemos resolverla usando la fórmula general.
- Para esto, vamos a multiplicar ambos lados de la igualdad por ambos denominadores:

$$\begin{aligned}
\frac{5\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}}-\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} &= 3(x+2)(x-2)\\
5(x-2)-(x+2) &= 3(x^2-4)\\
5x-10-x-2 &= 3x^2-12\\
-3x^2+4x &= 0
\end{aligned}$$

- Esta ecuación cuadrática puede resolverse fácilmente utilizando el método de factorización.
- Sin embargo, vamos a utilizar la fórmula general:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&= \frac{-(4)\pm\sqrt{(4)^2-4(-3)(0)}}{2(-3)}\\
&= \frac{-4\pm\sqrt{16-(0)}}{-6}\\
&= \frac{-4\pm\sqrt{16}}{-6}
\end{aligned}$$

- Como $\sqrt{16}=4$, tenemos:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-4\pm 4}{-6}\\
x_1 &= \frac{-4+4}{-6}=0\\
x_2 &= \frac{-4-4}{-6}=\frac{-8}{-6}=\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

- Ahora tú realiza la comprobación.

Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{8}{x-1}-\frac{1}{x+1}=1$$

Ejemplo 4

- De nuevo, simplificamos la ecuación, multiplicando ambos lados de la igualdad por ambos denominadores:

$$\begin{aligned}
\frac{8\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}-\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} &= (x-1)(x+1)\\
8(x+1)-(x-1) &= x^2-1\\
8x+8-x+1 &= x^2-1\\
7x+9 &= x^2-1\\
-x^2+7x+10 &= 0
\end{aligned}$$

- Pero todavía podemos multiplicar por -1 ambos lados de la anterior igualdad y obtener:

$$x^2-7x-10=0$$

- Ahora podemos aplicar la fórmula general:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&= \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(-10)}}{2(1)}\\
&= \frac{7\pm\sqrt{49-(-40)}}{2}\\
&= \frac{7\pm\sqrt{89}}{2}
\end{aligned}$$

- Ahora podemos encontrar ambos valores de las raíces:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{7+\sqrt{89}}{2}\\
x_2 &= \frac{7-\sqrt{89}}{2}
\end{aligned}$$

- Se te queda la comprobación como ejercicio.

Algunas ecuaciones que no son cuadráticas, se pueden transformar en ecuaciones cuadráticas y resolverse usando los métodos que ya hemos estudiado.

El siguiente ejemplo es una muestra de esos casos.

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$2x^4+9x^2-5=0$$

Ejemplo 5

- Empezamos notando que esta ecuación tiene solamente exponentes pares.
- Esto nos sugiere definir: $u = x^2$, lo cual implica: $u^2 = x^4$.
- Al sustituir estos valores en la ecuación obtenemos una nueva ecuación equivalente:

$$2\,u^2 + 9\,u - 5 = 0$$

- Ahora tenemos una ecuación cuadrática que podemos resolver utilizando la fórmula general:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\ &= \frac{-(9) \pm \sqrt{(9)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} \\ &= \frac{-9 \pm \sqrt{81 - (-40)}}{4} \\ &= \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{4} \end{aligned}$$

- Sabemos que $\sqrt{121} = 11$, entonces,

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-9+11}{4} = \frac{1}{2} \\ u_2 &= \frac{-9-11}{4} = -5 \end{aligned}$$

- Pero $u_1 = x_1^2$, es decir,

$$\begin{array}{ccc} x_1^2 = \dfrac{1}{2} & \Rightarrow & x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ & \Rightarrow & x_{11} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ & \Rightarrow & x_{12} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

- Y por otra parte,

$$\begin{array}{ccl} x_2^2 = -5 & \Rightarrow & x = \pm\sqrt{-5} = \pm\,i\,\sqrt{5} \\ & \Rightarrow & x_{21} = i\,\sqrt{5} \\ & \Rightarrow & x_{22} = -i\,\sqrt{5} \end{array}$$

- En este caso, debido a que la ecuación es de cuarto grado, tiene cuatro raíces.

Es importante observar que una ecuación de cuarto grado tiene cuatro raíces. Igualmente, una ecuación de tercer grado tiene tres raíces y una ecuación de segundo grado siempre tiene dos raíces.

Seguramente te preguntas: «*¿por qué algunas ecuaciones de segundo grado tienen una sola raíz?*» Porque en estos casos las dos raíces son iguales.

Por ejemplo, de la ecuación: $(x-1)^2 = 0$, tiene dos raíces idénticas, siendo ambas $x = 1$.

Algunos problemas que no parecen tener relación con las ecuaciones cuadráticas pueden expresarse como una ecuación cuadrática a través de una transformación.

Resuelve:

$$\sqrt[5]{x^2} + 8\sqrt[5]{x} = 9$$

Ejemplo 6

- Vamos a hacer una transformación.
- Vamos a definir $u = \sqrt[5]{x}$, así: $u^2 = \sqrt[5]{x^2}$.
- Por lo que la ecuación puede transformarse como:

$$\sqrt[5]{x^2} + 8\sqrt[5]{x} = 9 \qquad \Rightarrow \qquad u^2 + 8\,u = 9$$

- Ahora podemos resolver esta ecuación cuadrática por factorización o por fórmula general.
- Aplicamos la fórmula general:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\ &= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - (-36)}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2} \end{aligned}$$

- Ahora calculamos los valores de las dos raíces de la ecuación transformada:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-8+10}{2} = 1 \\ u_2 &= \frac{-8-10}{2} = -9 \end{aligned}$$

- **Método de factorización:**

$$u^2 + 8\,u - 9 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (u+9)(u-1) = 0$$

- Las raíces son inmediatas a partir de este método.
- Ahora volvemos a la definición que hicimos: $u = \sqrt[5]{x}$ y sustituimos el valor de u para encontrar el verdadero valor de x:

$$\begin{aligned} 1 = \sqrt[5]{x} \qquad &\Rightarrow \qquad x = 1^5 = 1 \\ -9 = \sqrt[5]{x} \qquad &\Rightarrow \qquad x = (-9)^5 = -59049 \end{aligned}$$

- Y esas dos son las raíces que queríamos calcular.

Observa que en el ejemplo anterior aplicamos algunas de las leyes de los exponentes y los radicales para transformar la ecuación en una que sí supieramos cómo resolver.

En otros problemas tendremos que aplicar además productos notables y algunas veces factorización.

Ejemplo 7

Resuelve y verifica la raíz positiva de:

$$\sqrt{3\,x+1}+\frac{35}{\sqrt{3\,x+1}}=3\sqrt{x}$$

- En este ejercicio debes recordar las leyes de los exponentes y de los radicales y los productos notables.

- Si no recuerdas bien estos tema, es una buena idea estudiarlos de nuevo.

- En este caso, vamos a multiplicar ambos lados de la ecuación por $\sqrt{3\,x+1}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3\,x+1}\left(\sqrt{3\,x+1}+\frac{35}{\sqrt{3\,x+1}}\right) &= 3\sqrt{x}\sqrt{3\,x+1}\\
(3\,x+1)+35 &= 3\sqrt{x\,(3\,x+1)}\\
\frac{3\,x+36}{3} &= \frac{3\sqrt{x\,(3\,x+1)}}{3}\\
x+12 &= \sqrt{x\,(3\,x+1)}
\end{aligned}$$

- Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned}
(x+12)^2 &= \left(\sqrt{x\,(3\,x+1)}\right)^2\\
x^2+24\,x+144 &= x\,(3\,x+1)\\
x^2+24\,x+144 &= 3\,x^2+x\\
-2\,x^2+23\,x+144 &= 0\\
2\,x^2-23\,x-144 &= 0
\end{aligned}$$

- Ahora aplicamos la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}\\
&= \frac{-(-23)\pm\sqrt{(-23)^2-4\,(2)(-144)}}{2\,(2)}\\
&= \frac{23\pm\sqrt{529-(-1152)}}{4}\\
&= \frac{23\pm\sqrt{1681}}{4}
\end{aligned}$$

- Como $\sqrt{1681}=41$, tenemos:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{23+41}{4}=\frac{64}{4}=16\\
x_2 &= \frac{23-41}{4}=\frac{-18}{4}=-\frac{9}{2}=-4.5
\end{aligned}$$

- Finalmente, vamos a probar la raíz positiva:

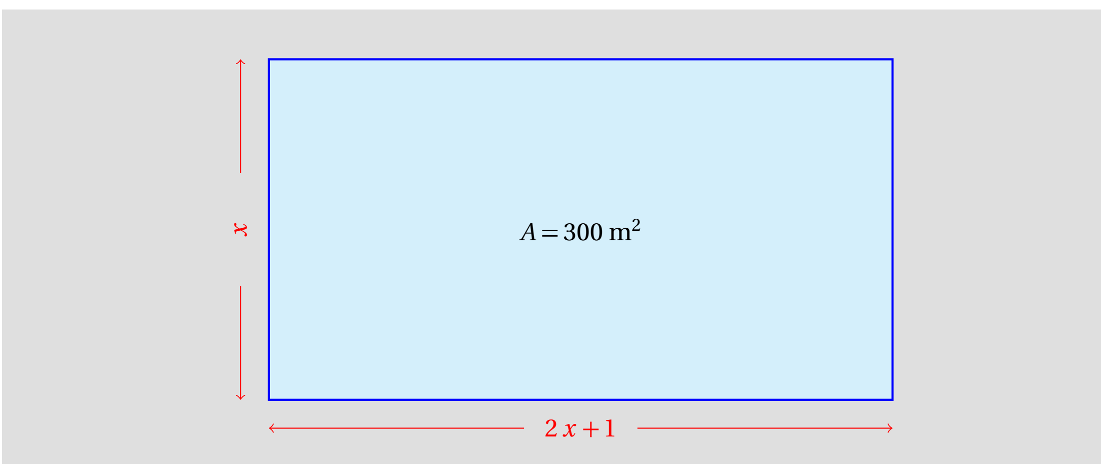
$$\begin{aligned}
\sqrt{3\,x+1}+\frac{35}{\sqrt{3\,x+1}} &= 3\,\sqrt{x}\\
\sqrt{3(16)+1}+\frac{35}{\sqrt{3(16)+1}} &= 3\,\sqrt{16}\\
\sqrt{49}+\frac{35}{\sqrt{49}} &= 3(4)\\
7+\frac{35}{7} &= 12\\
7+5 &= 12
\end{aligned}$$

- Y 16 satisface la ecuación, por lo que es una raíz de la misma.

Ahora vamos a resolver algunos problemas cotidianos con el apoyo de las ecuaciones cuadráticas.

El largo de un terreno es un metro mayor al doble del ancho. Su área es de 300 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones? **Ejemplo 8**

- Sabemos que el largo es un metro más largo que el doble del ancho.
- Vamos a realizar un dibujo para representar la información del problema:



- Si x es su ancho, el largo será: $2\,x+1$.
- Y su área es de 300 m^2, entonces la ecuación que modela esta situación es:

$$\begin{aligned}
\text{(ancho)(largo)} &= \text{Área del terreno}\\
x\,(2\,x+1) &= 300
\end{aligned}$$

- Ahora tratamos de simplificar la ecuación:

$$x\,(2\,x+1)=300 \qquad \Rightarrow \qquad 2\,x^2+x-300=0$$

- Ahora aplicamos la fórmula general:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-300)}}{2(2)} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (-2400)}}{4} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{2401}}{4}
\end{aligned}
$$

- Ahora podemos encontrar las raíces de la ecuación:

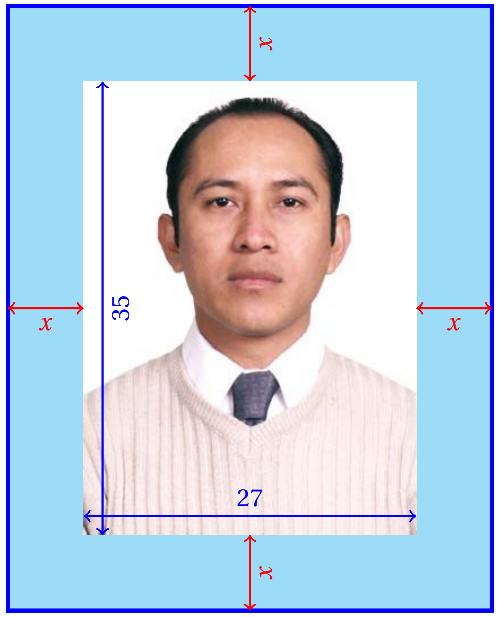
$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-1 + \sqrt{2401}}{4} = \frac{-1 + 49}{4} = \frac{48}{4} = 12 \\
x_2 &= \frac{-1 - \sqrt{2401}}{4} = \frac{-1 - 49}{4} = -\frac{50}{4} = -12.5
\end{aligned}
$$

- Esto nos indica que el ancho del terreno original era de 12 metros.
- El largo es de: $(12)(2) + 1 = 25$.
- Entonces, el área del terreno es de: $(12)(25) = 300\ \text{m}^2$.
- La solución satisface las condiciones del problema, por tanto es correcta.
- Observa que la raíz: $x = -12.5$ satisface la ecuación, pero **no** es la solución del problema porque el ancho del terreno no puede ser un número negativo.

Ejemplo 9

Una fotografía de 27 cm × 35 cm se va a enmarcar. Para esto, se le colocará alrededor una banda de papel especial para adornarla. El ancho del papel alrededor de la fotografía es constante. ¿Cuánto debe medir este ancho para que el aumento en el área total de la fotografía con su marco de papel sea de 335 cm^2?

- Empezamos realizando una figura para tener una mejor idea del problema:



- De la figura se ve inmediatamente que la fotografía con marco tendrá ahora $(27+2\,x)$ cm de ancho y $(35+2\,x)$ cm de altura.
- Entonces, el área final será: $(27+2\,x)(35+2\,x)$.
- Necesitamos que el área aumente en 335 cm^2.
- El área de la fotografía sin el marco es de: $27\times 35 = 945$ cm^2.
- Así que el área de la fotografía con marco será de: $945+335 = 1\,280$ cm^2.
- La ecuación que modela esta situación es:

$$(27+2\,x)(35+2\,x) = 1\,280$$

- Vamos a desarrollar el producto de los binomios para poder después resolverla por el método de fórmula general:

$$\begin{aligned}(27+2\,x)(35+2\,x) &= 1\,280\\ 945+124\,x+4\,x^2 &= 1\,280\\ 4\,x^2+124\,x-335 &= 0\end{aligned}$$

- Ahora aplicamos la fórmula general para resolver esta ecuación:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}\\ &= \frac{-(124)\pm\sqrt{(124)^2-4\,(4)(-335)}}{2\,(4)}\\ &= \frac{-124\pm\sqrt{15376-(-5360)}}{8}\\ &= \frac{-124\pm\sqrt{20736}}{8}\end{aligned}$$

- Finalmente, sabiendo que $\sqrt{20\,736} = 144$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-124 \pm 144}{8} \\ x_1 &= \frac{-124+144}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2.5 \\ x_2 &= \frac{-124-144}{8} = -\frac{268}{8} = -\frac{67}{2} = -33.5 \end{aligned}$$

- Pero no es posible agregar -33.5 cm al ancho y largo de la fotografía.
- Es decir, la única solución de la ecuación que tiene sentido físico es: $x = 2.5$ cm.
- Ahora vamos a comprobar que la solución sea correcta.

Comentario

✓ Inicialmente las dimensiones de la fotografía eran de 27×35 cm ^{2}.

✓ Como se agregaron 2.5 cm más, las dimensiones de la fotografía con su marco son ahora de: $27 + 2(2.5) = 32$ cm por $35 + 2(2.5) = 40$ cm.

✓ El área de la fotografía con su marco es ahora de: $32 \times 40 = 1\,280$ cm^2.

Los problemas aplicados de las ecuaciones cuadráticas generalmente requieren de mucho cuidado al hacer sustituciones, porque algunas veces ahí es donde se cometen con mayor frecuencia los errores a la hora de resolverlos.

Ten cuidado con eso.

4.1.4 Método Gráfico

El último método que estudiaremos es el más sencillo.

Se trata de considerar a la ecuación como una máquina que transforma los números. Para eso, crearemos una función.

Definición 1

Función (Definición Informal)
Es una máquina en forma de una fórmula que nos ayuda a transformar los números. Nosotros le damos un valor y la máquina nos devuelve a lo más otro valor. Es posible que nosotros le demos un valor y ella no nos devuelva valor alguno, pero ***no*** *es posible que cuando le demos un valor la máquina nos devuelva más de uno.*

Los valores que la máquina puede transformar, o sea, los valores que nosotros le vamos a dar a la máquina forman un conjunto que se llama dominio de la función. Los valores que la máquina nos devuelve forman otro conjunto que se llama rango o contradominio de la función.

Para entender mejor este concepto, puedes ver el diagrama que estudiamos en la sección **??** en la página **??**.

Algunos ejemplos de funciones son:

✓ $f(x) = 1 - 2x$

✓ $g(x) = x^2$

✓ $h(x) = \sqrt{x+1}$

✓ $y = \dfrac{1}{x}$

A partir de la ecuación $a x^2 + b x + c = 0$, creamos la función: $y = a x^2 + b x + c$.

Vamos a graficar esta función y después vamos a encontrar los puntos donde la gráfica de la función corta al eje x, porque precisamente en el eje x, $y = 0$.

Ejemplo 1

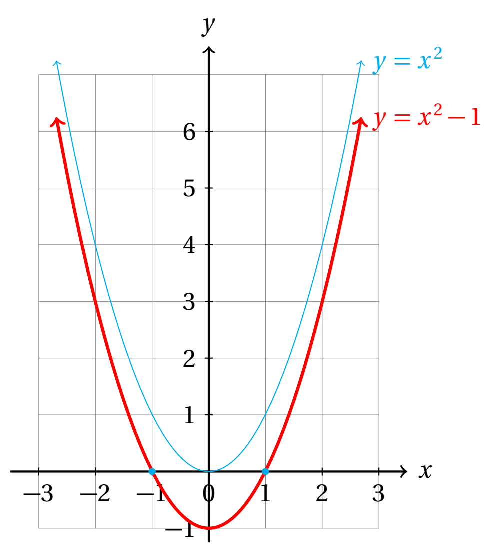
Por el método gráfico, resuelve la ecuación:

$$x^2 - 1 = 0$$

- Lo que deseamos encontrar son los valores de x para los cuales $x^2 - 1$ se hace cero.
- Pero $x^2 - 1 = 0$ en palabras nos dice: «*pensé un número, lo multipliqué por sí mismo, le resté uno y obtuve cero*».
- Entonces, antes de restar 1, tenía 1, porque la diferencia fue cero.

$$x^2 = 1$$

- Ahora la ecuación transformada dice: «*pensé un número, cuando lo multipliqué por sí mismo obtuve uno*».
- Aquí la solución inmediata es $x = 1$.
- Pero si piensas un poco más, te darás cuenta que $x = -1$ también es solución, porque: $(-1)^2 = 1$.
- Los valores que deseabamos encontrar son: $x = 1$ y $x = -1$.
- Ahora podemos graficar la función: $y = x^2 - 1$.



- De la gráfica podemos ver que las intersecciones sobre el eje x son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

- Nosotros buscamos los puntos donde la gráfica corta al eje x, porque sobre este eje $y = 0$, y tenemos en esos casos, la solución de la ecuación.

Observa que este método solamente funciona cuando tenemos una ecuación que tiene soluciones reales.

Porque si la gráfica de la función **no** corta al eje x, entonces no podremos decidir qué valores de x hacen que la ecuación se haga cero.

Ejemplo 2

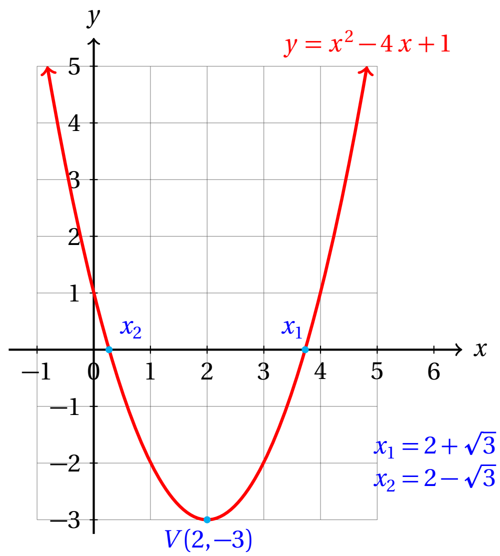
Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

por el método gráfico.

- Empezamos graficando la función: $y = x^2 - 4x + 1$
- Para graficar, empezamos calculando las coordenadas de los puntos a partir de unos valores de x:

x	$x^2 - 4x + 1$
0	1
1	-2
2	-3
3	-2
4	1



- Como el vértice se encuentra en el punto $(2, 3)$, podemos escribir la ecuación de la forma:

$$x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3 = 0$$

- Para verificarlo, puedes desarrollar el binomio al cuadrado.
- ¿Cómo obtuvimos este resultado? Usamos el método de factorización.
- En este caso completamos el cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 1 &= (x^2 - 4x + 1) + (4 - 4) \\ &= (x^2 - 4x + 4) + (1 - 4) \\ &= (x - 2)^2 - 3 \end{aligned}$$

- Observa que si $x = 2$, el binomio elevado al cuadrado tiene su mínimo valor: $(x - 2)^2 = 0$.
- Y en ese caso, la gráfica pasa por el punto $(2, -3)$. Este punto es el vértice de la parábola.

- Para resolver la ecuación podemos utilizar el método de despeje:

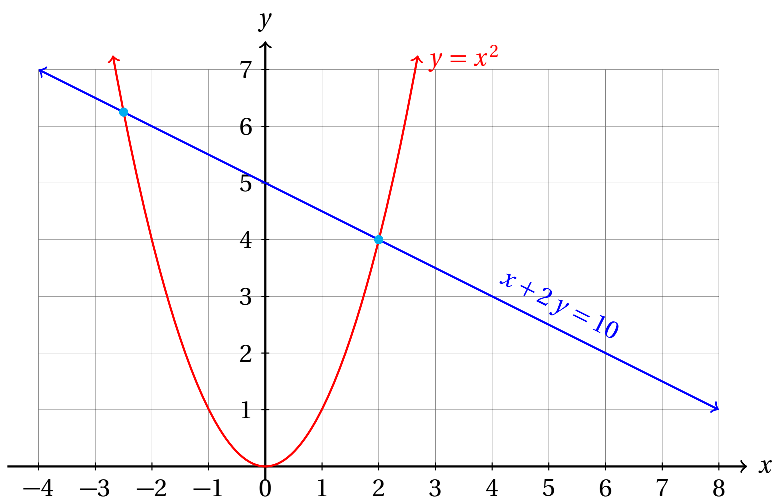
$$\begin{array}{rcl} (x-2)^2-3=0 & \Rightarrow & (x-2)^2=3 \\ x-2=\pm\sqrt{3} & \Rightarrow & x=2\pm\sqrt{3} \end{array}$$

- Estas son las raíces que se muestran en la gráfica de la función que le corresponde a la ecuación.

Algunas veces, en geometría algunos problemas se resuelven a través de ecuaciones cuadráticas.

Encuentra los puntos donde se intersectan la recta: $x+2y=10$ y la parábola: $y=x^2$. **Ejemplo 3**

- Para resolver este problema empezamos graficando ambas ecuaciones en un mismo plano cartesiano:



- Hasta aquí, parece que uno de los puntos de intersección es: $(2,4)$, pero vamos a probarlo de manera algebraica.
- En los puntos de intersección de ambas gráficas, los valores de las coordenadas de esos puntos deben coincidir para ambas ecuaciones.
- Esto nos permite igualar alguna de las variables, por ejemplo: y.
- Despejamos esta variable de la primera ecuación:

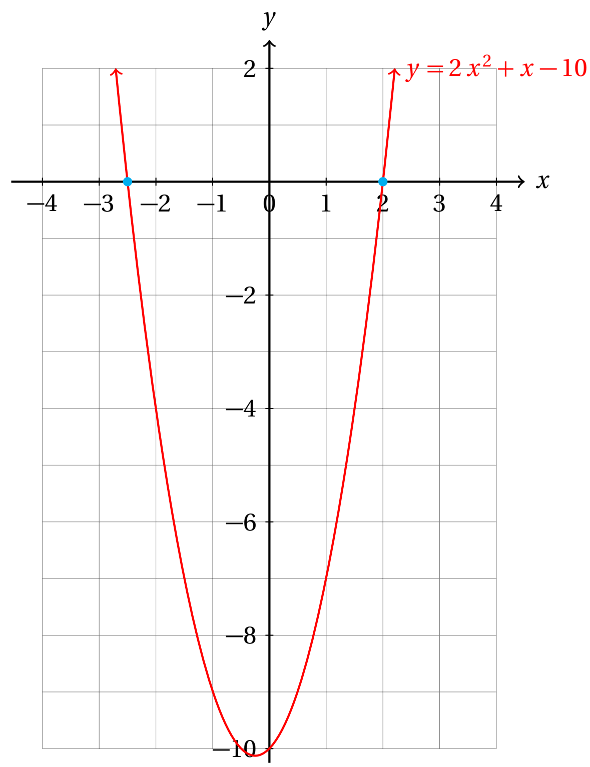
$$y=-\frac{x}{2}+5$$

- Ahora, igualamos con la otra ecuación, que ya nos dieron despejada:

$$\begin{array}{rcl} y=x^2 & = & -\frac{x}{2}+5 \\ x^2+\frac{x}{2}-5 & = & 0 \\ 2x^2+x-10 & = & 0 \end{array}$$

- Para resolver el problema tenemos que encontrar las soluciones de esta ecuación.

- Vamos a utilizar, de nuevo, el método gráfico:



- Ahora podemos usar la fórmula general para encontrar las raíces de esta ecuación con mayor precisión:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-10)}}{2(2)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4} \end{aligned}$$

- Entonces,

$$x_1 = \frac{-1+9}{4} = 2 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-1-9}{4} = -\frac{5}{2}$$

- Para encontrar las coordenadas de y que le corresponden a cada uno de los puntos podemos utilizar cualquiera de los despejes:

$$y = x^2 \qquad \Rightarrow$$

$$y_1 = (2)^2 = 4 \qquad \text{y} \qquad y_2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

- Entonces, los puntos donde se intersectan las gráficas, es decir, la solución del sistema es: $(2,4)$ y $\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$.

Como se puede concluir del ejemplo anterior, el método gráfico es muy sencillo de utilizar, pero algunas veces no nos da información precisa.

Con él podemos saber aproximadamente cuál es la solución del sistema de ecuaciones, o de la ecuación cuadrática.

A partir de los ejemplos anteriores podemos interpretar las raíces de una ecuación cuadrática.

Cuando resolvemos la ecuación cuadrática: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, en realidad estamos encontrando los puntos donde la función: $y = a\,x^2 + b\,x + c$ corta al eje x.

Para calcular las raíces siempre podemos utilizar la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

El símbolo $\pm$ indica que hay dos valores:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} &= \frac{-b}{2\,a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} &= \frac{-b}{2\,a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \end{aligned}$$

Si calculamos el promedio de estos valores, obtenemos:

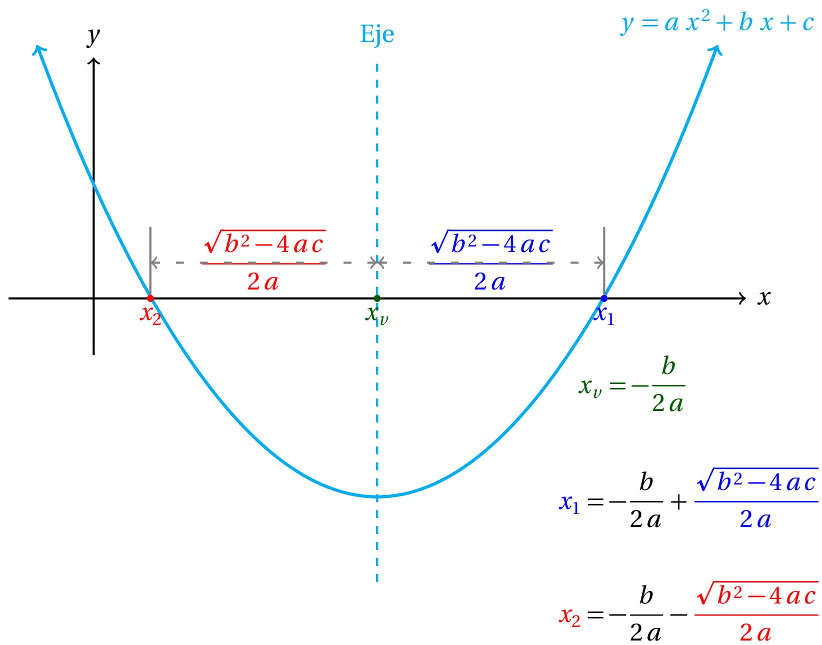
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ &= \frac{\dfrac{-b}{2\,a} + \cancel{\dfrac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}} + \dfrac{-b}{2\,a} - \cancel{\dfrac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}}}{2} \\ &= \frac{\left(\dfrac{-\cancel{2}\,b}{\cancel{2}\,a}\right)}{2} = \frac{-b}{2\,a} \end{aligned}$$

Esto indica que el promedio de las raíces es $\bar{x} = x_v = -b/(2\,a)$.

Observa que x_1 está a la derecha porque al valor x_v le sumamos una cantidad positiva, e igual a:

$$\frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Por otra parte, x_2 está a la izquierda porque restamos esa misma cantidad a x_v. Podríamos decir que esta es la razón por la que x_v está a la misma distancia de las raíces x_1 y x_2. Sin embargo, la verdadera razón está justificada en la simetría de la parábola, que es la que nos permitió calcular $x_v = \bar{x}$ a partir del promedio de x_1 y x_2.



En la gráfica anterior se ha supuesto que la ecuación tiene dos raíces reales. Esto es así porque la gráfica corta al eje x en dos puntos.

Sin embargo, también es posible que la parábola toque en solamente un punto al eje. En este caso, ambas raíces son iguales, debido a que $b^2 - 4\,a\,c = 0$.

Un posible tercer caso ocurre cuando la parábola **no** corta al eje x. Esto ocurrirá en caso de que $b^2 - 4\,a\,c < 0$.

Debido a que el número $b^2 - 4\,a\,c$ nos indica qué ocurre con las raíces de la ecuación cuadrática, se le ha dado un nombre especial: **discriminante**.

Definición 2

DISCRIMINANTE

El discriminante de la ecuación cuadrática: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ *es el número:*

$$D = b^2 - 4\,a\,c$$

Esto nos origina tres casos para las raíces de una ecuación cuadrática:

- ✓ $D > 0$, las dos raíces son números reales distintos.
- ✓ $D = 0$, las dos raíces se repiten, y son iguales a: $x = -b/(2\,a)$.
- ✓ $D < 0$, las dos raíces son números complejos.

El discriminante nos ayuda a conocer la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática sin necesidad de resolverla.

Basta con conocer el signo del discriminante para conocer el tipo de raíces que tiene la ecuación cuadrática que estamos estudiando.

Ejemplo 4

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por el método gráfico:

$$x^2 - 4\,x + 4 = 0$$

- Empezamos calculando el discriminante para averiguar la naturaleza de las raíces:

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$$

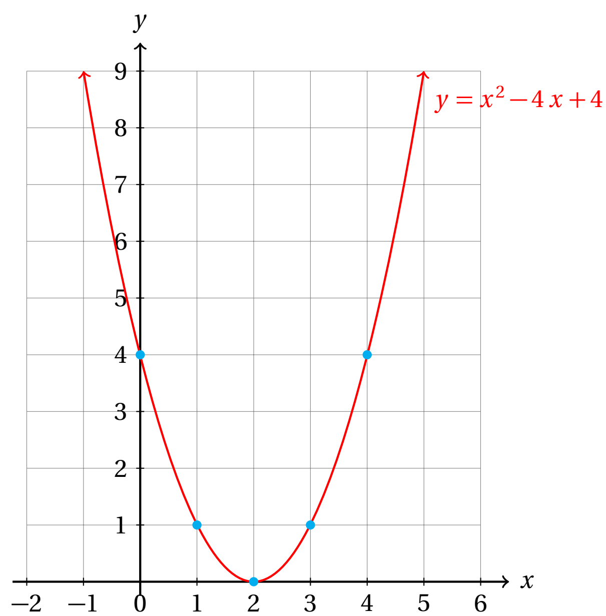
- Esto nos indica que la ecuación tiene las dos raíces repetidas.
- Calculamos el valor de la raíz (repetida) usando $x_v = -b/(2a)$:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

- Entonces, la raíz de la ecuación cuadrática es: $x = 2$.
- Para verificar que la raíz es correcta, basta sustituir $x = 2$ en la ecuación:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (2)^2 - 4(2) + 4 = 0$$

- Ahora graficamos la función: $y = x^2 - 4x + 4$



Ahora puedes verificar la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática antes de resolverla.

Ejemplo 5

Identifica la naturaleza de las raíces e indica cuántas tiene cada una de las siguientes ecuaciones a partir del cálculo del discriminante.

- Llena la siguiente tabla:

Ecuación $ax^2 + bx + c = 0$	**Discriminante** $b^2 - 4ac$	**Número de raíces**	**Naturaleza**
$x^2 - 5x + 6 = 0$	1	2	Reales
$x^2 + 6x + 21 = 0$	−48	2	Complejas
$x^2 - 6x + 9 = 0$	0	1	Real
$5x^2 + 3x + 2 = 0$	−31	2	Complejas
$x^2 + 3x + 2 = 0$	1	2	Reales
$x^2 - 3x - 12 = 0$	57	2	Reales

Estrictamente hablando, una ecuación cuadrática siempre tiene dos raíces.

Cuando encontramos solamente una, lo que en realidad está pasando es que ambas raíces son iguales.

Por ejemplo, en el caso de la ecuación $x^2+2x+1=0$, podemos reescribirla de la siguiente forma:

$$(x+1)^2=(x+1)(x+1)=0$$

Obviamente, para que el producto indicado sea igual a cero, necesariamente x debe ser igual a -1.

Como el factor $(x+1)$ se repite dos veces, ambas raíces son iguales. Debido a esto decimos que la raíz tiene multiplicidad 2.

Definición 3

MULTIPLICIDAD

Sea x_0 una de las raíces de una ecuación. Si esta raíz aparece k veces como raíz de la ecuación considerada, decimos que esa raíz tiene multiplicidad k.

Ahora indica la multiplicidad de las raíces de las ecuaciones del ejemplo anterior.

Ejemplo 6

Varios amigos decidieron comprar un boleto de una rifa [21] cooperando en partes iguales. Cuando el papá de Adán se enteró, les pidió oportunidad de arriesgar su dinero junto con el de ellos y aceptaron. Por esto cada uno de los demás pagó $10.00 pesos menos. ¿Cuántas personas cooperaron para comprar ese boleto que costaba $1 320.00 pesos?

- Sabemos que n amigos en total, más el papá de Adán cooperaron para comprar el boleto.
- Y que el boleto costaba $1 320.00 pesos
- Si el papá de Adán no hubiera cooperado, cada uno debería colaborar con:
$$\frac{1\,320}{n}$$
- Pero ahora no son en total n personas, sino $n+1$, con lo que cada uno arriesgó:
$$\frac{1\,320}{n+1}$$
- La diferencia entre estos dos valores es igual a $10.00 pesos, la cantidad que ahorraron después que el papá de Adán ingresó al grupo:
$$\frac{1\,320}{n}-\frac{1\,320}{n+1}=10$$
- Para saber cuántas personas cooperaron $(n+1)$, primero debemos resolver la ecuación anterior.
- Es importante hacer notar que al resolver la ecuación encontraremos el valor del número de amigos que decidieron comprar el boleto, n. Este número no incluye al papá de Adán, así que tendrán que sumar 1 al resultado de la ecuación.
- Para resolver la ecuación multiplicamos en ambos lados de la igualdad por $n(n+1)$:
$$\begin{aligned}\frac{1\,320}{n}-\frac{1\,320}{n+1} &= 10\\ 1\,320(n+1)-1\,320\,n &= 10\,n(n+1)\\ \cancel{1\,320\,n}+1\,320-\cancel{1\,320\,n} &= 10\,n(n+1)\\ 1\,320 &= 10\,n(n+1)\\ 132 &= n(n+1)\end{aligned}$$

- **Primer Método.**
- Desarrollamos el producto que quedó indicado a la derecha de la igualdad:

$$\begin{aligned} n(n+1) &= 132 \\ n^2+n-132 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora debemos resolver la ecuación cuadrática utilizando factorización.
- Buscamos dos números que sumados den 1 y multiplicados sean -132.
- Un truco para simplificar la búsqueda de los números consiste en empezar buscando dos números que multiplicados sean igual a -132.
- Otro truco que nos ayuda a simplificar la búsqueda consiste en observar que el coeficiente del término lineal es positivo, lo cual indica que el mayor de los dos números es positivo.
- Esos números son 12 y -11:

$$\begin{aligned} n^2+n-132 &= 0 \\ (n-11)(n+12) &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora vemos que el producto de dos números es cero. Esto implica que uno de ellos debe ser cero.
- *Primer caso:* $n-11=0 \qquad \Rightarrow \qquad n=11.$
- Obviamente n, que representa el número de amigos que acordó comprar el boleto de la rifa, no puede ser negativo, que es precisamente el resultado que obtenemos en el siguiente caso:
- *Segundo caso:* $n+12=0 \qquad \Rightarrow \qquad n=-12.$
- Ahora sabemos que $n=11$, pero no nos preguntaron cuántos amigos decidieron cooperar para comprar el boleto, sino cuántos cooperaron, y eso incluye al papá de Adán.
- Entonces, la solución del problema es $n+1=11+1=12$ personas cooperaron.
- **Segundo Método.**
- Aquí utilizamos la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado:

$$\begin{aligned} n^2+n-132 &= 0 \\ n &= \frac{-1\pm\sqrt{1-4(1)(-132)}}{2(1)} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{1+528}}{2} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{529}}{2} \\ &= \frac{-1\pm 23}{2} \end{aligned}$$

- Y ahora encontramos las raíces de la ecuación:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{-1+23}{2} = \frac{22}{2} = 11 \\ n_2 &= \frac{-1-23}{2} = \frac{-24}{2} = -12 \end{aligned}$$

- De nuevo, el valor de n debe ser positivo por las condiciones del problema, así que $n+1=12$ es el valor que buscamos.
- Observa que como en este caso la ecuación no incluye la variable x, sino n, la fórmula general se escribe como:
$$n=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
- **Tercer Método**
- Es importante notar del problema que n debe ser un número entero, porque no es posible que 7.5 personas, por ejemplo, acuerden cooperar para comprar un boleto.
- Ahora observa que $n(n+1)$ es el producto de dos números consecutivos, y que este producto es un poco mayor que 100.
- Podemos fácilmente probar valores cercanos, pero mayores a 10 y así encontrar la solución de la ecuación.
- Si $n=11$, entonces, $n+1=12$ y $11\times 12=132$.
- Esto indica que si $n=11$ era el número de amigos que acordaron comprar el boleto y eran en total $n+1=12$ cuando el papá de Adán se unió al equipo.
- **Tarea:**
- Graficar la función y obtener una aproximación de las raíces, aunque ya las conoces.
- **Además:** Se te queda como ejercicio verificar que las raíces de la ecuación cuadrática $n^2+n-132=0$, satisfacen la ecuación fraccionaria que obtuvimos del problema:
$$\frac{1\,320}{n}-\frac{1\,320}{n+1}=10$$
Esto mostrará que las ecuaciones son equivalentes. Es decir, tienen las mismas soluciones, y por tanto, representan las mismas condiciones, que son las impuestas por el problema textual.

Reto 1

Resuelve:
$$ab\,x^2-a^2x=b^2x-ab$$

Ejercicios 4.1

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método algebraico más conveniente.

1) $36x^2-108x+81=0$ **R.** $x=\frac{3}{2}$

2) $x^2+2x+1=0$ **R.** $x=-1$

3) $x^2-6x+9=0$ **R.** $x=3$

4) $8x^2-36x+4=0$ **R.** $x=\frac{2}{9}$

5) $64x^2+128x+64=0$ **R.** $x=-1$

6) $49x^2+56x+16=0$ **R.** $x=-\frac{4}{7}$

7) $8x^2+108x+36=0$ **R.** $x=-\frac{2}{3}$

8) $16x^2+24x+9=0$ **R.** $x=-\frac{3}{4}$

9) $25x^2+80x+64=0$ **R.** $x=-\frac{8}{5}$

10) $25x^2+50x+25=0$ **R.** $x=-1$

11) $25x^2-50x+25=0$ **R.** $x=1$

12) $4x^2+8x+4=0$ **R.** $x=-1$

13) $9x^2-48x+64=0$ **R.** $x=\frac{8}{3}$

14) $x^2+8x+16=0$ **R.** $x=-4$

15) $4x^2-32x+64=0$ **R.** $x=4$

16) $8x^2-18x+1=0$ **R.** $x=\frac{1}{9}$

17) $x^2-18x+81=0$ **R.** $x=9$

18) $64x^2+64x+16=0$ **R.** $x=-\frac{1}{2}$

19) $36x^2+24x+4=0$ **R.** $x=-\frac{1}{3}$

20) $64x^2-96x+36=0$ **R.** $x=\frac{3}{4}$

21) $8x^2+18x+1=0$ **R.** $x=-\frac{1}{9}$

22) $9x^2-48x+64=0$ **R.** $x=\frac{8}{3}$

23) $x^2-14x+49=0$ **R.** $x=7$

24) $9x^2-36x+36=0$ **R.** $x=2$

25) $8x^2-144x+64=0$ **R.** $x=\frac{8}{9}$

26) $-2x^2+23x-45=0$ **R.** $x_1=-\frac{5}{2}, x_2=-\frac{9}{1}$

27) $-8x^2+10x+25=0$ **R.** $x_1=-\frac{5}{2}, x_2=\frac{5}{4}$

28) $32x^2+28x+5=0$ **R.** $x_1=\frac{5}{8}, x_2=\frac{1}{4}$

29) $-8x^2-28x+16=0$ **R.** $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=4$

30) $32x^2+4x-45=0$ **R.** $x_1=\frac{5}{4}, x_2=-\frac{9}{8}$

31) $4x^2+16x+12=0$ **R.** $x_1=3, x_2=1$

32) $42x^2+43x+6=0$ **R.** $x_1=\frac{6}{7}, x_2=\frac{1}{6}$

33) $-20x^2+49x-30=0$ **R.** $x_1=-\frac{6}{5}, x_2=-\frac{5}{4}$

34) $14x^2+32x+18=0$ **R.** $x_1=1, x_2=\frac{9}{7}$

35) $9x^2+12x-12=0$ **R.** $x_1=2, x_2=-\frac{2}{3}$

36) $-49x^2+91x-36=0$ **R.** $x_1=-\frac{4}{7}, x_2=-\frac{9}{7}$

37) $-54x^2+18x+12=0$ **R.** $x_1=-\frac{2}{3}, x_2=\frac{1}{3}$

38) $4x^2+4x-15=0$ **R.** $x_1=\frac{5}{2}, x_2=-\frac{3}{2}$

39) $-54x^2+117x-63=0$ **R.** $x_1=-1, x_2=-\frac{7}{6}$

40) $-14x^2+9x+8=0$ **R.** $x_1=-\frac{8}{7}, x_2=\frac{1}{2}$

41) $-56x^2+114x-54=0$ **R.** $x_1=-\frac{9}{7}, x_2=-\frac{3}{4}$

42) $-40x^2+39x+40=0$ **R.** $x_1=-\frac{8}{5}, x_2=\frac{5}{8}$

43) $9x^2+50x+25=0$ **R.** $x_1=\frac{5}{1}, x_2=\frac{5}{9}$

44) $-4x^2+14x-12=0$ **R.** $x_1=-2, x_2=-\frac{3}{2}$

45) $-14x^2-17x+45=0$ **R.** $x_1=-\frac{9}{7}, x_2=\frac{5}{2}$

46) $2x^2-18x+4=0$ $x=\frac{-18\pm\sqrt{292}}{4}$

47) $7x^2-x+8=0$ $x=\frac{-1\pm i\sqrt{223}}{14}$

48) $7x^2-5x+6=0$ $x=\frac{-5\pm i\sqrt{143}}{14}$

49) $9x^2-x+3=0$ $x=\frac{-1\pm i\sqrt{107}}{18}$

50) $11x^2+8=0$ $x=\pm i\sqrt{8}$

51) $5x^2-13x+5=0$ $x=\frac{-13\pm\sqrt{69}}{10}$

52) $8x^2-11x+8=0$ $x=\frac{-11\pm i\sqrt{135}}{16}$

53) $10x^2-2x+1=0$ $x=\frac{-2\pm i\sqrt{36}}{20}$

54) $11\,x^2 - 7\,x + 1 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{5}}{22}$

55) $x^2 - 7\,x = 0$ $\qquad x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49}}{2}$

56) $10\,x^2 - 2\,x + 6 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-2 \pm i\,\sqrt{236}}{20}$

57) $x^2 - 9\,x + 6 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{57}}{2}$

58) $3\,x^2 - 12\,x + 3 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{108}}{6}$

59) $3\,x^2 - 9\,x + 3 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{45}}{6}$

60) $3\,x^2 - 18\,x + 9 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{216}}{6}$

61) $8\,x^2 - 5\,x + 4 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-5 \pm i\,\sqrt{103}}{16}$

62) $10\,x^2 - 4\,x + 2 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-4 \pm i\,\sqrt{64}}{20}$

63) $x^2 - 19\,x + 6 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-19 \pm \sqrt{337}}{2}$

64) $8\,x^2 - 15\,x + 1 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-15 \pm \sqrt{193}}{16}$

65) $3\,x^2 - 14\,x + 5 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-14 \pm \sqrt{136}}{6}$

66) $11\,x^2 - 3\,x + 8 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-3 \pm i\,\sqrt{343}}{22}$

67) $4\,x^2 - 7\,x + 6 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-7 \pm i\,\sqrt{47}}{8}$

68) $x^2 - 13\,x + 9 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-13 \pm \sqrt{133}}{2}$

69) $x^2 - 8\,x + 8 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{32}}{2}$

70) $x^2 - 5\,x + 3 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

71) $4\,x^2 - 3\,x + 4 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-3 \pm i\,\sqrt{55}}{8}$

72) $9\,x^2 - 18\,x + 8 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{36}}{18}$

73) $4\,x^2 - 13\,x + 5 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-13 \pm \sqrt{89}}{8}$

74) $7x^2 - 19x + 4 = 0$ $\quad x = \dfrac{-19 \pm \sqrt{249}}{14}$

75) $3x^2 - 16x + 2 = 0$ $\quad x = \dfrac{-16 \pm \sqrt{232}}{6}$

76) $11x^2 - 5x + 2 = 0$ $\quad x = \dfrac{-5 \pm i\sqrt{63}}{22}$

77) $4x^2 - 14x + 2 = 0$ $\quad x = \dfrac{-14 \pm \sqrt{164}}{8}$

78) $x^2 + 3 = 0$ $\quad x = \pm i\sqrt{3}$

79) $x^2 - 6x + 2 = 0$ $\quad x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{28}}{2}$

80) $10x^2 - 15x + 6 = 0$ $\quad x = \dfrac{-15 \pm i\sqrt{15}}{20}$

81) $3x^2 - 12x + 1 = 0$ $\quad x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{132}}{6}$

82) $2x^2 - 14x + 5 = 0$ $\quad x = \dfrac{-14 \pm \sqrt{156}}{4}$

83) $11x^2 - 9x + 6 = 0$ $\quad x = \dfrac{-9 \pm i\sqrt{183}}{22}$

84) $10x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad x = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{71}}{20}$

85) $11x^2 - x + 4 = 0$ $\quad x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{175}}{22}$

86) $5x^2 - 13x + 3 = 0$ $\quad x = \dfrac{-13 \pm \sqrt{109}}{10}$

87) $2x^2 - 12x + 3 = 0$ $\quad x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{120}}{4}$

88) $3x^2 - 19x + 6 = 0$ $\quad x = \dfrac{-19 \pm \sqrt{289}}{6}$

89) $9x^2 - 7x + 8 = 0$ $\quad x = \dfrac{-7 \pm i\sqrt{239}}{18}$

90) $10x^2 - 17x + 4 = 0$ $\quad x = \dfrac{-17 \pm \sqrt{129}}{20}$

91) $3x^2 - 6x + 7 = 0$ $\quad x = \dfrac{-6 \pm i\sqrt{48}}{6}$

92) $9x^2 - 11x + 6 = 0$ $\quad x = \dfrac{-11 \pm i\sqrt{95}}{18}$

93) En un hotel acaban de construir una piscina que tiene 5 m de ancho por 22 m de largo. Se desea agregar, alrededor de la piscina, por seguridad, una acera de concreto con un ancho constante para que la gente no resbale al caminar alrededor de la misma. El área de la piscina con su acera de concreto es de 200 m^2. ¿Cuál es el ancho de la acera que se desea agregar? 1.5 metros.

94) Un artesano fabrica azulejos a mano. Las medidas originales son de 4 pulgadas de largo y 4 pulgadas de ancho (cuadrados). Desea agregar una orilla de anchra constante para incrustar piedras de río, pero que el área total de cada azulejo sea de 36 pulgadas cuadradas. ¿Cuál debe ser el ancho de ese nuevo acabado? **Sugerencia:** *Intenta resolverlo mentalmente. Después revisa tu resultado modelando la situación matemáticamente.* 1 pulgada.

4.2 Desigualdades de una variable

Nosotros ya sabemos que podemos ordenar los números de un conjunto, bien de mayor a menor, bien de menor a mayor.

Este orden está definido por la definición de las desigualdades siguientes.

4.2.1 Definicion

Desigualdad

Una desigualdad es una expresión de la forma:

$$a > b$$

que se lee «el número a es mayor que el número b», y esto es verdadero siempre que la diferencia $a-b$ resulta ser un número positivo. Otra desigualdad es:

$$a < b$$

que se lee «el número a es menor que el número b», y es verdadera siempre que la diferencia $a-b$ es un número negativo.

Definición 1

Indica *CIERTO* o *FALSO* para cada una de las desiguadades. **Ejemplo 1**

- $2 > 1$
  Para que sea verdadero, se requiere que $2-1$ sea positivo. Y $2-1=1$, luego es *VERDADERO*.

- $2 < 5$
  Esto es *VERDADERO*, porque $2-5$ es negativo.

- $10 > 20$
  Esto es *FALSO*, porque $10-20=-10$ es negativo.

- $10 < 20$
  Es *VERDADERO*, porque $10-20=-10$ es negativo

Cuando incluimos una variable en la desigualdad, podemos preguntarnos: «*¿para qué valores de la variable la desigualdad resulta ser verdadera?*»

Solución de una desigualdad

La solución de una desigualdad es el conjunto de todos los valores de la(s) variable(s) que hacen que la desigualdad sea verdadera.

Definición 2

1. Propiedades de las desigualdades

Así como la igualdad tiene algunas propiedades, la desigualdad también tiene algunas propiedades que nos facilitan su tratamiento algebraico para la solución de problemas.

Definición 3

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES
Suponga que se cumple $a > b$, $x > y$, y sea c cualquier número real (constante). Entonces, también se cumplen:

i) $a + c > b + c$.

ii) $\dfrac{a}{c} > \dfrac{d}{c}$, *supuesto que* $c > 0$.

iii) $a \cdot c > b \cdot c$, *supuesto que* $c > 0$.

iv) $a + x > b + y$.

v) $\dfrac{a}{c} < \dfrac{d}{c}$, *supuesto que* $c < 0$.

vi) $a \cdot c < b \cdot c$, *supuesto que* $c < 0$.

Ejemplo 2 Indica si se siguen cumpliendo cada una de las desigualdades, dado que la original es cierta.

- Considerando que $x > 2$, entonces,
- $x + 7 > 9$, se cumple, por la propiedad (i).
- También, $\dfrac{x}{3} > \dfrac{2}{3}$, se cumple, porque $3 > 0$. (prop. ii)
- Igualmente, $5x > 10$, se cumple porque $5 > 0$ (prop. iii).
- Dado que $5 > 3$, se cumple: $x + 5 > 5$ por la propiedad (iv).
- Como $-3 < 0$, si $x > 2$, se sigue que: $-\dfrac{x}{3} < -\dfrac{2}{3}$ por la propiedad (v).
- De manera semejante, se cumple: $-3x < -6$, por la propiedad (vi).

Como puedes ver, las propiedades de las desigualdades son prácticamente las mismas que las propiedades de la igualdad, con la diferencia de que cuando multiplicamos o dividimos por un número negativo el sentido de la desigualdad cambia.

Siempre debes tener eso en cuenta.

Definición 4

TRICOTOMÍA
Dados dos números reales a, b satisfacen una y solamente una de las siguientes condiciones:

$$a < b \qquad\qquad a = b \qquad\qquad a > b$$

En palabras, la tricotomía nos indica que entre Aarón y Benjamín, bien Aarón es menor que Benjamín, bien ambos tienen la misma edad, bien Aarón es mayor que Benjamín. No pueden ocurrir dos o tres de esas condiciones simultáneamente.

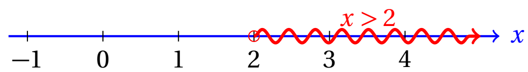
En otras palabras, la tricotomía me dice: « *o tengo tu edad, o eres mayor que yo, o eres menor que yo.*»

Es imposible que se satisfagan dos de esas condiciones al mismo tiempo y mucho menos las tres.

4.2.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

En matemáticas muchas veces nos ayuda a entender mejor un concepto conocer una interpretación geométrica del mismo.

Supongamos que $x > 2$. Geométricamente tenemos:



Ahora elegimos un número que satisfaga esa desigualdad, digamos $x = 3$. Entonces, $3 > 2$ se satisface.

Como puedes ver, la parte que se ha marcado con la linea en zig-zag incluye al punto $x = 3$, porque este punto satisface la desigualdad.

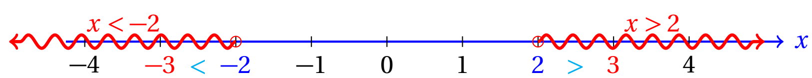
Sin embargo el punto $x = 2$ **no** está incluido en este conjunto porque por tricotomía, $2 \not> 2$. Luego, 2 no tasisface la desigualdad $x > 2$.

La propiedad (vi) también tiene una interpretación geométrica.

Si multiplicamos la desigualdad por un número negativo, cualquiera, digamos -1, entonces el sentido de la desigualdad cambia: $-3 < -2$.

Observa que los valores de la desigualdad: $x < -2$ son el reflejo respecto del origen (del eje x) de la desigualdad $x > 2$.

Geométricamente:



Observa que el círculo que indica el inicio de la solución de la desigualdad está vacío. Esto se justifica con la tricotomía: dado que $2 \not> 2$, 2 no satisface la desigualdad $x > 2$.

4.2.3 Desigualdades con una incógnita

Nosotros utilizaremos las propiedades de las desigualdades para expresarlas de la manera más simple posible.

Resuelve la desigualdad:

$$5\,x - 1 > 24$$

Ejemplo 1

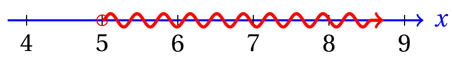
- Empezamos sumando 1 en ambos lados de la desigualdad.
- Este paso se justifica con la propiedad (i).

$$\begin{aligned} 5\,x - 1 + 1 &> 24 + 1 \\ 5\,x &> 25 \end{aligned}$$

- Ahora podemos dividir entre 5 ambos lados de la desigualdad.
- Dado que $5 > 0$ el sentido de la desigualdad no cambia.

$$\begin{aligned} \frac{5\,x}{5} &> \frac{25}{5} \\ x &> 5 \end{aligned}$$

- Entonces la desigualdad: $5\,x - 1 > 24$ expresada en su forma más simple es equivalente a la desigualdad: $x > 5$.
- Geométricamente, tenemos:



- Otra forma equivalente de escribir este resultado es: $x \in (5, \infty)$.

De nuevo, el círculo al inicio de la desigualdad está vacío indicando que 5 no satisface la desigualdad. Esto es así porque $5 \not> 5$. Sino $5 = 5$.

Definición 1

NOTACIÓN DE INTERVALOS
Los intervalos con límites en a y b, se pueden expresar como:

i) (a, b) *que incluye a todos los valores entre a y b, excluyendo a los límites.*

ii) $[a, b)$ *que incluye a todos los valoes entre a y b, incluyendo a a pero excluyendo a b.*

iii) (a, b) *que incluye a todos los valoes entre a y b, excluyendo a a pero incluyendo a b.*

iv) $[a, b]$ *que incluye a todos los valoes entre a y b, incluyendo a a al igual que a b.*

De manera semejante, en notación de desigualdades podemos reescribir los intervalos como sigue:

Comentario

Equivalencia entre la notación de intervalos y de desigualdades
En cada uno de los siguientes intervalos están incluidos además, todos los valores entre a y b.

i) $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ $\Rightarrow$ ni a ni b están en el conjunto.

ii) $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ $\Rightarrow$ a sí está en el conjunto, pero b no.

iii) $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ $\Rightarrow$ b sí está en el conjunto, pero a no.

iv) $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ $\Rightarrow$ tanto a como b están en el conjunto.

Observa que en la desigualdad $a \leq x$, en palabras, a es menor *o igual* a x, por eso $x = a$ satisface esa igualdad. Porque a puede ser igual a x, y por las propiedades de la igualdad, x puede ser igual a a.

Ejemplo 2

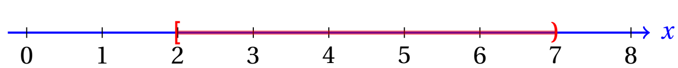
Interpreta geométricamente la siguiente desigualdad

$$2 \leq x < 7$$

- Observa que esta desigualdad está *compuesta* de dos desigualdades:

$$2 \leq x \qquad \text{y} \qquad x < 7$$

- Podemos interpretar la desigualdad $2 \leq x < 7$ como el conjunto de todos los números que son menores a 7, pero mayores o iguales a 2.
- Interpretar gemétricamente esto es muy sencillo:



- Observa en la soución geométrica que hemos utilizado un corchete ([) para indicar que $x = 2$ satisface la desigualdad.

- También se ha utilizado un paréntesis al final del intervalo ()) para indicar que $x = 7$ **no** satisface la desigualdad.
- Como debes suponer, esto viene de la notación de intervalos.
- Observa que la solución es equivalente a la intersección de las soluciones de las dos desigualdades:

$$2 \leq x \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 2 \qquad \text{y} \qquad x < 7$$

  como era de esperarse.

Ejemplo 3

Resuelve algebraicamente la siguiente desigualdad:

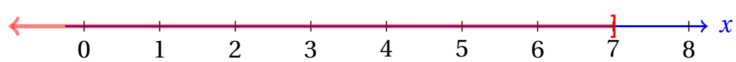
$$3\,x - 1 \leq 20$$

muestra la solución en notación de intervalos y da una interpretación geométrica del resultado.

- Empezamos resolviendo la desigualdad:

$$\begin{aligned} 3\,x &\leq 21 \\ x &\leq 7 \end{aligned}$$

- Observa que el 7 sí está incluido en el conjunto solución.
- En notación de intervalos este resultado se expresa como: $(-\infty, 7]$.
- Geométricamente tenemos la siguiente situación:



Ejemplo 4

Itzel desea contratar un medio de transporte para un evento que está organizando. Un taxista le cobra \$25.00 pesos por contrato, más \$1.40 pesos por kilómetro recorrido. Por otra parte, puede alquilar una suburban todo un día por \$750.00 pesos. La suburban recorre en promedio 11 kilómetros por litro de gasolina y cada litro cuesta \$7.50 pesos. ¿A partir de cuántos kilómetros le sale más barato contratar la suburban?

- Primero vamos a calcular cuánto le cuesta cada kilómetro recorrido en la suburban.
- Cada litro de gasolina le permite recorrer 11 kilómetros en promedio y el litro de gasolina le cuesta \$7.50.
- Usando una regla de tres encontramos que un kilómetro recorrido le cuesta \$0.68 pesos aproximadamente.
- Entonces, el costo de recorrer x kilómetros en el taxi es:

$$C_t = \underbrace{25}_{\text{contrato}} + \underbrace{1.40\,x}_{\text{km recorridos}}$$

- Por otra parte, el costo de recorrer x kilómetros en la suburban es:

$$C_s = \underbrace{750}_{\text{alquiler}} + \underbrace{0.68\,x}_{\text{gasolina}}$$

- Queremos calcular los kilómetros que debe recorrer para que el costo de recorrer esa distancia en la suburban sea menor que el costo en el taxi:

$$\begin{array}{rcl}
C_s & < & C_t \\
750 + 0.68\,x & < & 25 + 1.40\,x \\
750 - 25 & < & 1.40\,x - 0.68\,x \\
725 & < & 0.72\,x \\
\dfrac{725}{0.72} & < & x \\
1006.94 < x & \Rightarrow & x > 1006.94
\end{array}$$

- La última desigualdad nos dice que la solución de: $C_s < C_t$ es: $x > 1006.94$.
- En palabras, si recorre más de 1006.94 kilómetros, alquilar la suburban le sale más barato que contratar el taxi.
- Es decir, si recorre menos de 1006.94 kilómetros, le conviene mejor pagar el taxi.

Ejemplo 5

Pablo contrató un servicio de buffet para el día de su boda. Cada platillo cuesta \$225.00 pesos y le hacen un descuento de \$10.00 pesos en todos los platillos después de los 200 platillos servidos. El salón donde se hará la fiesta tiene capacidad para 350 personas. ¿Cuántos platillos debe adquirir si asignó \$50 000.00 pesos para la comida de su boda?

- Pablo asignó \$50 000.00 pesos para la comida.
- Algebraicamente el costo cada uno de los platillos es:

$$C = \begin{cases} 225 & \text{si } x \leq 200 \\ 215 & \text{si } x > 200 \end{cases}$$

- Por los primeros 200 platillos pagaría:

$$(225)(200) = 45\,000 \text{ pesos}$$

- Pero si solicita un platillo más, cada platillo extra costará \$10.00 pesos menos.
- Entonces, por 201 platillos debería pagar:

$$\underbrace{(225)(200)}_{\text{primeros 200}} + \underbrace{(1)(215)}_{\text{último}} = 45\,000 + 215 = 45\,215 \text{ pesos}$$

- Suponiendo que le lleguen más de 200 invitados y todos pidan un platillo, por cada platillo, después de los primeros 200 debería pagar 215.

- Nosotros queremos que el importe sea menor o igual a la cantidad asignada a la comida de la fiesta:

$$\begin{aligned}
\underbrace{200\cdot(225)}_{\text{platillos de \$225}} + \underbrace{215\,(x-200)}_{\text{platillos de \$215}} &\leq 50\,000\\
215\,(x-200) &\leq 50\,000-200\cdot(225)\\
215\,x-43\,000 &\leq 5\,000\\
215\,x &\leq 48\,000\\
x &\leq \frac{48\,000}{215}\approx 223.2558
\end{aligned}$$

- Como el número de platillos debe ser entero, podrá pagar 223 platillos.
- En total pagará: $(200)(225)+(23)(215)=49\,945$ pesos, y le sobran \$55.00 pesos de lo presupuestado para la comida.

Resuelve cada una de las siguientes desigualdades. Para cada una muestra su solución en notación de intervalos y represéntala geométricamente. **Ejercicios 4.2**

1) $3\,x+1>22$ $x>7$

2) $5\,x-2<18$ $x<4$

3) $-2\,x+2>12$ $x<-5$

4) $7\,x+1\geq 50$ $x\geq 7$

5) $-5\,x+4\leq 74$ $x\leq -14$

6) $4\,x+5>33$ $x>7$

7) $11\,x-13\leq 42$ $x\leq 5$

8) $7\,x+2\geq 79$ $x\geq 11$

9) $3\,x-12<51$ $x<21$

10) $9\,x+13\leq 166$ $x\leq 17$

11) $11\,x+13\geq 222$ $x\geq 19$

12) $7\,x+17<80$ $x<9$

Muestra la solución geométrica de cada una de las siguientes desigualdades. **Instrucciones**

13) $-2<x<2$

14) $0<x<5$

15) $3\leq<\leq 7$

16) $3<x\leq 9$

17) $5\leq x<12$

18) $-5\leq x\leq 6$

19) $-12 < x \leq 21$

20) $-3 \leq x \leq 7$

21) $21 \leq x < 31$

22) $-7 < x \leq 14$

23) $x \geq 3$, junto con: $x \leq 5$

24) $x \leq 7$, junto con: $x \geq -2$

25) $x \geq 7$, junto con: $x \leq 1$

4.3 Desigualdades de dos variables

Ahora vamos a estudiar un caso más general.

Cuando graficamos la ecuación:

$$x + y = 10$$

obtenemos una recta en al plano.

Cada punto que está sobre la recta satisface la ecuación. Es decir, si sumamos las coordenadas del punto obtenemos 10.

Ningún otro punto del plano satisface esa condición.

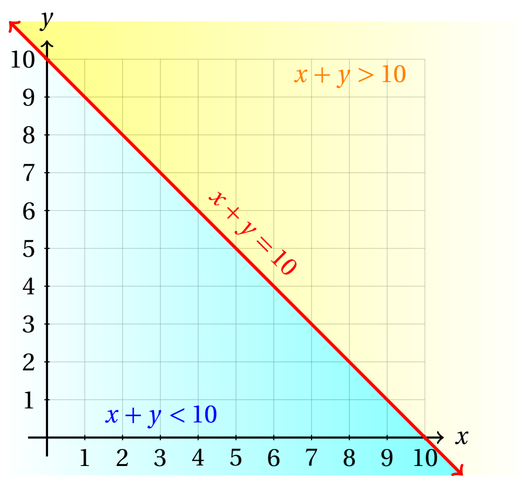
Entonces, por tricotomía, bien $x + y > 10$, bien $x + y < 10$ para los demás puntos del plano.

Vamos a tomar el origen: $(0, 0)$ y vamos a sustituir los valores en cada una de las dos ecuaciones. Obviamente, satisface la desigualdad:

$$x + y < 10$$

Observa que si vamos cambiando una coordenada, digamos y dejando constante la otra (x), antes de que cambie el sentido de la desigualdad debe cumplirse la igualdad.

Esto nos obliga a concluir que la recta divide el plano cartesiano en dos regiones, cada una de las cuales satisface una desigualdad.



Cualquier punto que elijamos que esté a la derecha de la recta $x + y = 10$ satisface la desigualdad $x + y > 10$.

De manera semejante, cualquier punto de la región a la izquierda de la recta $x + y = 10$ satisface la desigualdad $x + y < 10$.

Geométricamente podemos pensar que la recta $x + y = 10$ es la frontera entre las regiones $x + y < 10$, y $x + y > 10$.

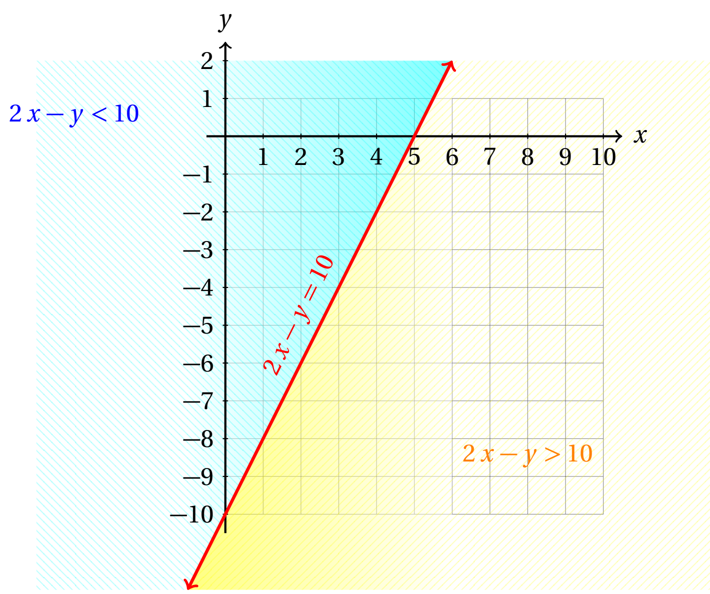
Ejemplo 6

Representa la región del plano cartesiano cuyos puntos satisfacen la desigualdad:

$$2x - y < 10$$

- Empezamos considerando la ecuación $2x - y = 10$.

- Su gráfica es una recta con pendiente 2 y que pasa por el punto $B(0,10)$.
- Esta recta es la frontera entre las desigualdades $2x - y < 10$, y $2x - y > 10$.
- Al sustituir las coordenadas del origen en la desigualdad dada en el problema vemos que éste punto la satisface.
- Entonces, las regiones quedan:



- Si sutituimos las coordenadas de un punto cualquiera que se encuentre en la región a la izquierda de la recta $2x - y = 10$ en la desigualdad $2x - y < 10$, la desigualdad se cumple.
- Verifica esto para al menos cinco puntos de esa región.
- De manera semejante, si sustituimos las coordenadas de cualquiera de los puntos que se encuentran a la derecha de la recta $2x - y = 10$ en la desigualdad $2x - y > 10$, la desigualdad se cumple.
- Verifica esto para al menos diez puntos de esa región.

Ejemplo 7

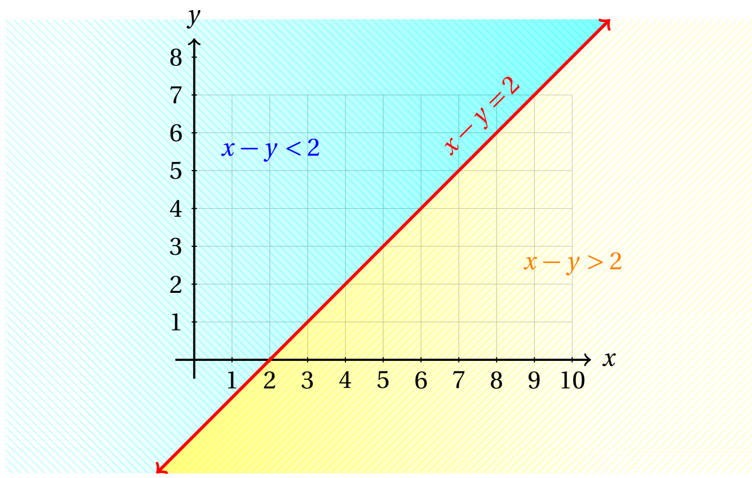
Muestra en el plano cartesiano la región que es solución de la desigualdad:

$$x - y > 2$$

- De nuevo, dado que la recta $x - y = 2$ no pasa por el origen, sustituimos $x = 0$, $y = 0$ en la desigualdad para ver si las satisface.
- Dado que $0 \not> 2$, la región en la cual se encuentra el origen no es la solución de nuestra desigualdad.
- La otra región es la solución.
- Vamos a verificarlo sustituyendo un punto que se encuentre allí.
- Elegimos el punto $P(10,2)$:

$$10 - 2 > 2$$

- Como la desigualdad se cumple para ese punto, la región a la derecha de la recta es la solución de la desigualdad:



Recuerda que la recta: $a\,x + b\,y = c$, siempre divide al plano cartesiano en dos regiones.

Una de ellas es la solución de la desigualdad:

$$a\,x + b\,y > c$$

y la otra región es la solución de la desigualdad:

$$a\,x + b\,y < c$$

Para verificar cuál región es solución de cada desigualdad, basta sustituir las coordenadas de cualquiera de los puntos que esté en alguna de las regiones (por consiguiente, que no esté sobre la recta).

Las coordenadas del punto que satisfaga una desigualdad nos indicarán que ese punto satisface la desigualdad, y por tanto, todos los puntos de esa región.

Por otra parte, si no satisface la desigualdad, ese punto satisface a la otra desigualdad, al igual que todos los puntos de esa región.

Ejemplo 8

Muestra la región del plano cartesiano que es solución de la siguiente desigualdad:

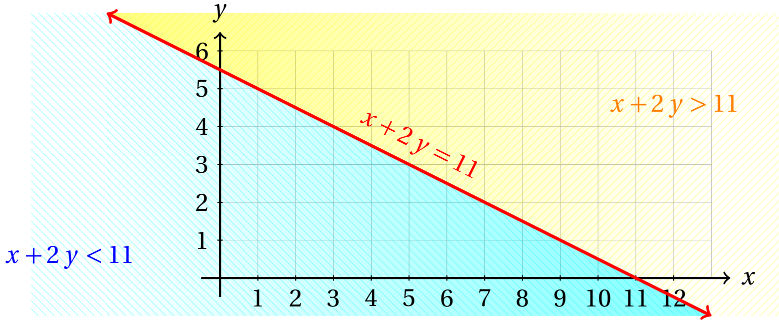
$$x + 2\,y > 11$$

- Al sustituir las coordenadas del origen vemos que la desigualdad no se satisface.

- Entonces, la región a la cual pertenece el origen satisface la desigualdad:

$$x + 2\,y < 11$$

- La otra región es la región que nosotros buscamos:



- Se te queda como ejercicio verificar que los puntos: $A(10,1)$, $B(5,5)$, $C(0,6)$ y $D(12,0)$ satisfacen la desigualdad: $x+2y>11$.
- Igualmente, verifica que los puntos $P(2,2)$, $Q(4,3)$ y $R(7,1)$ no la satisfacen.

De manera semejante a las ecuaciones lineales, es posible modelar problemas a través de las desigualdades.

Primero tenemos que definir qué representa cada variable y después aplicar las propiedades algebraicas de las desigualdades para encontrar la solución.

La diferencia con las ecuaciones consiste en que la representación geométrica de una ecuación es una recta, mientras que para la desigualdad tendremos una región del plano.

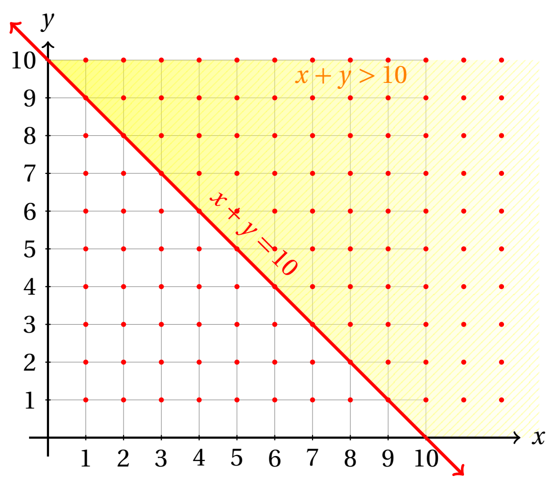
Ejemplo 9

Benjamín tiene monedas de \$2.00 y de \$5.00 pesos. Se sabe que tiene más de 10 monedas. Si x es la cantidad de monedas de \$2.00 pesos y y es la cantidad de monedas de \$5.00 pesos que él tiene, muestra la región del plano cartesiano que representa las posibles cantidades de monedas que él tiene.

- Dado que tiene más de 10 monedas, tenemos la siguiente desigualdad:

$$x+y>10$$

- En este caso, el número de monedas de \$2.00 o de \$5.00 pesos debe ser un número entero.
- Pues no tiene sentido hablar de, por ejemplo, 2.37 monedas de alguna denominación.



- Es importante enfatizar que la solución de este problema están representados por los puntos que están en el primer cuadrante, porque no es posible tener, por ejemplo, -5 monedas de \$2.00 pesos.

Si nosotros mostramos la solución de dos desigualdades diferentes en el mismo plano cartesiano tendremos una situación interesante.

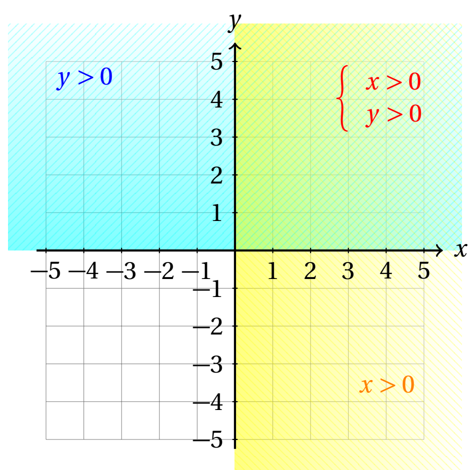
En ese caso decimos que estamos resolviendo un sistema de desigualdades.

Pues las soluciones no tienen por qué intersectarse. Es posible que las soluciones sean disjuntas. Es decir, que no existan puntos que satisfagan las dos desigualdades simultáneamente. En otras palabras, que existan puntos que satisfacen una desigualdad o la otra, pero no ambas.

La solución del sistema de desigualdades está dado por la intersección de las regiones que son solución para cada una de las desigualdades que forman el sistema.

Represente en un mismo sistema de coordenadas cartesiano el siguiente sistema de desigualdades: $x > 0$, $y > 0$. **Ejemplo 10**

- Todo punto que está en el eje y satisface $x = 0$.
- A la izquierda del eje y, $x < 0$, y a su derecha x es positivo.
- Por otra parte, todo punto que está en el eje x satisface $y = 0$.
- Los puntos que están arriba de este eje (x), satisfacen $y > 0$.
- Los puntos que están por debajo de este eje satisfacen $y < 0$.
- Entonces, geométricamente tenemos:



- La solución de ambas desigualdades corresponde al primer cuadrante del plano cartesiano.
- Esta región corresponde a la solución del sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

En la siguiente sección resolveremos sistemas de ecuaciones más interesantes que el de este ejemplo.

Ejercicios 4.3

Encuentra la región del plano cartesiano que representa la solución de cada una de las desigualdades siguientes. Utiliza los dos puntos dados para graficar la recta que obtienes al convertir a igualdad.

1) $-17x-5y \geq 191$ — $A(-13,6)$, $B(-8,-11)$
2) $-6x-3y \leq -30$ — $A(4,2)$, $B(10,-10)$
3) $-17x-5y < -31$ — $A(3,-4)$, $B(-2,13)$
4) $-x-7y \geq -40$ — $A(5,5)$, $B(-2,6)$
5) $14x-3y \geq 132$ — $A(9,-2)$, $B(12,12)$
6) $-3x-y \geq -45$ — $A(11,12)$, $B(12,9)$
7) $-7x-16y \geq -148$ — $A(12,4)$, $B(-4,11)$
8) $-11x-2y > -108$ — $A(12,-12)$, $B(8,10)$
9) $-5x-10y > 100$ — $A(-2,-9)$, $B(-12,-4)$
10) $7x-4y > 54$ — $A(10,4)$, $B(6,-3)$
11) $-16x-17y > 59$ — $A(8,-11)$, $B(-9,5)$
12) $4x-17y \geq 54$ — $A(5,-2)$, $B(-12,-6)$
13) $-13x-3y \leq -93$ — $A(9,-8)$, $B(6,5)$
14) $-2x-y > -15$ — $A(9,-3)$, $B(11,-7)$
15) $-24x-13y \leq -132$ — $A(-1,12)$, $B(12,-12)$
16) $9x-5y \geq 23$ — $A(7,8)$, $B(-3,-10)$
17) $5x-2y > 21$ — $A(9,12)$, $B(7,7)$
18) $13x-6y \geq 63$ — $A(3,-4)$, $B(9,9)$
19) $10x-12y \geq 0$ — $A(12,10)$, $B(-12,-10)$
20) $-2x-7y \leq 11$ — $A(5,-3)$, $B(-2,-1)$
21) $x-y > 12$ — $A(9,-3)$, $B(8,-4)$
22) $-8x-19y \leq 12$ — $A(-11,4)$, $B(8,-4)$
23) $-3x-13y \leq 132$ — $A(8,-12)$, $B(-5,-9)$
24) $-x-8y \geq 99$ — $A(5,-13)$, $B(-3,-12)$
25) $-3x-5y \geq 34$ — $A(7,-11)$, $B(-3,-5)$
26) $-9x-y > 92$ — $A(-11,7)$, $B(-9,-11)$
27) $-x-17y < -159$ — $A(6,9)$, $B(-11,10)$
28) $-x-6y \geq -23$ — $A(-1,4)$, $B(11,2)$
29) $15x-17y > -48$ — $A(-10,-6)$, $B(7,9)$

30) $16x - 9y \geq -136$ $A(-13,-8), B(-4,8)$

31) $3x - 21y > -174$ $A(12,10), B(-9,7)$

32) $5x - 25y > -135$ $A(13,8), B(-12,3)$

33) $-13x - 13y \geq -39$ $A(4,-1), B(-9,12)$

34) $x - 6y \geq 45$ $A(9,-6), B(3,-7)$

35) $x - 3y > -23$ $A(4,9), B(7,10)$

36) $23x - 2y \geq -206$ $A(-10,-12), B(-8,11)$

37) $-3x - 14y \leq -105$ $A(7,6), B(-7,9)$

38) $-7x - 10y \geq 58$ $A(-4,-3), B(6,-10)$

39) $10x - y \geq -34$ $A(-3,4), B(-4,-6)$

40) $5x - y \geq -57$ $A(-10,7), B(-11,2)$

41) $6x - 7y \geq 48$ $A(-6,-12), B(1,-6)$

42) $10x - y \geq -101$ $A(-9,11), B(-11,-9)$

43) $-6x - y \leq -53$ $A(9,-1), B(8,5)$

44) $-7x - 8y > -53$ $A(-5,11), B(11,-3)$

45) $9x - 3y \geq -90$ $A(-6,12), B(-12,-6)$

46) $-x - y \geq -16$ $A(8,8), B(10,6)$

47) $-6x - y \geq 26$ $A(-4,-2), B(-3,-8)$

48) $x - y \geq -12$ $A(-9,3), B(-3,9)$

49) $7x - 4y < 71$ $A(5,-9), B(9,-2)$

50) $-3x - 3y > 60$ $A(-11,-9), B(-8,-12)$

51) $-7x - 4y \geq 69$ $A(-3,-12), B(-11,2)$

52) $-17x - 13y > -32$ $A(-5,9), B(8,-8)$

53) $-13x - 2y \leq -62$ $A(4,5), B(6,-8)$

54) $13x - 2y \geq 125$ $A(9,-4), B(11,9)$

55) $4x - 5y > 11$ $A(-6,-7), B(-1,-3)$

4.3.1 Solución de un sistema de desigualdades

En la sección anterior tuvimos oportunidad de resolver desigualdades de dos variables.

En el último ejemplo vimos nuestro primer sistema de desigualdades, que aunque muy sencillo, nos muestra el caso más general.

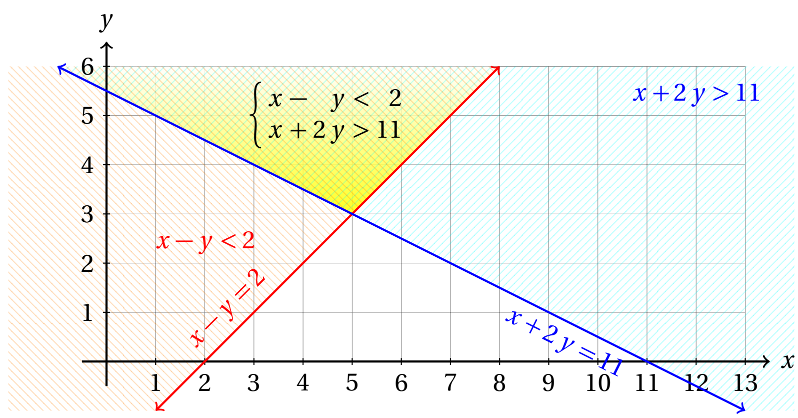
Para resolver un sistema de desigualdades vamos a resolver cada una de las desigualdades que forman al sistema en el mismo sistema de ejes coordenados. La intersección de las regiones que son solución de cada desigualdad será la solución del sistema de desigualdades.

Ejemplo 1

Resuelve el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} x - y &< 2 \\ x + 2y &> 11 \end{aligned}$$

- Como ya resolvimos las desigualdades por separado en la sección anterior, empezamos graficando las rectas:
$$x - y = 2 \qquad \text{y} \qquad x + 2y = 11$$
en el mismo sistema de coordenadas.
- Después coloreamos la región solución de cada desigualdad.
- Observa que las coordenadas del origen satisfacen la primera desigualdad, pero no la segunda.



- La intersección de las regiones es la región solución del sistema de desigualdades, porque satisface a ambas desigualdades simultáneamente.

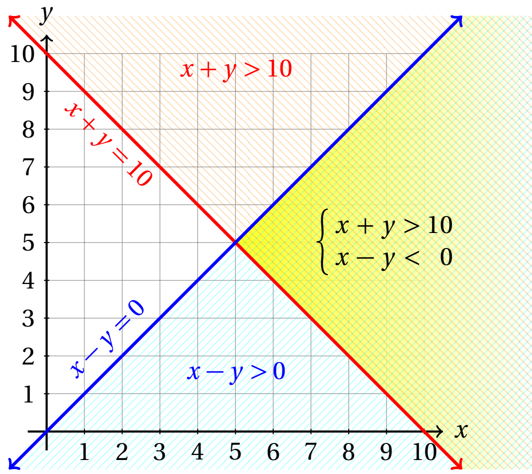
Ejemplo 2

Encuentra la región que es solución del siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} x + y &< 10 \\ x - y &> 0 \end{aligned}$$

- Empezamos graficando las rectas:
$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$
en el mismo sistema de coordenadas.

- Observa que la segunda recta pasa por el origen.
- Esto significa que vamos a tener que probar la desigualdad con otro punto diferente del origen para conocer la región solución.
- Para la segunda desigualdad usamos el punto $M(5,3)$ y vemos que la satisface.
- Entonces, la solución del sistema de desigualdades se muestra en la siguiente gráfica:



Así como hemos resuelto un sistema de dos desigualdades de dos variables, podemos resolver un sistema compuesto de tres o más desigualdades.

Lo que debemos hacer es graficar las soluciones de cada una de las desigualdades que forman el sistema y encontrar la intersección de las mismas. Esa región es la solución del sistema, dado que satisface simultáneamente a todas las desigualdades.

Ejemplo 3

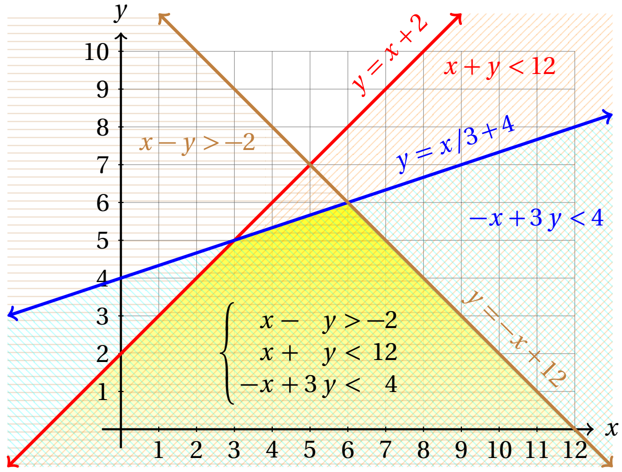
Resuelve el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} x - y &> -2 \\ x + y &< 12 \\ -x + 3y &< 4 \end{aligned}$$

- Empezamos graficando las rectas que corresponden a cada desigualdad.
- Para cada recta usamos la siguiente información:

Recta:	**Punto Inicial**	**Punto Final**
$y = x + 2$	$(0,2)$	$(5,7)$
$y = -x + 12$	$(4,8)$	$(13,-1)$
$y = x/3 + 4$	$(0,4)$	$(9,7)$

- Ahora sustituimos puntos para encontrar las regiones solución de cada desigualdad.



- Y terminamos.

La desigualdad $x > 0$ geométricamente representa la región del plano cartesiano que está a la derecha del eje y.

Recuerda, sobre el eje y, $x = 0$. A la izquierda de este eje, $x < 0$, y a la derecha $x > 0$.

Igualmente, sobre el eje x, se cumple: $y = 0$. Arriba de este eje, $y > 0$, y por debajo, $y < 0$.

Estas desigualdades son muy importantes cuando vamos a resolver problemas aplicados, porque no es posible, por ejemplo construir un número negativo de ventanas.

Esta restricción nos obliga a que el valor de x o de y, dependiendo cuál de las dos variables represente la cantidad de ventanas a fabricar, sea necesariamente positivo.

Ejemplo 4

Encuentra la región solución del siguiente sistema de desigualdades:

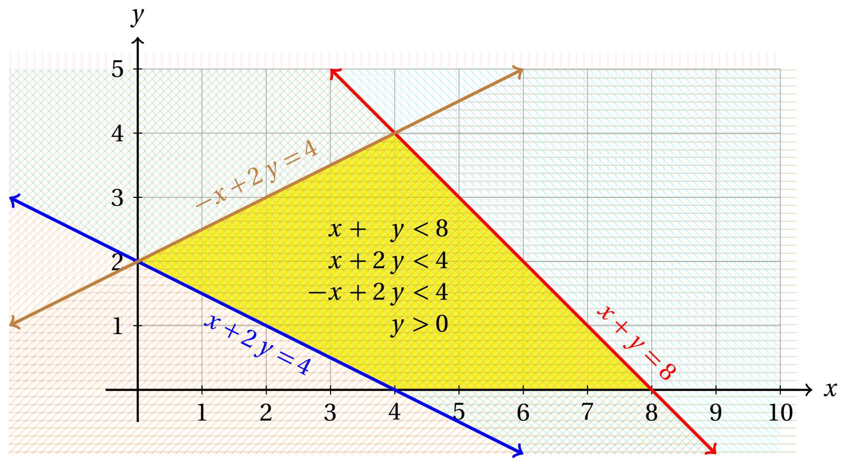
$$\begin{aligned} x + y &< 8 \\ x + 2y &< 4 \\ -x + 2y &< 4 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

- Empezamos graficando las rectas correspondientes a cada desigualdad.

- Para eso utilizamos la información de la siguiente tabla:

Recta:	Punto Inicial	Punto Final
$x + y = 8$	$(3,5)$	$(9,-)$
$x + 2y = 4$	$(-2,3)$	$(6,-1)$
$-x + 2y = 4$	$(-2,1)$	$(6,5)$

- Ahora sí podemos sustituir las coordenadas del origen, porque ninguna de las rectas pasa por ese punto.



- Observa que la región que es solución del sistema de desigualdades incluye solamente valores positivos de y.
- Esto se debe a la última desigualdad del sistema.
- Geométricamente se traduce en que ningún punto por debajo del eje x es parte de la solución del sistema de desigualdades.
- Debes tener esto presente, particularmente cuando resolvamos problemas aplicados.

Ejemplo 5

En la carpintería «*Pepe el Toro*» se producen ventanas y puertas de madera. Las piezas tienen precios, requerimientos de material y de mano de obra como se indica en la tabla.

Pieza	**Demanda**	**Acabado** (hrs)	**Carp.** (hrs)
Ventana	Max 40/sem	2	1
Puerta	Ilimitada	1	1
Horas Disp.		100	80

Representa gráficamente las cantidades de ventanas y puertas que es posible producir en esa carpintería.

- De acuerdo a la información dada en la tabla, por cada hora que se requiere de acabado en una puerta se requieren dos para una ventana.
- Si definimos como x el número de ventanas que se producirán y y el número de puertas, tenemos que la suma de las horas de acabado en todos los productos debe ser a lo más, 100 horas:

$$2x+y\leq 100$$

- Por otra parte, ambos productos requieren igual tiempo de carpintería.

$$x+y\leq 80$$

- También hay que recordar que la demanda máxima de ventanas es de 40 por semana:

$$x\leq 40$$

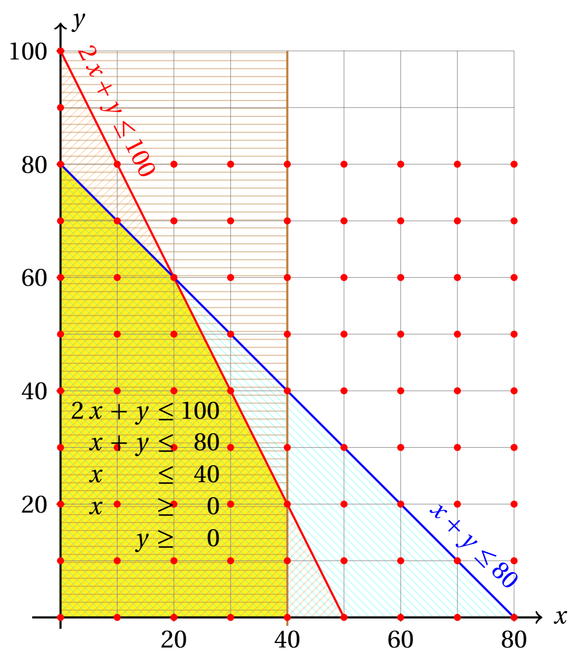
- Además, ya sabemos que no es posible producir un número negativo de ventanas o de puertas.
- Esto nos obliga a incluir también las siguientes dos desigualdades:

$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0$$

- De hecho, solamente nos es permitido producir un número entero de ventanas o de puertas.
- Entonces, debemos mostrar la solución del sistema de desigualdades:

$$\begin{array}{rcr} 2\,x + y & \leq & 100 \\ x + y & \leq & 80 \\ x & \leq & 40 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

- Enseguida se muestra la región que es solución de este sistema:



- Cualquiera de los puntos dentro de la región solución es una posible producción.

Definición 1 — Solución factible

Cualquier punto del plano que sea solución de un sistema de desigualdades es una solución factible de ese sistema de desigualdades.

Debes tener en mente siempre que existe la posibilidad de que la intersección de las regiones solución de las desigualdades que forman el sistema que estamos estudiando tengan una intersección disjunta.

Es decir, es posible que el sistema de desigualdades no tenga solución, o en otras palabras, que el conjunto solución del sistema sea un conjunto vacío.

Ejercicios 4.3.1

Encuentra la región del plano cartesiano que representa la solución de cada una de los sistemas de desigualdades. Utiliza los dos puntos dados para graficar la región solución de cada desigualdad.

1) $-4x-y\leq 33$ $\quad A(-11,11), B(-10,7)$
$2x-2y\geq -44$ $\quad A(-8,-4), B(-10,-2)$

2) $x-6y\leq -66$ $\quad A(-12,9), B(6,12)$
$16x-16y<-336$ $\quad A(-8,-11), B(-9,5)$

3) $x-2y\geq -10$ $\quad A(2,6), B(4,7)$
$-4x+4y\leq 16$ $\quad A(-6,6), B(2,2)$

4) $x-6y<41$ $\quad A(-7,-8), B(-13,-9)$
$5x-5y\leq 5$ $\quad A(-12,7), B(-10,12)$

5) $-6x-21y\leq 144$ $\quad A(-10,-4), B(11,-10)$
$-3x+3y\leq 18$ $\quad A(-2,-2), B(11,-5)$

6) $7x-11y\geq 100$ $\quad A(8,-4), B(-3,-11)$
$-2x+2y>-24$ $\quad A(-10,8), B(-13,6)$

7) $-x-3y\geq 12$ $\quad A(6,-6), B(9,-7)$
$x-y\leq 12$ $\quad A(5,1), B(-2,2)$

8) $-16x-7y>5$ $\quad A(1,-3), B(-6,13)$
$3x-3y>12$ $\quad A(7,-5), B(2,-2)$

9) $11x-25y\geq 193$ $\quad A(13,-2), B(-12,-13)$
$-13x+13y<-195$ $\quad A(4,3), B(8,-10)$

10) $-5x-8y>-47$ $\quad A(3,4), B(11,-1)$
$-8x+8y\geq 8$ $\quad A(5,11), B(-1,3)$

11) $-3x-y>13$ $\quad A(-7,8), B(-8,11)$
$20x-20y\leq -300$ $\quad A(9,-9), B(13,11)$

12) $3x-4y>-47$ $\quad A(-9,5), B(-5,8)$
$5x-5y\geq -70$ $\quad A(9,-8), B(-2,-3)$

13) $7x-13y\geq -17$ $\quad A(5,4), B(-8,-3)$
$6x-6y>6$ $\quad A(-13,-10), B(-1,-4)$

14) $7x-4y>-40$ $\quad A(-12,-11), B(-4,3)$
$14x-14y\leq -14$ $\quad A(9,-7), B(3,7)$

15) $5x-6y>-62$ $\quad A(2,12), B(-4,7)$
$5x-5y>-50$ $\quad A(3,-9), B(-4,-4)$

16) $x-16y\geq 57$ $\quad A(-7,-4), B(9,-3)$
$-17x+17y>51$ $\quad A(-9,9), B(10,-8)$

17) $4x-y\geq -35$ $\quad A(-7,7), B(-6,11)$
$-13x+13y>182$ $\quad A(-11,3), B(2,-10)$

18) $9x-5y\geq 92$ $\quad A(13,5), B(8,-4)$
$5x-5y\leq 40$ $\quad A(-6,-3), B(6,2)$

19) $16x - 15y \geq -70$ $\quad A(5,10), B(-10,-6)$
$11x - 11y \leq -55$ $\quad A(-13,-7), B(-7,4)$

20) $-18x - 5y \geq -76$ $\quad A(7,-10), B(2,8)$
$3x - 3y \geq 51$ $\quad A(4,-10), B(13,-7)$

21) $x - 9y > 41$ $\quad A(5,-4), B(-4,-5)$
$20x - 20y \geq 180$ $\quad A(-11,-7), B(-8,13)$

22) $18x - 5y \geq 148$ $\quad A(6,-8), B(11,10)$
$23x - 23y < 322$ $\quad A(-3,-10), B(10,13)$

23) $-7x - y \geq 30$ $\quad A(-3,-9), B(-4,-2)$
$3x - 3y > 18$ $\quad A(3,5), B(6,8)$

24) $7x - 13y \leq 95$ $\quad A(8,-3), B(-5,-10)$
$-9x + 9y < -99$ $\quad A(-9,10), B(-4,1)$

25) $15x - 10y < -80$ $\quad A(2,11), B(-8,-4)$
$-25x + 25y > 225$ $\quad A(-9,13), B(-12,-12)$

26) $x - y \leq 6$ $\quad A(-3,-9), B(-5,-11)$
$20x - 20y \geq 120$ $\quad A(-11,-9), B(3,11)$

27) $-21x - 20y \geq 53$ $\quad A(-13,11), B(7,-10)$
$x - y < -24$ $\quad A(12,-10), B(-5,-9)$

28) $-3x - 15y \geq -105$ $\quad A(-10,9), B(5,6)$
$-5x + 5y < 95$ $\quad A(12,-2), B(-4,-7)$

29) $-7x - 13y > 136$ $\quad A(-12,-4), B(1,-11)$
$9x - 9y \leq -72$ $\quad A(-10,2), B(-9,11)$

30) $-x - 15y < -116$ $\quad A(-4,8), B(11,7)$
$-x + y > 12$ $\quad A(-8,7), B(10,6)$

31) $x - 3y \leq 22$ $\quad A(-8,-10), B(13,-3)$
$-16x + 16y > -32$ $\quad A(10,6), B(4,-10)$
$2x - 2y \geq 8$ $\quad A(-7,9), B(-7,11)$

32) $12x - y > -118$ $\quad A(-10,-2), B(-9,10)$
$16x - y \leq 59$ $\quad A(4,5), B(3,-11)$
$-4x + 4y \geq 4$ $\quad A(-12,2), B(12,-2)$

33) $-11x - 13y \geq 73$ $\quad A(4,-9), B(-9,2)$
$17x - 17y \geq 221$ $\quad A(-6,-13), B(2,4)$
$-4x - y \geq 45$ $\quad A(-12,3), B(-8,-13)$

Parte II

Geometría Plana

Capítulo 5

Ángulos y Triángulos

Por aprender...

Por qué es importante...

En el aprendizaje de cualquier ciencia, es importante concer la terminología con la que estamos hablando.

5.1 Definición y clasificación de ángulos

La palabra «*geometría*» viene de las palabras griegas «*geo*» que significa *tierra* y la palabra «*metria*» que significa medición. Podemos traducir esta palabra como: «*medición de la tierra*».

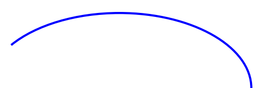
La geometría es la rama de las matemáticas que estudia las mediciones a través del estudio de las propiedades y relaciones de los puntos, líneas, ángulos, superficies y los sólidos.

La geometría descansa sobre varios conceptos básicos como el punto y la recta. Entre estos conceptos está el de *ángulo*, que se introduce en esta sección.

Punto
Objeto geométrico que sirve para indicar una ubicación. Un punto tiene dimensiones largo, ancho y alto igual a cero unidades.
Generalmente denotaremos a un punto con una letra mayúscula:

Definición 2

Línea
Objeto geométrico que tiene solamente longitud diferente de cero y que se genera al mover un punto.



Definición 3

Observa que en geometría, cuando decimos «*línea*», no nos referimos necesariamente a una línea recta.

Recta
Línea que se extiende en ambos sentidos sin cambiar de dirección:

La recta se denota por ℓ.

Definición 4

Otra forma de denotar a una recta que pase por los puntos A y B es: $\overleftrightarrow{AB}$.

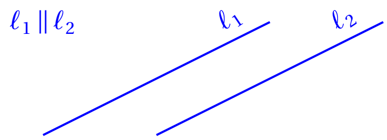
En el plano dos rectas pueden cortarse (compartir uno de sus puntos) o pueden no cortarse (no compartir alguno punto).

No es posible que dos rectas compartan dos puntos, pues de ser así, ambas rectas serían la misma. Recuerda, por dos puntos pasa solamente una recta.

Cuando no se cortan se llaman rectas paralelas.

Rectas paralelas
Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 que se encuentran en un mismo plano son paralelas si no se cortan por más que se prolonguen.
En la siguiente figura, las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas. Esto se denota como: $\ell_1 \parallel \ell_2$.

Definición 5



Euclides propuso el siguiente postulado para las paralelas:

Comentario

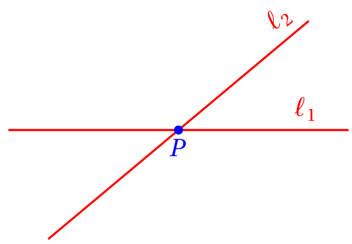
POSTULADO DE LAS PARALELAS
Por un punto cualquiera puede trazarse una paralela a una recta dada, y solamente una.

Cuando dos rectas se cortan comparten solamente uno de sus puntos.

Definición 6

PUNTO DE INTERSECCIÓN
Punto que pertenece a dos objetos geométricos a la vez.

En la siguiente figura, el punto P pertenece a las rectas ℓ_1 y ℓ_2:



El punto P es el punto de intersección de las rectas ℓ_1 y ℓ_2.

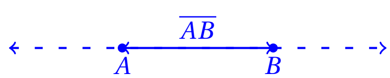
Definición 7

RAYO
Una parte de una recta que tiene un punto inicial y no tiene punto final.

Para denotar al rayo siempre indicamos primero el punto inicial y después otro punto cualquiera por el cual también pase.

Definición 8

SEGMENTO
Parte de una recta delimitada por dos puntos. Estos puntos son los extremos del segmento.

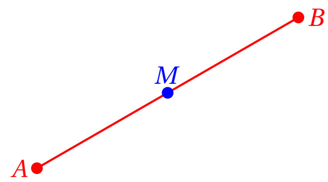


El segmento con extremos en los puntos A y B se denota por $\overline{AB}$.

Definición 9

PUNTO MEDIO
Es el punto que divide un segmento en dos segmentos de la misma medida.

La siguiente figura muestra un segmento $\overline{AB}$ con su punto medio M:

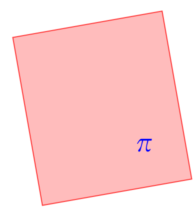


Superficie *Objeto geométrico que tiene longitud y ancho diferentes de cero.*	**Definición 10**

Una bandera ondeando es un buen ejemplo de superficie, si suponemos que el grosor de la tela es cero.

Plano *Superficie tal que al tomar cualesquiera dos de sus puntos, la línea recta que los conecta está completamente en esa superficie.*	**Definición 11**

La siguiente figura muestra un plano:



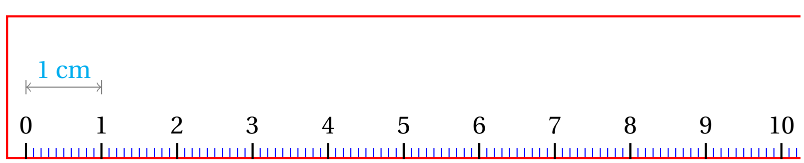
El símbolo π denota al plano mostrado.

Geometría plana *Rama de la Geometría que estudia las propiedades de los objetos geométricos en el plano.*	**Definición 12**

Para realizar trazos en geometría utilizaremos una regla y un compás.

Regla *Instrumento que se utiliza para hacer mediciones y para trazar rectas en el plano.*	**Definición 13**

La siguiente figura muestra una regla:

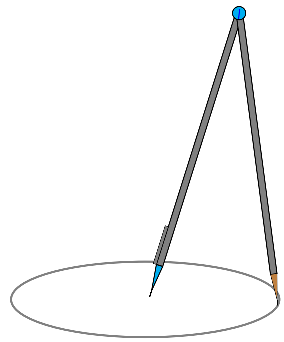


En geometría plana solamente nos interesa dibujar rectas. No utilizaremos la regla para hacer mediciones.

Compás *Instrumento que se utiliza en geometría para comparar longitudes y trazar arcos y círculos.*	**Definición 14**

El compás está compuesto de dos brazos. En uno de ellos está una punta de lápiz para dibujar los trazos y en el otro está una punta (generalmente metálica) que sirve de apoyo sobre el papel en el cual se trazará el dibujo.

La siguiente figura muestra un compás:



5.2 Ángulos en el plano

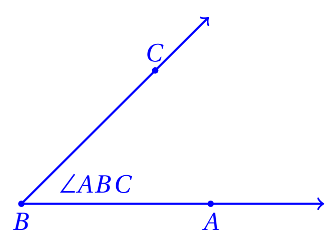
Con las definiciones dadas en la sección anterior podemos iniciar el estudio de la geometría plana.

Los objetos más elementales que sirven para estudiar las propiedades de otros objetos geométricos son los que se han definido hasta aquí.

El siguiente objeto en orden de complejidad es el ángulo plano, que se define en la siguiente sección.

5.2.1 Definición

Ángulo *Un ángulo plano está formado por dos rayos que tienen un mismo punto inicial.* *El vértice del ángulo es el punto inicial común a los dos rayos.*	**Definición 1**



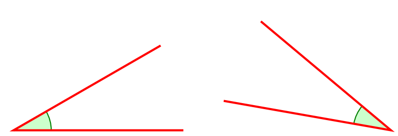
Un ángulo puede denotarse por el símbolo $\angle$, seguido de tres letras mayúsculas o por una letra griega, por ejemplo, α.

La medida del ángulo da una idea de la abertura entre sus lados.

Cuando dos ángulos se pueden superponer haciendo coincidir el sus vértices y sus lados, decimos que los dos ángulos son iguales.

Igualdad de ángulos *Dos ángulos son iguales si tienen la misma medida.*	**Definición 2**

Los siguientes ángulos tienen la misma medida:



Es decir, si la abertura entre los lados de cada ángulo es igual, los ángulos tienen la misma medida.

Para facilitar el uso del estudio de la geometría plana se han clasificado los ángulos de acuerdo a su medida.

5.2.2 Clasificación

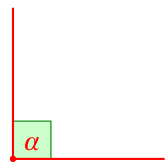
Cuando dos rectas se cortan forman 4 ángulos. Cuando los 4 ángulos son iguales, tenemos cuatro ángulos rectos.

Definición 1

ÁNGULO RECTO

Ángulo que se forma cuando dos rectas se cortan formando cuatro ángulos de la misma medida.

El siguiente ángulo es recto:

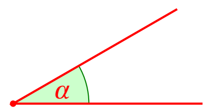


Definición 2

ÁNGULO AGUDO

Ángulo cuya medida es menor a la de un ángulo recto.

El ángulo α mostrado en la siguiente figura es agudo:

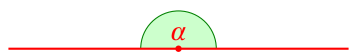


Definición 3

ÁNGULO LLANO

Ángulo cuya medida es igual a la de dos ángulos rectos.

El ángulo α mostrado en la siguiente figura es llano:

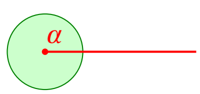


Definición 4

ÁNGULO PERIGONAL

Ángulo que mide lo mismo que cuatro ángulos rectos.

En la siguiente figura el ángulo α es perigonal.

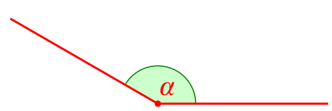


Definición 5

ÁNGULO OBTUSO

Ángulo cuya medida es mayor a la de un ángulo recto pero menor a la de un ángulo llano.

El ángulo α mostrado en la siguiente figura es obtuso:

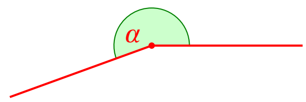


Definición 6

ÁNGULO ENTRANTE

Ángulo que mide más que un ángulo llano, pero menos que un ángulo perigonal.

En la siguiente figura, el ángulo α es entrante:

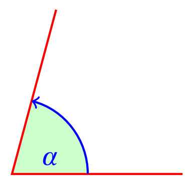


5.2.3 MEDICIÓN

Ya se mencionó que la medida del ángulo da una idea de la abertura entre sus lados.

A mayor abertura entre los lados del ángulo, mayor es su medida.

En geometría, los ángulos se miden siempre en el sentido contrario de giro de las manecillas del reloj.



Si un ángulo se requiere medir en el mismo sentido en que giran las manecillas del reloj, consideramos su medida negativa.

Las unidades de medida del ángulo que consideraremos por ahora son los grados sexagesimales.

GRADOS SEXAGESIMALES
Unidad de medida de ángulo equivalente a un $1/360$ *parte de la vuelta completa.*
Un grado sexagesimal se denota con el símbolo: $^\circ$*, y generalmente se le llama diciendo solamente «grado».*

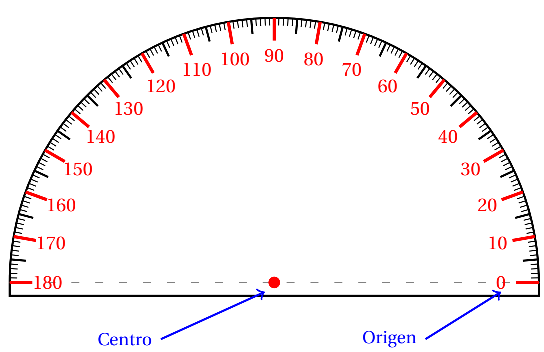
Definición 1

El instrumento que utilizamos para medir ángulos se llama «*transportador*».

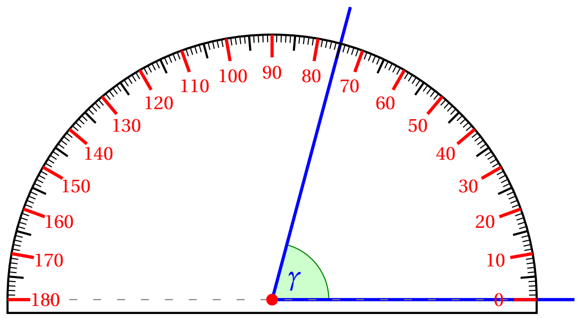
TRANSPORTADOR
Instrumento para medir la magnitud de un ángulo.
La escala que utilizan los transportadores es el grado sexagesimal.

Definición 2

La siguiente figura muestra un transportador:



Para medir un ángulo primero ubicamos el centro del transportador en el vértice del ángulo, y el origen (cero) sobre el lado inicial del ángulo, como se muestra en la siguiente figura:



La medida del ángulo γ mostrado en la figura anterior es: $\gamma = 75°$.

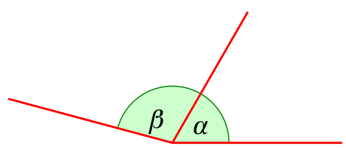
También frecuentemente encontraremos dos ángulos que comparten el vértice y un lado.

Definición 3

ÁNGULOS ADYACENTES

Dos ángulos son adyacentes cuando tienen el mismo vértice y comparten un lado común ubicado entre ellos.

En la siguiente figura los dos ángulos son adyacentes:



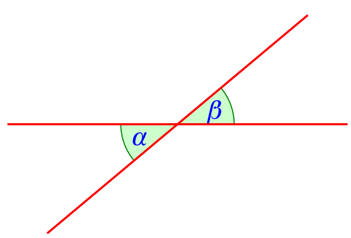
Los ángulos α y β tienen un mismo punto por vértice y tienen un lado en común que queda entre los otros lados, por eso son adyacentes.

Definición 4

ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

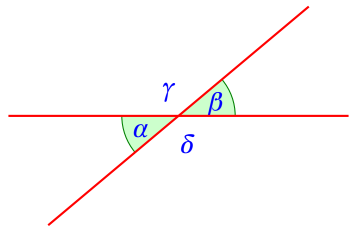
Dos ángulos son opuestos por el vértice si la prolongación de los lados de uno son los ángulos del otro.

Los siguientes ángulos son opuestos por el vértice:



Teorema 1 Los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida.

Consideramos la figura:



De la figura es evidente que: $\alpha+\delta=180°$, y también que: $\beta+\delta=180°$.
Esto nos permite igualar:

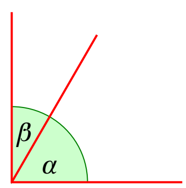
$$\alpha+\delta=\beta+\delta$$

Restando δ de ambos lados de la igualdad obtenemos: $\alpha=\beta$.
En palabras, los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida. ■

Otros pares de ángulos que se definen en geometría por su frecuente aparición en la resolución de problemas son los que a continuación se mencionan.

ÁNGULOS COMPLEMETARIOS *Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es igual a la medida de un ángulo recto.* *En otras palabras, si la suma de dos ángulos es igual a* $90°$*, entonces los ángulos son complementarios.*	**Definición 5**

En la siguiente figura, los ángulos α y β son complementarios.

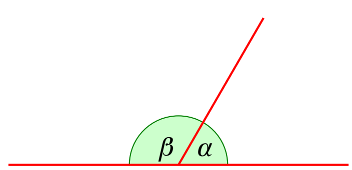


No se requiere que los ángulos sean adyancentes para que sean complementarios. Basta con que la suma de sus medidas sea $90°$.

Entonces decimos que el ángulo α es el complemento del ángulo β y también que el ángulo β es el complemento del ángulo α.

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS *Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es igual a la medida de un ángulo llano.* *En otras palabras, si la suma de dos ángulos es igual a* $180°$*, entonces los ángulos son complementarios.*	**Definición 6**

En la siguiente figura, los ángulos α y β son suplementarios.



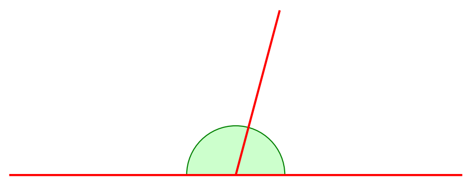
De manera semejante a los ángulos complementarios, no se requiere que los ángulos sean adyancentes para que sean suplementarios. Basta con que la suma de sus medidas sea $180°$.

Entonces decimos que el ángulo α es el suplemento del ángulo β y también que el ángulo β es el suplemento del ángulo α.

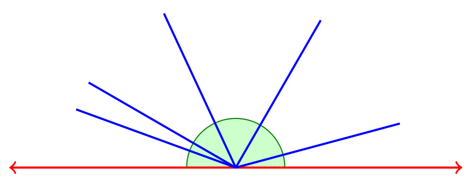
Observa que la suma de dos ángulos adyacentes que se forman al cortarse dos rectas es igual a 180°.

En otras palabras, si la suma de dos ángulos adyacentes es igual a 180°, entonces los lados no comúnes están sobre una línea recta.

También podemos decir que si dos ángulos adyacentes son suplementarios, entonces sus lados externos están en la misma línea recta.



Más aún, si formamos varios ángulos con vértice común y en uno de los lados de una línea recta, la suma de todos ellos es igual a 180°:



Teorema 2 Si dos ángulos tienen el mismo suplemento son iguales.

Si los ángulos α y β tienen el mismo suplemento, denotado por ξ, entonces cumplen:

$$\begin{aligned} \alpha+\xi=180^\circ &\quad\Rightarrow\quad \alpha=180^\circ-\xi \\ \beta+\xi=180^\circ &\quad\Rightarrow\quad \beta=180^\circ-\xi \end{aligned}$$

Como ambos, α y β son iguales a $180-\xi$, deben ser iguales entre sí. ■

Este mismo método puede utilizarse para demostrar el siguiente:

Teorema 3 Si dos ángulos tienen el mismo complemento son iguales.

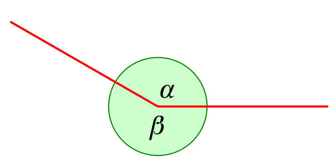
El cual se te queda como ejercicio.

Definición 7 ÁNGULOS CONJUGADOS

Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es igual a la medida de un ángulo perigonal.

En otras palabras, si la suma de dos ángulos es igual a 360°*, entonces los ángulos son conjugados.*

Los ángulos α y β mostrados en la siguiente figura son conjugados:



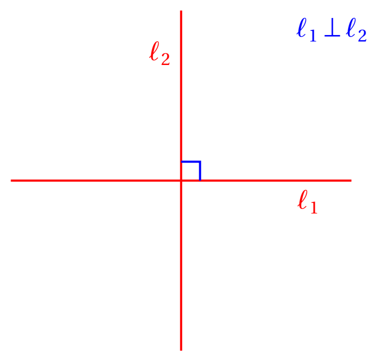
Entonces decimos que el ángulo α es el conjugado del ángulo β y también que el ángulo β es el conjugado del ángulo α.

Cuando dos rectas se cortan, pueden formarse cuatro ángulos iguales.

Entonces decimos que las rectas son perpendiculares.

RECTAS PERPENDICULARES **Definición 8**
Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 son perpendiculares si al cortarse forman cuatro ángulos rectos, y esto se denota por $\ell_1 \perp \ell_2$.

En la siguiente figura, las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son perpendiculares:

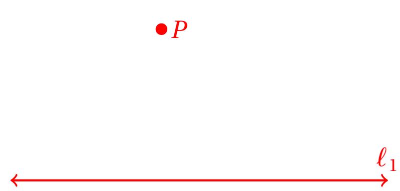


Solamente se puede trazar una perpendicular a una recta desde un punto. **Teorema 4**

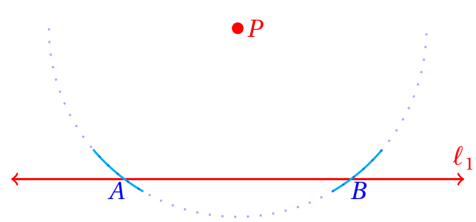
Para trazar una perpendicular a una recta desde un punto fuera de ésta podemos usar el siguiente procedimiento.

Traza una perpendicular a una recta dada desde un punto externo. **Ejemplo 1**

- Empezamos dibujando la recta a la cual se le trazará la perpendicular:

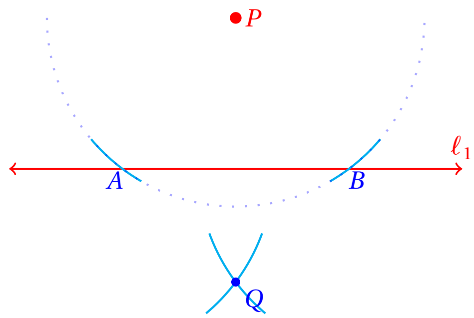


- Ahora vamos a trazar una perpendicular que pase por el punto P.
- Con este fin, apoyando el compás en el punto P trazamos dos arcos que corten la recta ℓ_1 como se muestra enseguida:

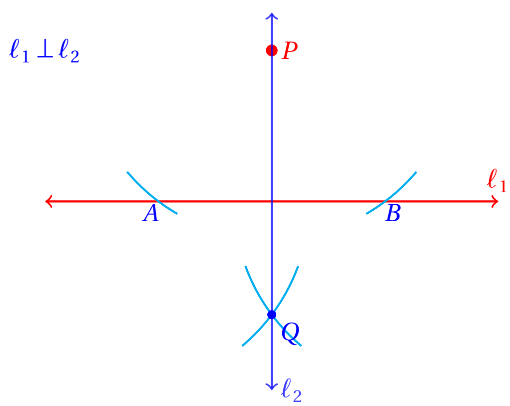


donde A y B son los puntos de intersección del arco con la recta ℓ_1.

- Ahora vamos a trazar, con el mismo radio, apoyándonos primero en A y luego en B dos arcos que se corten.
- El punto de intersección de los dos arcos lo llamaremos Q, como se muestra enseguida:



- Trazamos la recta que pasa por los puntos P y Q.
- Denotamos a esta recta por ℓ_2.

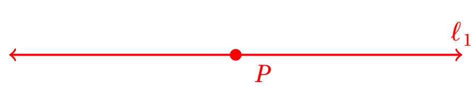


- Se cumple que $\ell_1 \perp \ell_2$.

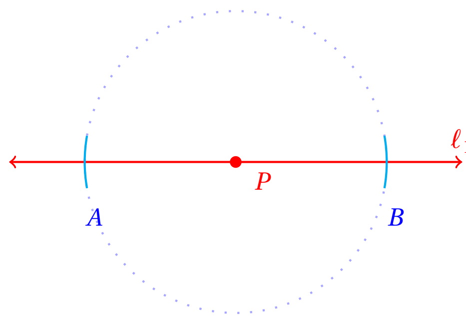
Este mismo procedimiento se utiliza para dividir un segmento en dos partes iguales.

Ejemplo 2 Traza una perpendicular a una recta dada desde uno de sus puntos.

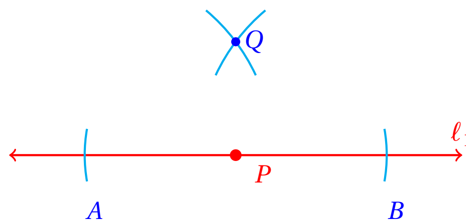
- Empezamos dibujando la recta ℓ_1 y el punto P por el cual pasará la perpendicular a ℓ_1:



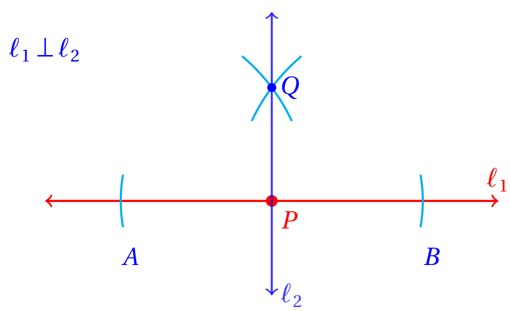
- Ahora, con ayuda del compás vamos a trazar dos arcos que corten la recta ℓ_1 apoyándonos en el punto P, como se muestra enseguida:



- Ahora vamos a trazar, con una mayor abertura del compás, dos arcos que se corten, apoyándonos primero en el punto A y luego en B.

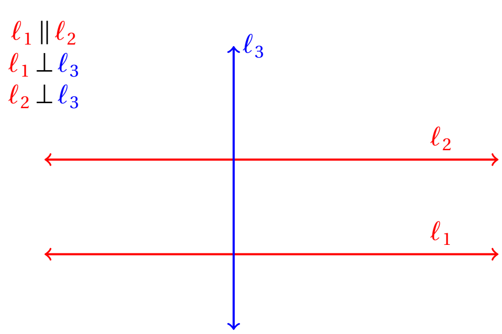


- Ahora basta unir los puntos P y Q para obtener la recta ℓ_2 perpendicular a ℓ_1:



Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 situadas en un mismo plano y perpendiculares a una tercera recta ℓ_3, son paralelas entre sí.	**Teorema 5**

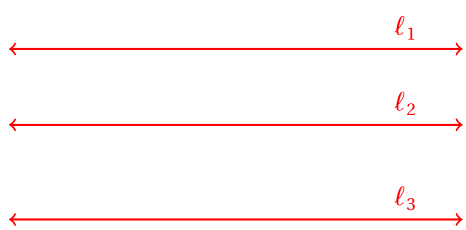
Si las rectas ℓ_1 y ℓ_2 no fueran paralelas, se podrían prolongar lo suficiente hasta que se cortaran en un punto de intersección P.
Entonces, sería posible trazar dos perpendiculares a la recta ℓ_3 desde el punto P, lo cual es imposible de acuerdo al teorema anterior.



También tenemos el siguiente teorema relacionado con el anterior:

Teorema 6 Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 situadas en un mismo plano y paralelas a una tercera recta ℓ_3, son paralelas entre sí.

Empezamos suponiendo que ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas a ℓ_3.
Debemos demostrar que $\ell_1 \parallel \ell_2$.
Si no lo fueran, entonces deberían cortarse en un punto de intersección P.
Esto significa que debería ser posible trazar dos rectas paralelas a la recta ℓ_3 desde el punto P, lo cual es imposible por el postulado de las paralelas.
Entonces, $\ell_1 \parallel \ell_2$.



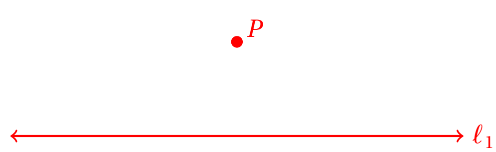
$$\left.\begin{array}{l}\ell_1 \parallel \ell_3\\ \ell_2 \parallel \ell_3\end{array}\right\} \Rightarrow \ell_1 \parallel \ell_2$$

Ahora veremos cómo trazar una recta paralela a otra dada por un punto dado.

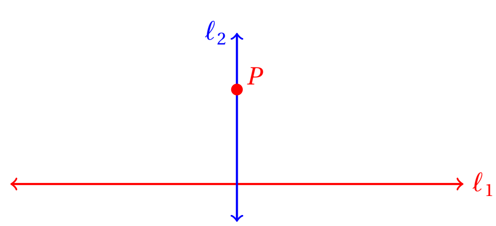
Obviamente, el punto dado debe ser externo a la recta dada, pues si el punto está sobre la recta, la paralela será ella misma, pues toda recta es paralela a sí misma.

Ejemplo 3 Traza una recta paralela a una recta ℓ_1 dada por un punto P dado.

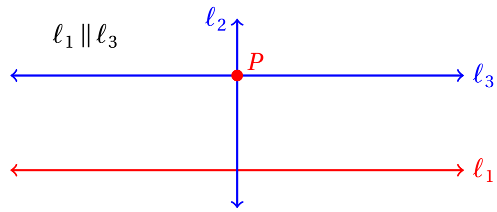
- Empezamos dibujando la situación:



- Ahora trazamos una recta perpendicular a ℓ_1 por el punto P:



- Para terminar trazamos una perpendicular a ℓ_2 que pase por el punto P:

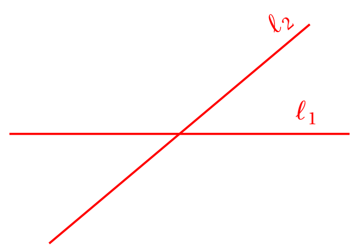


- La recta ℓ_3 es paralela a ℓ_1.

Si dos rectas se cortan, pero no son perpendiculares entonces se dice que son oblícuas.

RECTAS OBLÍCUAS *Dos rectas en un mismo plano son oblícuas si no son ni paralelas ni perpendiculares.*	**Definición 9**

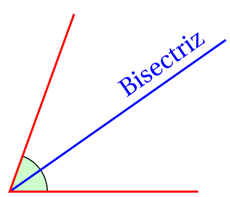
Las rectas ℓ_1 y ℓ_2 de la siguiente figura son oblícuas:



Algunas definiciones que servirán para resolver algunos problemas son las siguientes:

BISECTRIZ *Recta que divide a un ángulo en dos ángulos de la misma medida.*	**Definición 10**

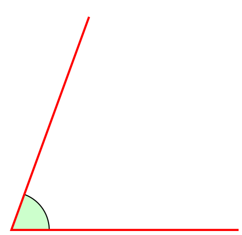
La siguiente figura muestra un ángulo con su bisectriz:



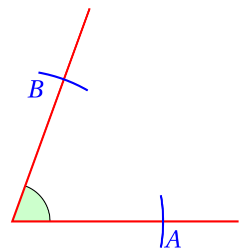
Para trazar la bisectriz de un ángulo utilizamos el procedimiento que se explica en el siguiente ejemplo.

Traza una bisectriz a un ángulo dado.	**Ejemplo 4**

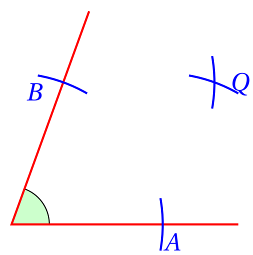
- Empezamos mostrando el ángulo al cual trazaremos la bisectriz:



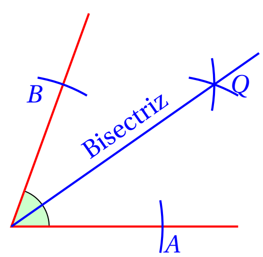
- Primero abrimos el compás para dibujar dos arcos que corten, uno a cada lado del ángulo:



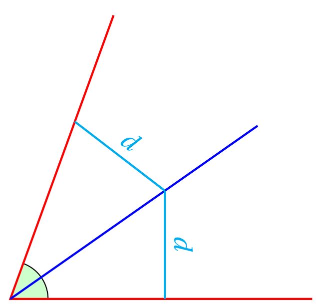
- Ahora, apoyándonos en cada punto de intersección generados con estos trazos, volvemos a trazar dos arcos, que se corten entre ellos.



- Para terminar sólo falta trazar la recta que pasa por el vértice del ángulo y el punto Q:



La bisectriz tiene la propiedad de que cada uno de sus puntos equidista de los lados del ángulo.



Observa cómo se construyó la bisectriz del ángulo: se tomaron dos puntos equidistantes del vértice del ángulo y con éstos se construyó un punto Q equidistante de los lados del mismo.

Al unir el vértice del ángulo con Q obtenemos la bisectriz del ángulo.

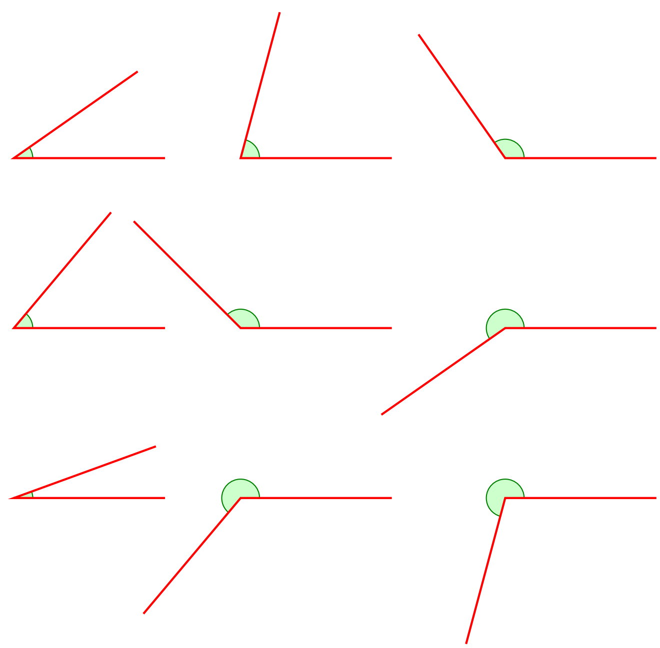
Ejercicios 5.2.3 Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

1) Investiga la definición de los siguientes términos:

(A) Definición
(B) Axioma
(C) Postulado
(D) Teorema
(E) Lema
(F) Corolario
(G) Demostración
(H) Hipótesis
(I) Conclusión
(J) Problema

de acuerdo a su significado en matemáticas.

2) Mide los siguiente ángulos:



3) Traza la bisectriz para cada uno de los ángulos del ejercicio anterior dibujándolos en tu cuaderno.

4) Demuestra que: *si dos ángulos tienen el mismo conjugado son iguales.*

5) Demuestra que: *Si dos ángulos suplementarios son iguales, entonces cada uno es un ángulo recto.*

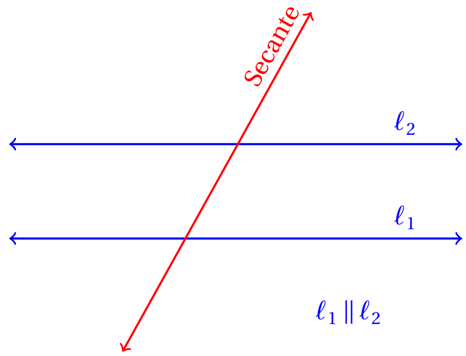
6) Demuestra que: *Si dos ángulos complementarios son iguales, entonces cada uno mide* $45°$.

5.2.4 Ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante

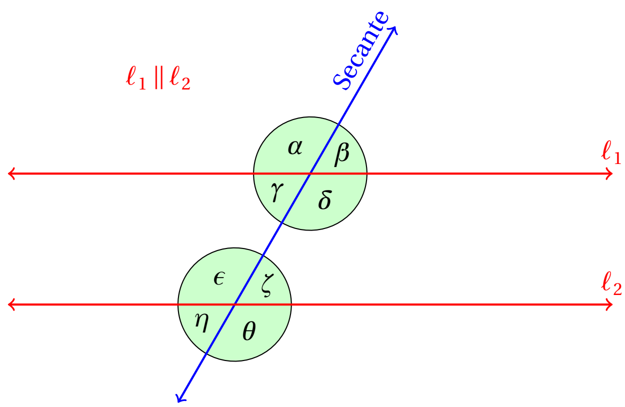
Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una tercer recta que no es paralela a ellas, se forman varios ángulos de interés.

Secante *La secante a una curva o a una figura geométrica es una recta que la corta.* *La secante también se conoce como transversal cuando corta a varias rectas.*	**Definición 1**

La siguiente figura muestra dos rectas paralelas y una secante que las corta:



Al cortar la secante a las dos rectas paralelas se forman ocho ángulos:



Para simplificar su estudio, estos ángulos se clasifican de la siguiente manera.

Definición 2

ÁNGULOS INTERNOS
Ángulos que quedan entre las rectas paralelas.

En la figura anterior, los ángulos: γ, δ, ϵ y ζ son los ángulos internos.

Definición 3

ÁNGULOS EXTERNOS
Áquellos ángulos que quedan fuera de entre las rectas paralelas.

En la figura anterior, los ángulos: α, β, η y θ son los ángulos externos.

Definición 4

ÁNGULOS ALTERNOS
Aquellos pares de ángulos que quedan en lados opuestos de la recta secante y que no son adyacentes.

En la figura anterior, los pares de ángulos: (α, δ), (β, ϵ), (η, δ) y (θ, α) son algunos ejemplos de pares de ángulos alternos.

Definición 5

ÁNGULOS CORRESPONDIENTES
Aquellos pares de ángulos que quedan en el mismo lado de la recta secante, no son adyacentes y siendo uno interno y el otro externo.

En la figura anterior, los pares de ángulos: (α, ϵ), (β, ζ), (η, γ) y (δ, θ) son correspondientes.

ÁNGULOS ALTERNOS INTERNOS *Aquellos pares de ángulos que son a la vez tanto alternos como internos.*	**Definición 6**

En la figura anterior, los pares de ángulos que son alternos internos son: (γ, ζ) y (δ, ϵ).

ÁNGULOS ALTERNOS EXTERNOS *Aquellos pares de ángulos que son a la vez tanto alternos como externos.*	**Definición 7**

En la figura anterior, los pares de ángulos que son alternos externos son: (α, θ) y (β, η).

ÁNGULOS CORRESPONDIENTES INTERNOS *Aquellos pares de ángulos que son a la vez tanto correspondientes como internos.*	**Definición 8**

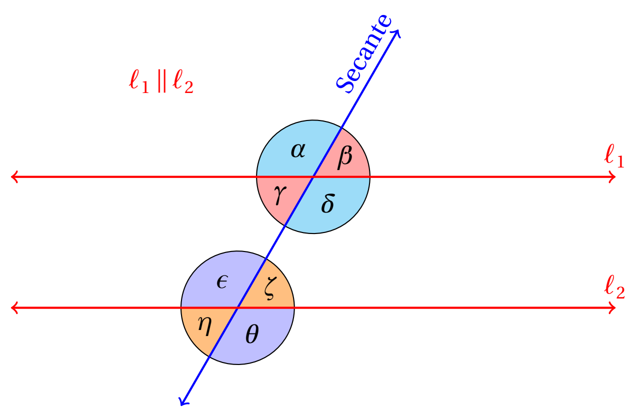
En la figura anterior, los pares de ángulos que son correspondientes internos son: (γ, ϵ) y (δ, ζ).

ÁNGULOS CORRESPONDIENTES EXTERNOS *Aquellos pares de ángulos que son a la vez tanto correspondientes como externos.*	**Definición 9**

En la figura anterior, los pares de ángulos que son correspondientes externos son: (α, η) y (β, θ).

Ya se demostró que los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida, entonces, se cumple:

✓ $\alpha = \delta$ ✓ $\beta = \gamma$ ✓ $\epsilon = \theta$ ✓ $\zeta = \eta$



Sin embargo, existen otros ángulos que son iguales y otros que tienen propiedades interesantes.

Por ejemplo, algunos pares de ángulos son suplementarios:

✓ (α, β) ✓ (γ, δ) ✓ (ϵ, ζ) ✓ (η, θ)

✓ (α, γ) ✓ (β, δ) ✓ (ϵ, η) ✓ (ζ, θ)

Si una secante corta dos rectas paralelas, los ángulos alternos internos son iguales.	**Teorema 1**

Para convencerte de que el teorema es verdadero, observa que si trasladamos la recta ℓ_2 poco a poco en dirección a la recta ℓ_1 sin cambiar su inclinación, entonces vamos a alcanzar la recta ℓ_1 y ambas rectas se confundirán.

Esto hace que el ángulo ϵ quede exactamente encima del ángulo α, que el ángulo ζ quede exactamente encima del ángulo β, que el ángulo η quede exactamente encima del ángulo γ, y que el ángulo θ quede exactamente encima del ángulo δ.

La igualdad de los ángulos que quedan superpuestos se justifica por el paralelismo de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 y que la recta secante no cambia de dirección, sino que se mantiene fija todo el tiempo.

Sin embargo, esto que se ha dado no es una demostración, sino solamente evidencia de que el teorema es verdedero.

Para dar una demostración completa de este teorema necesitaremos otros conceptos que se darán en secciones posteriores.

Del argumento anterior también se desprende el siguiente

Teorema 2 Si una secante corta dos rectas paralelas, los ángulos correspondientes son iguales.

Recuerda que los pares de ángulos correspondientes son

✓ (α,ϵ) ✓ (β,ζ) ✓ (γ,η) ✓ (δ,θ)

y precisamente estos pares de ángulos son los que se dijo quedan superpuestos al trasladar la recta ℓ_2 hasta que quede sobre la recta ℓ_1.

También es cierto el siguiente

Teorema 3 Si una secante corta dos rectas paralelas, los ángulos alternos externos son iguales.

Considerando que $\alpha = \epsilon$ porque son ángulos correspondientes, y que $\epsilon = \theta$ porque son ángulos opuestos por el vértice, por transitividad, tenemos que $\alpha = \theta$, que son ángulos alternos externos. ■

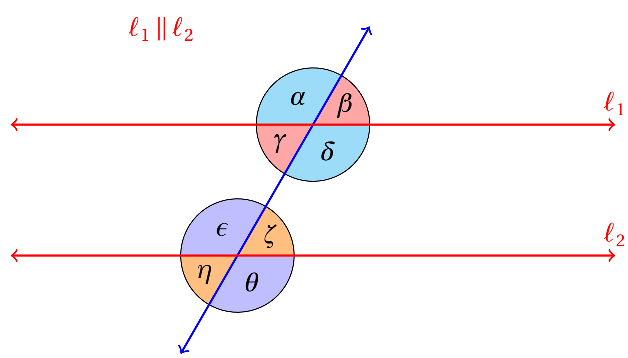
De manera semejante podemos probar que $\beta = \eta$.

De la figura es evidente también el siguiente

Teorema 4 La suma de dos ángulos internos adjuntos es igual a 180°.

Observa que la secante forma dos ángulos internos adjuntos en cada recta. Como los ángulos están sobre el mismo lado de la recta, la suma de todos ellos (solamente son dos) es igual a 180°.

Teorema 5 En la siguiente figura, los ángulos γ y ϵ son suplementarios. Igualmente, los ángulos δ y ζ son suplementarios.

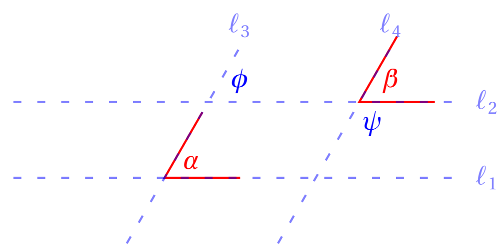


Dado que $\alpha = \epsilon$, y que $\alpha + \gamma = 180°$, al sustituir ϵ en lugar de α demostramos que son suplementarios. De manera semejante se demuestra que $\delta + \zeta = 180°$. ■

Estos teoremas sirven para demostrar otros teoremas.

Demuestra que si dos ángulos tienen paralelos sus lados uno a uno, entonces los ángulos, bien son iguales, bien son suplementarios. **Ejemplo 1**

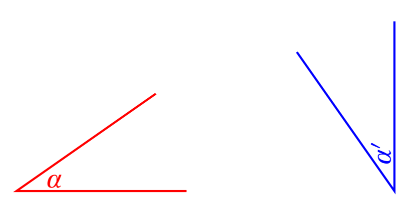
- Empezamos elaborando una figura para realizar una mejor imagen del problema:



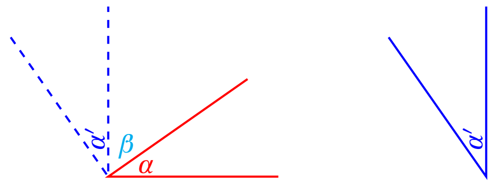
- En la figura se han trazado también dos pares de rectas paralelas prolongando los lados de cada ángulo hasta que se intersecten mutuamente.
- Por hipótesis: $\ell_1 \parallel \ell_2$ y $\ell_3 \parallel \ell_4$.
- Considerando que las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas, vemos que el ángulo ϕ mostrado en la figura es igual al ángulo α, porque son correspondientes.
- Considerando que las rectas ℓ_3 y ℓ_4 son paralelas, vemos que el ángulo ϕ es igual al ángulo β porque son correspondientes.
- Y por transitividad, tenemos:
$$\alpha = \phi = \beta$$
- El otro caso consiste en que el ángulo dado sea ψ en lugar de β.
- Observa que en este caso también se cumple que los lados de los ángulos son paralelos uno a uno, pero ahora los ángulos no son iguales, sino complementarios.
- Con esto queda demostrado el teorema.

Demuestra que si dos ángulos tienen sus lados perpendiculares uno a uno, entonces, los ángulos son iguales o son suplementarios. **Ejemplo 2**

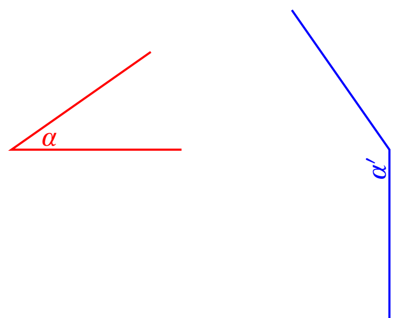
- De nuevo empezamos dibujando la situación:



- Podemos trasladar uno de los ángulos para que coincidan en sus vértices:



- Dado que los lados de los ángulos (uno a uno) son perpendiculares, los ángulos α y β son complementarios, al igual que los ángulos α' y β.
- Esto nos permite escribir:
$$\alpha+\beta=\alpha'+\beta$$
- Al restar β en ambos lados de la igualdad obtenemos el resultado buscado.
- El otro caso, en el que α y β sean suplementarios se obtiene cuando los lados del ángulo α' son como se indica en la siguiente figura:



Ejercicios 5.2.4 Resuelve los siguientes ejercicios.

1) ¿Cuáles tipos de ángulos se encuentran en las siguiente letras y símbolos?

✓ A ✓ H ✓ M ✓ V

✓ E ✓ K ✓ N ✓ W

✓ F ✓ L ✓ T ✓ Z

✓ $\neq$ ✓ $\bowtie$ ✓ $\exists$

✓ ⧖ ✓ $\nparallel$ ✓ $\nexists$

i. Interiores

ii. Exteriores

iii. Alternos internos

iv. Correspondientes

5.3 TRIÁNGULOS

En esta sección empezamos el estudio de las figuras geométricas planas creadas de segmentos de rectas.

Cuando la figura está formada por tres segmentos de recta y unidos por sus puntos extremo, esta figura se llama triángulo.

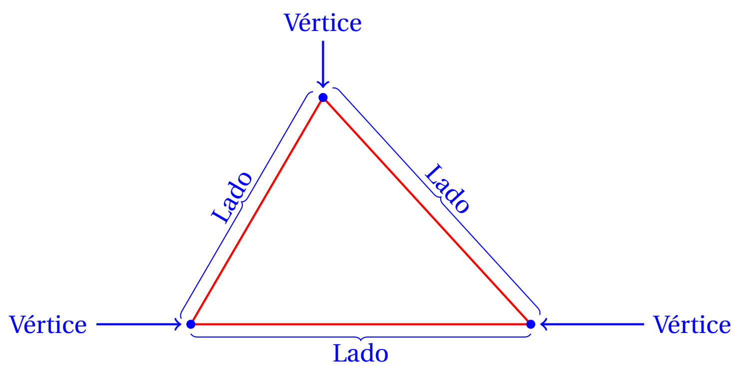
Los triángulos se clasifican de acuerdo a la medida de sus lados y a la medida de sus ángulos para facilitar su estudio.

5.3.1 DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN

Empezamos con las definiciones básicas.

TRIÁNGULO *Figura geométrica plana cerrada, limitada por tres segmentos de recta unidos por sus extremos.* *Los puntos donde se intersectan dos segmentos se llaman vértices del triángulo y los segmentos lados.*	**Definición 1**

La siguiente figura muestra un triángulo:

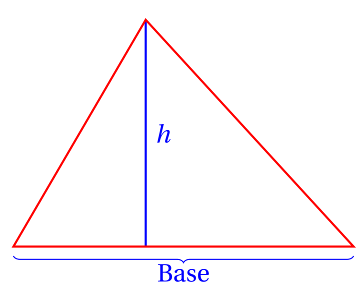


La base del triángulo es el lado sobre el cual descansa.

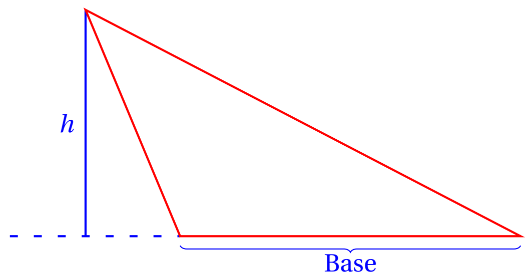
Otro elemento importante del triángulo es su altura.

ALTURA DE UN TRIÁNGULO *La altura de un triángulo es el segmento de recta que es perpendicular a la base y que pasa por el vértice opuesto a la base.*	**Definición 2**

En la siguiente figura se muestra un triángulo con su altura denotada por h:



Cuando el triángulo tiene un ángulo obtuso es posible que se requiera extender la base para que la perpendicular pase por el vértice opuesto, como en el siguiente ejemplo:

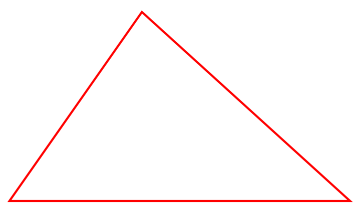


El triángulo es una figura geométrica ampliamente utilizada en arquitectura e ingeniería.

Los triángulos se clasifican de acuerdo a la medida de sus lados como:

Definición 3 TRIÁNGULO ESCALENO
Aquel triángulo que tiene las medidas de todos sus lados diferentes.

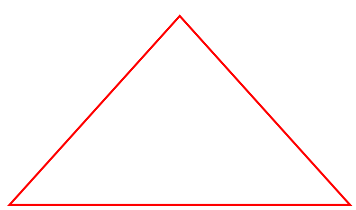
El siguiente triángulo es escaleno:



T. escaleno

Definición 4 TRIÁNGULO ISÓSCELES
Aquel triángulo que tiene dos lados con la misma medida.

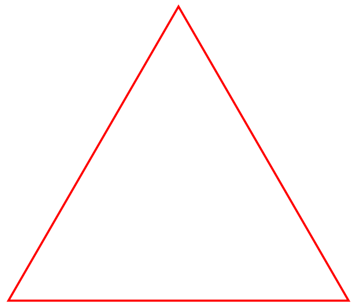
El siguiente triángulo es isosceles:



T isósceles

Definición 5 TRIÁNGULO EQUILÁTERO
Aquel triángulo que tiene las medidas de todos sus lados iguales.

El siguiente triángulo es equilátero:

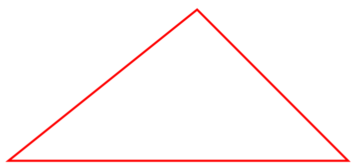


T. equilátero

Los triángulos también se clasifican de acuerdo a la medida de sus ángulos internos, como sigue.

TRIÁNGULO ACUTÁNGULO
Aquel triángulo que tiene todos sus ángulos agudos.
Definición 6

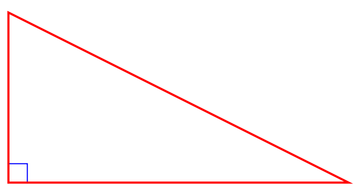
El siguiente triángulo es acutángulo:



T. acutángulo

TRIÁNGULO RECTÁNGULO
Aquel triángulo que tiene un ángulo recto.
Definición 7

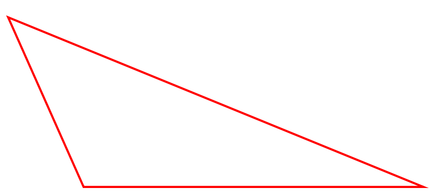
El siguiente triángulo es un triángulo rectángulo:



T . rectángulo

TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO
Aquel triángulo que tiene un angulo obtuso.
Definición 8

El siguiente triángulo es un triángulo obtuso:

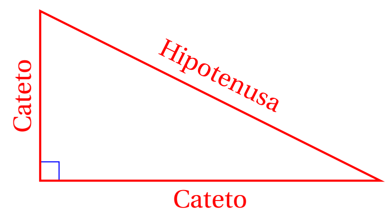


T. obtusángulo

En un triángulo rectángulo se definen además,

Hipotenusa: es el lado opuesto al ángulo recto.

Cateto: es cada uno de los lados que forman el ángulo recto.



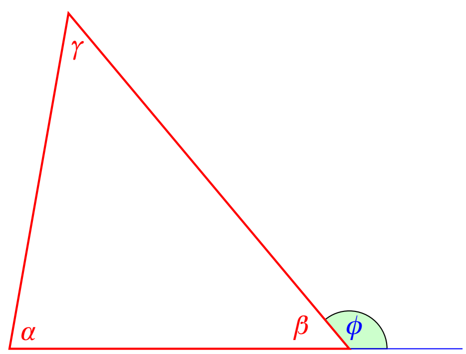
Para el triángulo también se definen los siguientes elementos.

Definición 9

ÁNGULO EXTERNO

Es aquel ángulo que se forma cuando se prolonga uno de los lados del triángulo.

La siguiente figura muestra un ángulo externo ϕ del tríangulo:



Definición 10

ÁNGULO INTERNO OPUESTO

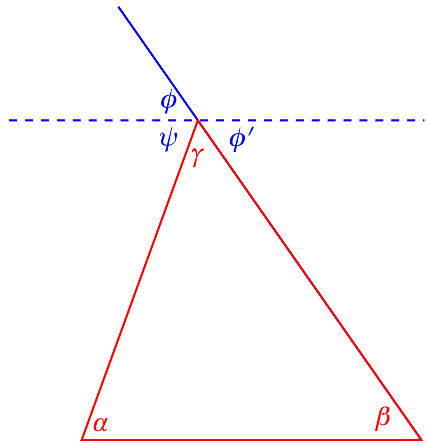
Aquellos ángulos internos del triángulo que no son adyacentes al ángulo externo considerado.

En la figura anterior, los ángulos α y γ son ángulos internos opuestos al ángulo externo ϕ mostrado.

Teorema 1

El ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los otros dos ángulos internos opuestos.

Empezamos trazando una recta paralela al lado del triángulo que no es parte del ángulo externo, por el vértice de éste:



Esta recta ha dividido al ángulo externo en dos partes, que se han denotado por ψ y ϕ'.
Observa que los ángulos α y ψ son alternos internos. Esto significa que $\alpha = \psi$.
También, observa que $\phi = \phi'$, porque son opuestos por el vértice.
Además, los ángulos ϕ' y β son alternos internos, por lo que $\phi' = \beta = \phi$.
Entonces, si $\xi = \psi + \phi$ es el ángulo externo, tenemos:

$$\xi = \psi + \phi = \alpha + \beta$$

con lo que queda demostrado el teorema. ■

Demuestra que la suma de los ángulos internos de un triángulo que se encuentra en el plano es igual a 180°.	**Ejemplo 1**

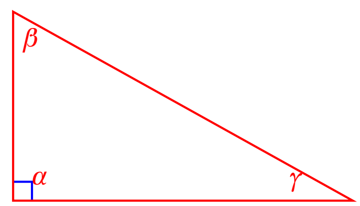
- Basándonos en la figura utilizada para demostrar el teorema anterior, vemos que $\phi + \psi + \gamma = 180^\circ$, porque los tres están en un mismo lado de una recta.
- Además, en esa demostración se justifica que: $\alpha = \psi$ y que $\beta = \phi$.
- Entonces,
$$\alpha + \beta + \gamma = \psi + \phi + \gamma = 180^\circ$$
- Con lo que queda demostrado este teorema.

Algunos resultados que se desprenden de los dos teoremas antes demostrados son los siguientes:

Cada uno de los ángulos internos de un triángulo equilátero mide 60°.	**Corolario 1**
La suma de cualesquiera dos ángulos internos de un triángulo siempre es menor a 180°.	**Corolario 2**
Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto.	**Corolario 3**
Un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso.	**Corolario 4**
Un triángulo tiene al menos dos ángulos agudos.	**Corolario 5**

Ejemplo 2 Demuestra que la suma de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

- Si el triángulo es rectángulo, necesariamente debe tener un ángulo recto, al cual denotaremos por α.
- Los otros dos ángulos deben ser agudos:



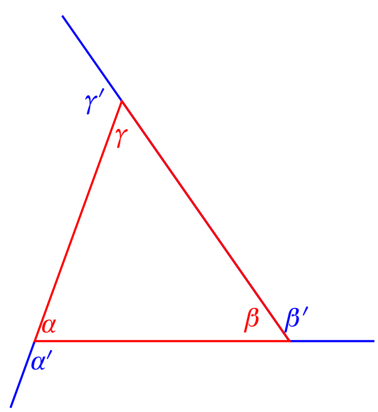
- Dado que $\alpha+\beta+\gamma=180°$, y $\alpha=90°$, necesariamente:

$$90°+\beta+\gamma=180° \qquad \Rightarrow \qquad \beta+\gamma=90°$$

- Con lo que queda establecido el teorema.

Ejemplo 3 Demuestra que la suma de los tres ángulos externos de un triángulo que se encuentra en el plano es igual a 360°.

- Empezamos dibujando el triángulo y sus tres ángulos externos:



- De la figura es evidente que:

$$\begin{aligned} \alpha+\alpha' &= 180° \\ \beta+\beta' &= 180° \\ \gamma+\gamma' &= 180° \end{aligned}$$

- Al sumar las tres ecuaciones obtenemos:

$$\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'=540°$$

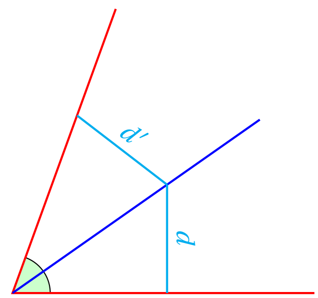
- Pero también sabemos que $\alpha+\beta+\gamma=180°$, porque éstos son los tres ángulos internos del triángulo. Entonces,

$$\begin{aligned} 180° + \alpha' + \beta' + \gamma' &= 540° \\ \alpha' + \beta' + \gamma' &= 360° \end{aligned}$$

- Con lo que se demuestra el teorema.

Demuestra que cada punto de la bisectriz de un ángulo está a la misma distancia de cada uno de los lados del ángulo. **Ejemplo 4**

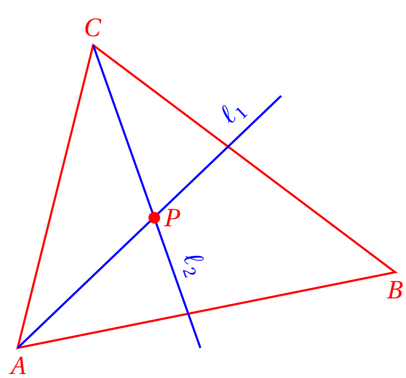
- Empezamos dibujando la situación:



- Como la bisectriz divide al ángulo en dos partes iguales, y las distancias son medidas perpendicularmente a los lados del ángulo, los triángulos que se forman son iguales, pues tienen iguales sus tres ángulos y la hipotenusa.
- Pero si los triángulos rectángulos son iguales, los catetos son iguales, uno a uno.
- Es decir, las distancias d y d' son iguales, que era lo que se quería demostrar.

Demuestra que las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un mismo punto. **Ejemplo 5**

- La figura que ilustra la situación es la siguiente:



- El punto P, por estar en la bisectriz ℓ_1, está a la misma distancia de los lados $\overline{AB}$ como de $\overline{AC}$.

- Es decir, la distancia desde P hasta $\overline{AB}$, la cual denotaremos por: $D(P,\overline{AB})$ es la misma que la distancia desde P hasta $\overline{AC}$, denotada por: $D(P,\overline{AC})$.

- Pero el punto P también está en la bisectriz ℓ_2, por eso está a la misma distancia de los lados $\overline{AC}$ como de $\overline{BC}$.

- Esto implica: $D(P,\overline{BC}) = D(P,\overline{AC})$.

- Entonces,

$$D(P,\overline{AB}) = D(P,\overline{AC}) = D(P,\overline{BC})$$

  En palabras, el punto P está a la misma distancia de los tres lados del triángulo.

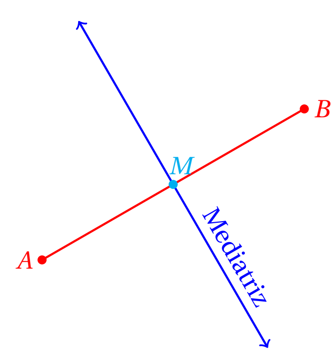
- Y la bisectriz del ángulo con vértice en B necesariamente pasará por el punto P, pues este punto equidista de los lados $\overline{AB}$ como de BC.

- Con esto queda demostrado el teorema.

Definición 11 INCENTRO
Es el punto donde se intersectan las tres bisectrices de un triángulo.

Definición 12 MEDIATRIZ
La mediatriz de un segmento es la recta que es perpendicular al segmento y que pasa por su punto medio.

La siguiente figura muestra un segmento con su mediatriz:

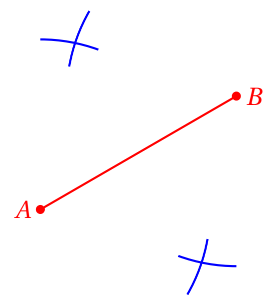


Los puntos A y B son extremos del segmento y el punto M es el punto medio de éstos.

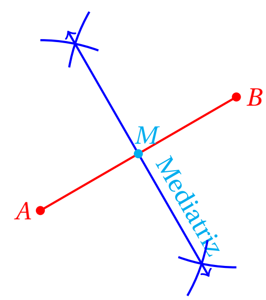
El siguiente ejemplo muestra el procedimiento para trazar una mediatriz a un segmento dado.

Ejemplo 6 Traza una mediatriz a un segmento $\overline{AB}$ dado.

- Con el compás abierto más que la mitad de la longitud del segmento, trazamos arcos que se corten mutuamente, apoyándonos primero en A y luego en B como se muestra enseguida:



- Ahora solo falta trazar la recta que pasa por los puntos de intersección de los arcos para obtener la mediatriz del segmento $\overline{AB}$:



El punto M indicado en la figura del ejemplo es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

El siguiente teorema se da sin demostración por ahora.

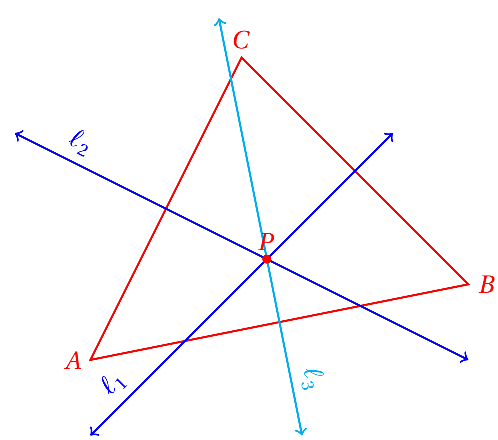
Teorema 2

Cada punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento sobre la cual se le dibujó.

Ejemplo 7

Demuestra que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un solo punto.

- Empezamos dibujando la situación:



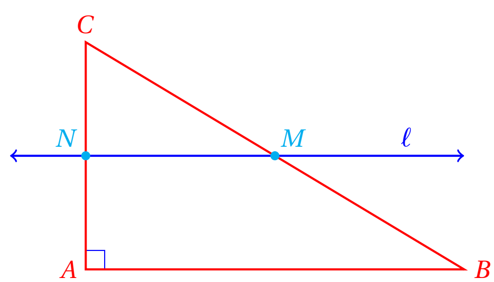
- El punto P, por pertenecer a la mediatriz ℓ_1 está a la misma distancia de los vértices B y C.
- Pero P también está sobre la mediatriz ℓ_2, por eso equidista de los vértices A y C del triángulo.

- Entonces, la otra mediatriz debe pasar necesariamente por el punto P, pues este punto está a la misma distancia de los vértices A y B.
- Es decir, las tres mediatrices se cortan en el punto P.

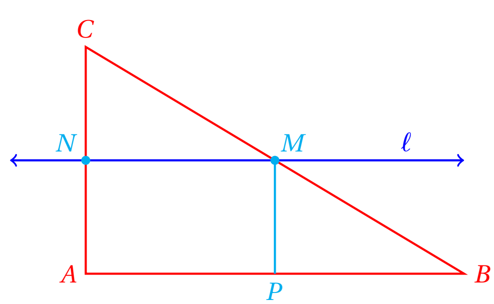
Definición 13 CIRCUNCENTRO
Es el punto donde se intersectan las tres mediatrices de un triángulo.

Ejemplo 8 Demuestra que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices del triángulo.

- Trazamos una recta paralela al cateto $\overline{AB}$ que pase por M, siendo el punto M es el punto de la hipotenusa:

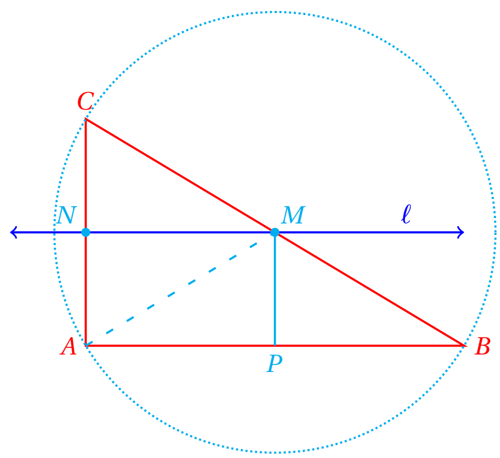


- Como los catetos son perpendiculares y $\ell \parallel \overline{AB}$, la recta ℓ es perpendicular al cateto $\overline{AC}$.
- Observa que el triángulo $\triangle MCN$ también es un triángulo rectángulo.
- El triángulo inicial $\triangle ABC$ y el triángulo $\triangle MCN$ comparten el ángulo con vértice en C y además ambos poseen un ángulo recto.
- Esto significa que los ángulos: $\angle CMN$ y $\angle CBA$, son iguales.
- Recuerda también que: $|\overline{CM}| = |\overline{BM}|$, porque M es el punto medio de $\overline{BC}$.
- Entonces, si trazamos una perpendicular al cateto $\overline{AB}$, que pase por el punto M obtendremos:



- Observa que $\overline{AC} \parallel \overline{MP}$, por lo que el par de ángulos $\angle NCM$ y en $\angle PMB$ son correspondientes, y por tanto, tienen la misma medida.
- Los triángulos $\triangle PBM$ y $\triangle NMC$ son triángulos rectángulos.
- Los tres ángulos internos de estos triángulos son idénticos,

- Además la hipotenusa de cada uno de éstos ($\triangle PBM$ y $\triangle NMC$) mide la mitad del segmento $\overline{BC}$ (hipotenusa del triángulo $\triangle ABC$).
- Esto significa que los triángulos $\triangle PBM$ y $\triangle NMC$ son idénticos, es decir, tienen las medidas de sus lados iguales uno a uno.
- Entonces, como $|\overline{MP}| = |\overline{AN}|$, y ya dedujimos que $|\overline{MP}| = |\overline{CN}|$, se sigue que $|\overline{AN}| = |\overline{CN}|$.
- En otras palabras, el punto N es el punto medio del cateto $\overline{AC}$.
- Esto es, la recta ℓ es la mediatriz del cateto $\overline{AC}$, pues es perpendicular al lado $\overline{AC}$ y pasa por su punto medio.
- Entonces, el punto M, por estar sobre la mediatriz del cateto $\overline{AC}$, está a la misma distancia de los vértices A y C.
- Pero este punto M está a la misma distancia de B como de C, pues es el punto medio de la hipotenusa del triángulo $\triangle ABC$.
- Entonces, el punto M equidista de los tres vértices:

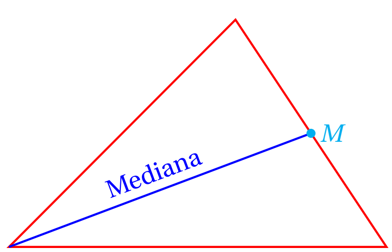


- En conclusión, el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo que se encuentra en un plano es el circuncentro del triángulo.

MEDIANA — **Definición 14**

La mediana es el segmento de recta que pasa por el punto medio de un lado del triángulo y por el vértice opuesto.

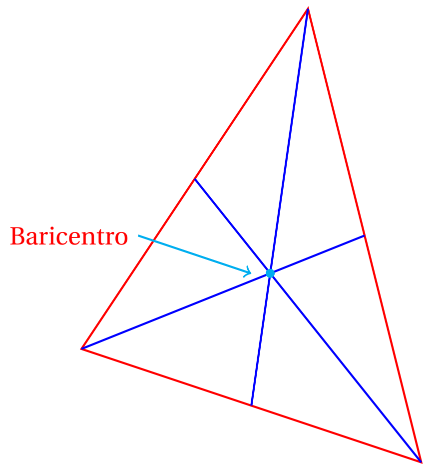
La siguiente figura muestra un triángulo y una de sus medianas:



Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto.

Definición 15 BARICENTRO
Es el punto donde se intersectan las tres medianas de un triángulo.

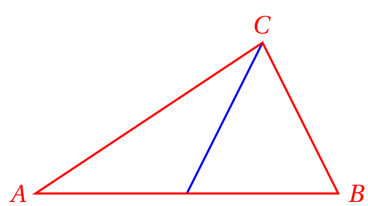
En la siguiente figura semuestra un triángulo con sus tres medianas y el baricentro:



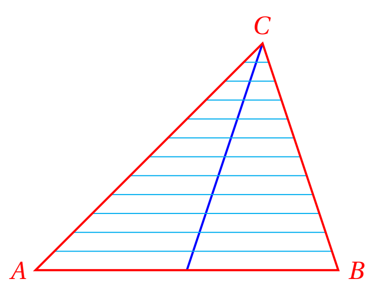
Físicamente, el baricentro representa el centro de gravedad del triángulo.

Ejemplo 9 Muestra la interpretación física del baricentro como el centro de gravedad del triángulo.

- Empezamos dibujando el triángulo y una de sus medianas:

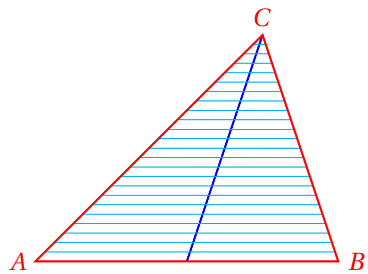


- Ahora vamos a dibujar muchas rectas paralelas a la base del triángulo para dar la interpretación física:



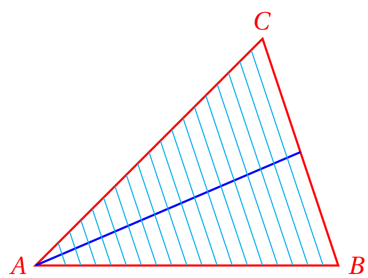
- Observa cada una de las *tiras* horizontales que se formaron con los segmentos agregados al triángulo.
- Si buscamos el punto donde cada tira se equilibra, vamos a encontrarlo muy cerca del punto medio de su longitud.

- Si hacemos más *tiras* horizontales, hasta considerar cada tira como un segmento, obtendremos entonces que el punto medio del segmento es el punto donde se equilibra cada tira:

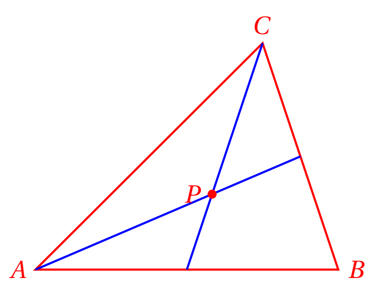


- En otras palabras, la mediana es la recta de equilibrio del triángulo, respecto de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

- Al considerar una segunda mediana del triángulo, obtenemos otra recta de equilibrio del triángulo:



- De nuevo, podemos argumentar como en el caso anterior y ver que la mediana es la recta de equilibrio para los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

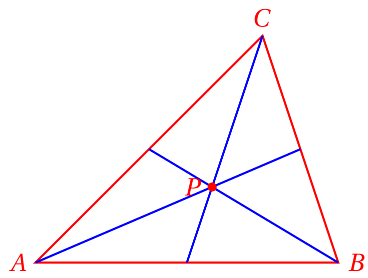


- El punto P de intersección de las dos medianas, por pertenecer a la primera mediana dibujada, equilibra a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

- Pero por pertenecer a la segunda mediana dibujada, equilibra a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

- Es decir, en el punto P, el triángulo se equilibra respecto de sus tres lados.

- Entonces, la otra mediana, que equilibra respecto de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, debe pasar por ese punto.

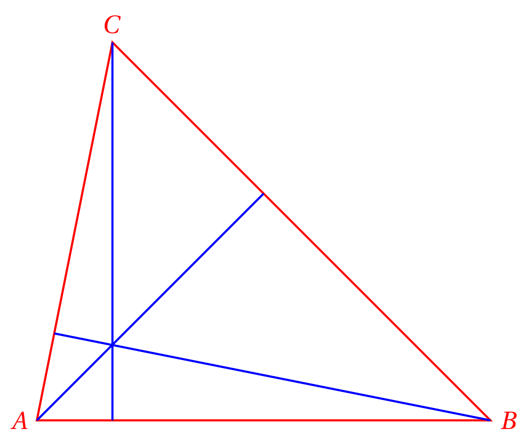


Teorema 3 Las tres medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto.

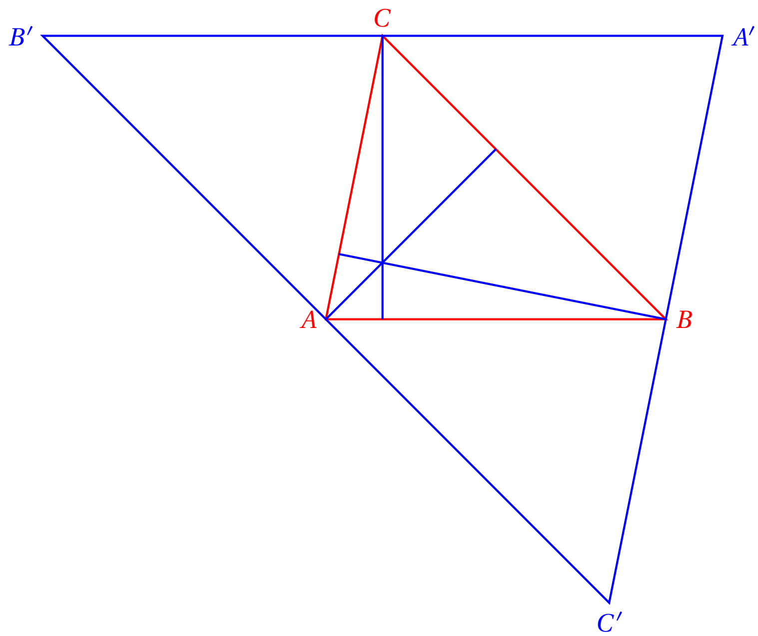
Las tres alturas de un triángulo también se cortan en un mismo punto.

Ejemplo 10 Demuestra que las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto.

- Empezamos dibujando un triángulo con sus tres alturas:



- Dibujamos rectas paralelas a cada uno de los lados que pasen por el vértice opuesto a cada una de ellas para formar otro triángulo:



- Dado que $\overline{AB'} \parallel \overline{BC}$, se tiene que $|\overline{B'C}| = |\overline{AB}|$, porque dos rectas paralelas mantienen la misma distancia entre ellas en cualquiera de sus puntos.
- También se cumple que $\overline{AC} \parallel \overline{BA'}$, por lo que que $|\overline{CA'}| = |\overline{AB}|$.
- Con esto probamos que el punto C es el punto medio del segmento $\overline{A'B'}$.
- Y como la altura dibujada al triángulo $\triangle ABC$ que pasa por el punto C es perpendicular al lado $\overline{AB}$ y éste a su vez es paralelo a $\overline{B'A'}$, esta altura es la mediatriz del segmento $\overline{B'A'}$.
- De manera semejante podemos probar que las otras alturas son las mediatrices de los otros lados del triángulo $\triangle A'B'C'$.
- Y como ya habíamos demotrado que las tres mediatrices de un triángulo se intersectan en un mismo punto, las tres alturas del triángulo $\triangle ABC$ se cortan también en un mismo punto por ser las tres mediatrices del triángulo $\triangle A'B'C'$.

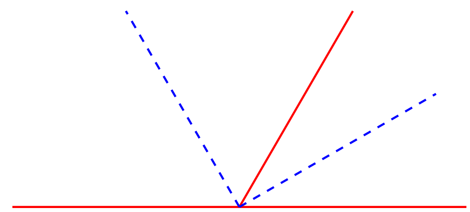
ORTOCENTRO
Es el punto donde se intersectan las tres alturas de un triángulo. **Definición 16**

Indica si la declaración es falsa o verdadera para cada uno de los ejercicios. Argumenta tu respuesta. Supón que las figuras mencionadas se encuentran en un plano. **Ejercicios 5.3**

1) La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo puede ser mayor al tercer lado.

2) Ningún ángulo interno de un triángulo puede ser entrante.

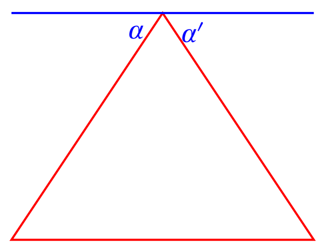
3) Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son mutuamente perpendiculares.



4) Las bisectrices de dos ángulos complementarios son mutuamente perpendiculares.

5) Las bisectrices de dos ángulos suplementarios son mutuamente perpendiculares.

6) Si se dibuja una línea paralela a la base de un triángulo isósceles que pase por el vértice opuesto, ésta formará dos ángulos de la misma medida con los lados del triángulo.



7) Si la suma de dos ángulos internos de un triángulo es igual al tercer ángulo, entonces el triángulo es rectángulo.

8) Si la mediana de la base de un triángulo es perpendicular a la base, entonces el triángulo es isósceles.

9) Una de las medianas de un triángulo isósceles es perpendicular a la base.

10) Cualquier triángulo rectángulo isósceles puede dividirse en otros dos triángulos rectángulos isósceles a través de una recta.

11) Si la mediatriz de la base de un triángulo coincide con la bisectriz del ángulo con vértice en el vértice opuesto de la base, entonces, el triángulo es isósceles.

12) La perpendicular a la bisectriz forma un triángulo isósceles con los lados del ángulo.

13) Ningún triángulo puede tener más de un ángulo recto.

14) Ningún triángulo puede tener más de un ángulo obtuso.

Instrucciones Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

15) Las medidas de los ángulos internos agudos de un triángulo rectángulo son tales que uno es igual al doble del otro. ¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos internos? $30°, 60°, 90°$.

16) Las medidas de los ángulos internos agudos de un triángulo rectángulo son iguales. ¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos internos? $45°, 45°, 90°$.

17) El ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles mide $50°$. ¿Cuánto miden los otros dos ángulos internos? $40°, 40°$

18) El ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles mide el doble de lo que mide cada uno de los otros dos ángulos. ¿Cuánto miden los ángulos internos de ese triángulo? $45°, 45°, 90°$.

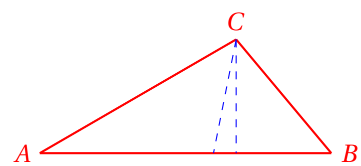
19) Dentro de qué clasificaciones cae el triángulo del problema anterior? Rectángulo e isósceles

20) ¿Qué medida debe tener cada uno de los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles para que éste sea acutángulo? $\alpha > 45°$.

21) En el triángulo $\triangle ABC$, el ángulo con vértice en A mide 30° y el ángulo externo en B mide 110°. ¿Cuánto mide el ángulo C? 80°.

22) En el triángulo $\triangle ABC$ los ángulos con vérice en A y B miden 50° y 70°, respectivamente. Se forma un triángulo con las bisectrices de estos dos ángulos y el lado $\overline{AB}$. ¿Cuánto mide cada ángulo de este nuevo triángulo? $25°, 35°, 120°$.

23) En el siguiente triángulo $\triangle ABC$, $\angle CAB = 30°$, $\angle CBA = 50°$. ¿Cuánto mide el ángulo formado por la altura y la bisectriz que pasan por C?



5.3.2 Congruencia de triángulos

Como habrás observado, la idea de que dos segmentos o dos ángulos tienen la misma medida sirve mucho para demostrar teoremas en geometría.

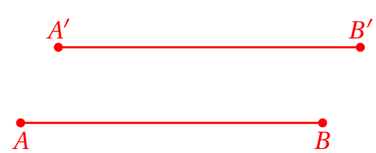
Igualmente, cuando dos triángulos tienen sus lados de la misma medida, uno a uno, sirve para resolver problemas.

El concepto de congruencia es el que se refiere a la igualdad de objetos geométricos.

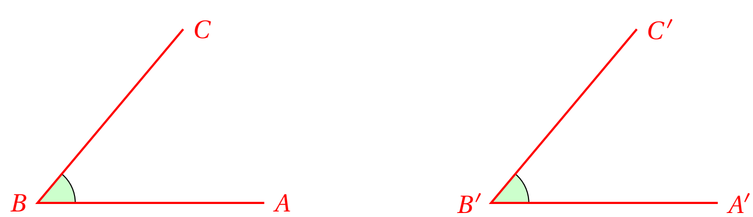
Definición 1

Congruencia
Dos objetos geométricos son congruentes si tienen las mismas medidas y los mismos ángulos.

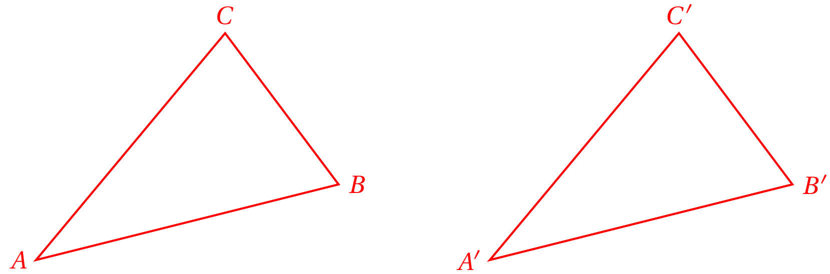
Por ejemplo, los siguientes segmentos son congruentes:



Igualmente, los siguiente dos ángulos son congruentes, pues tienen la misma medida:



Los siguientes triángulos son congruentes, pues tienen las medidas de sus lados y de sus angulos iguales, uno a uno:



Para denotar matemáticamente que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son congruentes, vamos a usar la notación:

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

y esto se leerá como: «*El triángulo ABC es congruente con el triángulo $A'B'C'$*».

Existen tres criterios para determinar si dos triángulos dados son o no congruentes.

Los criterios son los siguientes:

i. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, los dos triángulos son congruentes.

ii. Si un ángulo de un triángulo es congruente con el ángulo de otro triángulo, y además los lados del ángulo considerado en cada triángulo son congruentes, entonces los dos triángulos son congruentes.

iii. Si las longitudes de los lados de un triángulo son congruentes a las longitudes de los lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

El siguiente teorema es importante:

Teorema 1

La congruencia de triángulos satisface:

i. $\triangle ABC \cong \triangle ABC$.

ii. Si $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, entonces $\triangle PQR \cong \triangle ABC$.

iii. Si $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ y $\triangle PQR \cong \triangle RST$, entonces, $\triangle ABC \cong \triangle RST$.

En palabras, la primera afirmación dice en palabras que todo triángulo es congruente a sí mismo. Es decir, la congruencia de triángulos tiene la propiedad reflexiva.

La segunda afirmación dice que si un triángulo es congruente a otro triángulo, el segundo es congruente al primero. Es decir, la congruencia de triángulos tiene la propiedad simétrica.

La tercera afirmación dice que si un primer triángulo es congruente a un segundo triángulo, y a su vez este segundo triángulo es congruente a otro tercer triángulo, entonces el primero y el tercero son congruentes. Es decir, la congruencia entre triángulos tiene la propiedad transitiva.

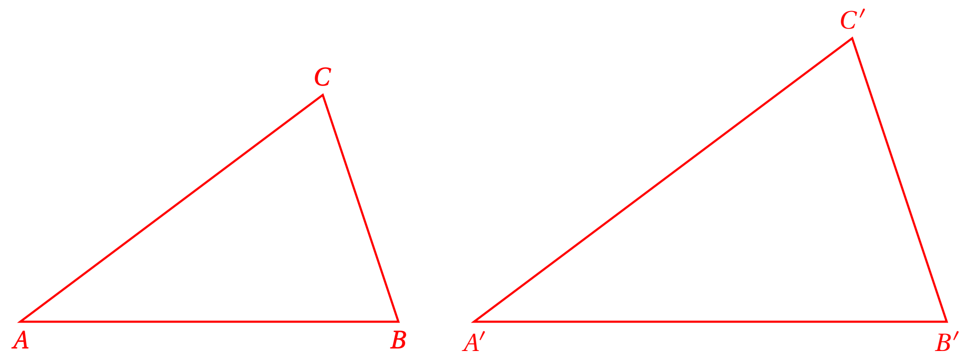
Definición 2

SEMEJANZA DE FIGURAS

Dos figuras geométricas son semejantes si tienen los mismos ángulos internos (uno a uno) y sus lados correspondientes tienen la misma proporción.

Cuando decimos que dos figuras son semejantes queremos decir que ambas tienen la misma forma, pero tal vez una es escala de la otra.

Los siguientes dos triángulos son semejantes:



y matemáticamente lo vamos a denotar por:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Otra forma de definir la semejanza entre dos triángulos es la siguiente:

Definición 3

Semejanza de triángulos
Si los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ satisfacen:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{B'C'}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{A'C'}|}$$

entonces, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

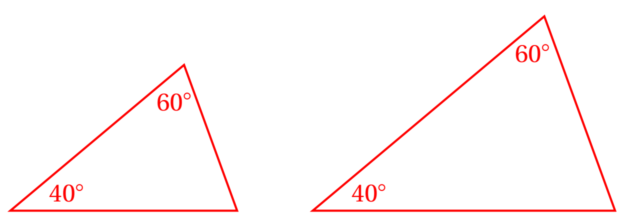
También podemos verificar que dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos internos son iguales uno a uno.

En la figura donde se muestran los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, los ángulos satisfacen: $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, y $\angle ACB = \angle A'C'B'$.

Ejemplo 1

Verifica si los triángulos siguientes son semejantes:

- Dado que los ángulos son congruentes uno a uno, se concluye que los triángulos son semejantes.

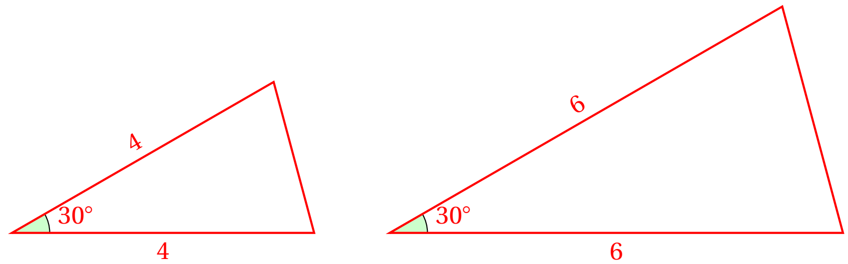


- Observa que el tercer ángulo (de cada triángulo) es el suplemento de $40°+60° = 100°$, pues la suma de los tres ángulos internos del triángulo es igual a $180°$.

Ejemplo 2

Verifica si los siguientes triángulos son semejantes:

- En este caso, es obvio que hay un ángulo congruente en ambos triángulos, pues en ambos triángulos hay un ángulo que mide $30°$.



- Por otra parte, ambos triángulos son isósceles, pues cada lado del ángulo que mide 30° tienen la misma longitud en los dos trángulos.

- Entonces esos lados son proporcionales:

$$\frac{4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

- Por lo que los triángulos son semejantes.

Ejemplo 3 Verifica si los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ con lados $|\overline{AB}| = 5$, $|\overline{BC}| = 3$, $|\overline{AC}| = 4$, $|\overline{A'B'}| = 15$, $|\overline{B'C'}| = 9$, $|\overline{A'C'}| = 12$, son semejantes.

- Ahora utilizaremos la definición que dimos de triángulos semejantes:

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|} & = & \dfrac{|\overline{BC}|}{|\overline{B'C'}|} & = & \dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{A'C'}|} & & \\ \dfrac{5}{15} & = & \dfrac{3}{9} & = & \dfrac{4}{12} & = & \dfrac{1}{3} \end{array}$$

- Como se cumple la igualdad, concluimos que: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

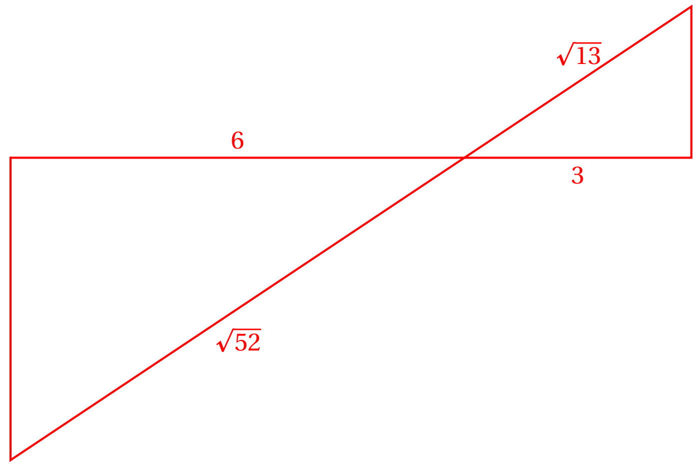
- Observa que pudimos utilizar:

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} & = & \dfrac{|\overline{B'C'}|}{|\overline{BC}|} & = & \dfrac{|\overline{A'C'}|}{|\overline{AC}|} & & \\ \dfrac{15}{5} & = & \dfrac{9}{3} & = & \dfrac{12}{4} & = & 3 \end{array}$$

  por la propiedad simétrica de la semejanza de triángulos y concluir el mismo resultado.

Ejemplo 4 Verifica si los siguientes triángulos son semejantes:

- Empezamos observando que hay un ángulo congruente en ambos triángulos, debido a que es opuesto por el vértice.



- Ahora vemos inmediatamente que el lado horizontal del triángulo de la izquierda mide el doble que el lado correspondiente del otro triángulo.
- Nos falta ver que el lado inclinado del primer triángulo (de la izquierda) mida exactamente el doble que el de la derecha.
- Observa que: $\sqrt{52} = \sqrt{(4)(13)} = 2\sqrt{13}$.
- Es decir, el lado inclinado del triángulo de la izquierda mide el doble del lado que le corresponde del triángulo de la derecha.
- Entonces, los triángulos son semejantes.

Como puedes ver los tres criterios de congruencia entre triángulos se pueden extender a criterios de semejanza de triángulos como se enlistan enseguida:

i. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, los dos triángulos son semejantes.

ii. Si un ángulo de un triángulo es congruente con el ángulo de otro triángulo, y además los lados del ángulo considerado en cada triángulo son proporcionales, entonces los dos triángulos son semejantes.

iii. Si las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a las longitudes de los lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

lo único que hemos hecho es cambiar la palabra «*congruente*» por «*proporcional*» cuando se refiere a la longitud de uno o varios lados de los triángulos.

Ahora podemos aplicar los tres criterios para determinar si dos triángulos son semejantes.

Expresa los tres criterios de semejanza de triángulos como teoremas. **Ejemplo 5**

- **Primer criterio:**

  Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con los de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes. **Teorema 2**

  Porque si se conocen α y β, el otro ángulo debe medir $180° - \alpha - \beta$.
  Entonces los tres ángulos de cada triángulo son congruentes y los triángulos son semejantes.

- **Segundo criterio:**

Teorema 3	Si uno de los ángulos de un triángulo es congruente con un ángulo de otro segundo triángulo, y los lados de cada uno de estos ángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Porque al ser proporcionales los lados del triángulo y el ángulo entre ellos congruente, se tiene que uno es escala del otro, y el tercer lado de los triángulos queda proporcional, quedando los otros ángulos faltantes congruentes entre los triángulos.

- **Tercer criterio:**

Teorema 4	Si las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a las longitudes de los lados de un segundo triángulo, los dos triángulos son proporcionales.

Porque uno es escala del otro.

5.3.3 Teorema de Pitágoras

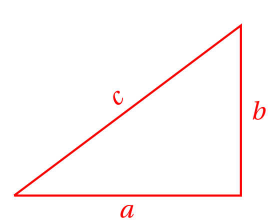
En geometría, uno de los teoremas más importantes es el teorema de Pitágoras porque se aplica muy frecuentemente para resolver problemas.

Teorema 1

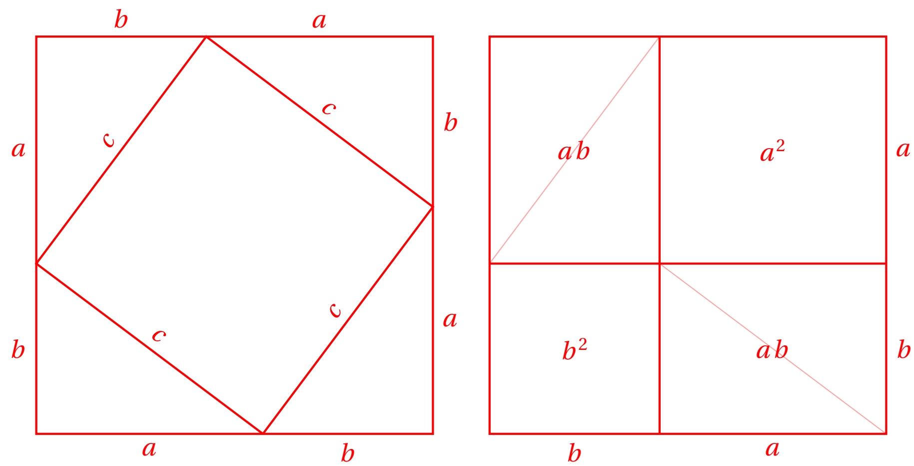
En todo triángulo rectángulo que se encuentra en un plano, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.
Algebraicamente, si a y b son las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo y c es la longitud de su hipotenusa, entonces se cumple:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Para demostrarlo consideramos el siguiente triángulo:



Empezamos creando las siguientes figuras utilizando el triángulo considerado:



En las dos figuras tenemos un cuadrado de lado $a+b$.
Observa que en la figura de la izquierda hay un cuadrado inclinado en medio.
Este es un cuadrado porque de los tres ángulos del triángulo rectángulo los dos agudos suman 90°.
Observa que los tres ángulos que están en cada esquina de la figura de enmedio suman 180°, y que siempre están los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo, que suman 90°.
Luego, el ángulo interno del cuadrilátero que está dentro de la figura de la izquerda mide 90°, porque la suma de los tres es 180°.
Entonces, el área de este cuadrado es c^2, porque su lado mide c unidades.
Por otra parte, cada triángulo que queda alrededor del cuadrado tiene un área de $ab/2$, y en total son cuatro. Entonces, el área de los cuatro triángulos es: $2ab$.
En la figura de la derecha, tenemos un cuadrado que tiene longitud de lado $a+b$.
El área de este cuadrado es: a^2+b^2+2ab.
Comparando las áreas de las dos figuras, obtenemos:

$$a^2+b^2+2ab = c^2+2ab$$

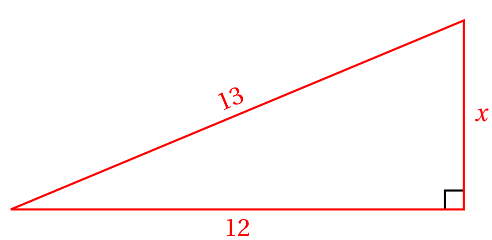
Al restar $2ab$ en ambos lados de la igualdad obtenemos: $a^2+b^2=c^2$, que es lo que establece el teorema.
■

El teorema de Pitágoras puede servir para calcular la longitud de uno de los catetos de un triángulo rectángulo, cuando se conocen la hipotenusa y el otro cateto.

Ejemplo 1

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm., y un cateto (horizontal) mide 12 cm. Calcula la longitud x del lado faltante de este triángulo.

- Aplicamos el teorema de pitágoras para calcular el valor de x.



- Nosotros conocemos: $a=12$, y $c=13$.

- Debemos determinar el valor de $b = x$:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \Rightarrow \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

- Ahora sustituimos los valores conocidos:

$$b = \sqrt{(13)^2 - (5)^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

- Entonces, la longitud del cateto es 12 unidades.

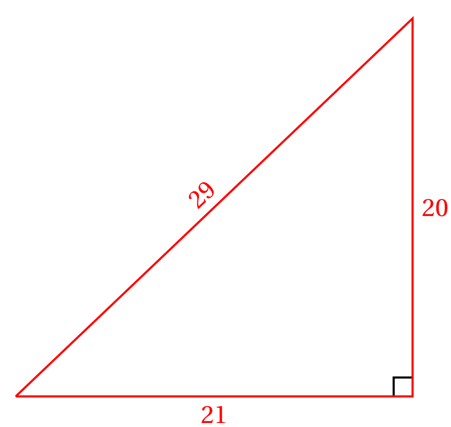
El teorema de Pitágoras está escrito de manera que parece que se desea calcular la longitud de la hipotenusa:

Ejemplo 2 Calcula la longitud de la hipotenusa del triángulo con longitudes de catetos 21 cm y 20 cm, respectivamente.

- Aplicamos directamente el teorema:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ &= (21)^2 + (20)^2 \\ &= 441 + 200 \\ &= 841 \end{aligned}$$

- Entonces, la hipotenusa de ese triángulo rectángulo mide: $c = \sqrt{841} = 29$ cm.
- El triángulo es semejante al siguiente:



Igualmente, el teorema de Pitágoras se puede utilizar par verificar que las longitudes de los lados de un triángulo correspondan a un triángulo rectángulo.

Ejemplo 3 El profesor indicó que un triángulo rectángulo tenía sus lados con medidas: 77 cm, 36 cm y 85 cm. Verifica que se trata de un triángulo rectángulo.

- Si el triángulo es rectángulo, debe satisfacer el teorema de Pitagoras.
- Observa que la hipotenusa siempre es el lado de mayor longitud.

- En este caso, la hipotenusa mide 85 cm.
- Verificamos si se trata de un triángulo rectángulo:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2 \\ (85)^2 &\stackrel{?}{=} (77)^2+(36)^2 \\ 7225 &= 5929+1296 \quad \checkmark \end{aligned}$$

- Como las longitudes de los lados del triángulo satisfacen el teorema de Pitágoras, se trata de un triángulo rectángulo.

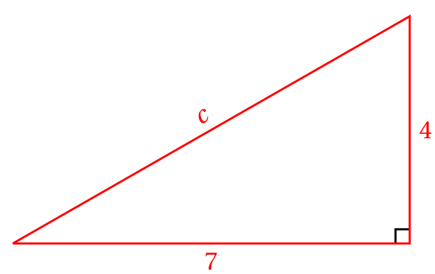
No siempre obtendremos longitudes de lados del triángulo rectángulo con números enteros.

Algunas veces obtendremos números raciones e inclusive números irracionales.

Ejemplo 4

Calcula la longitud de la hipotenusa c del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7 cm y 4 cm, respectivamente.

- En este caso, $a = 7$, y $b = 4$.



- Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la hipotenusa de este triángulo rectángulo:

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} \approx 8.062257748$$

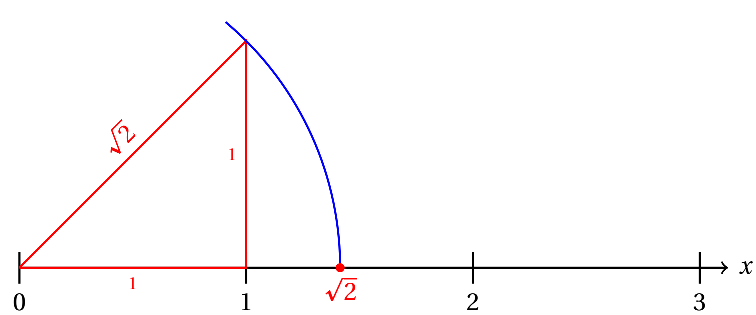
- Observa que la hipotenusa de este triángulo rectángulo mide un poco más de 8 unidades.

Igualmente, podemos utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar geométricamente la posición de puntos en la recta numérica, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5

Encuentra la posición de los puntos $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, y $\sqrt{5}$ en la recta numérica.

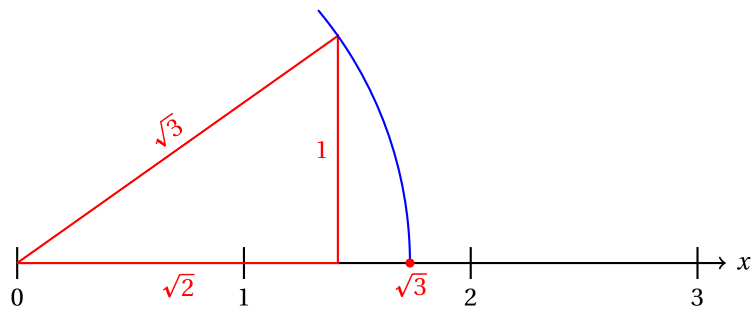
- Para calcular la posición de $x = \sqrt{2}$ vamos a construir un triángulo con catetos de longitud 1:



- Ahora que conocemos la ubicación del punto $x = \sqrt{2}$ vamos a utilizarla para calcular la posición del punto $\sqrt{3}$.
- Para este fin, vamos a dibujar un triángulo con catetos $\sqrt{2}$ y 1.
- La hipotenusa de este triángulo será de:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \text{ unidades.}$$

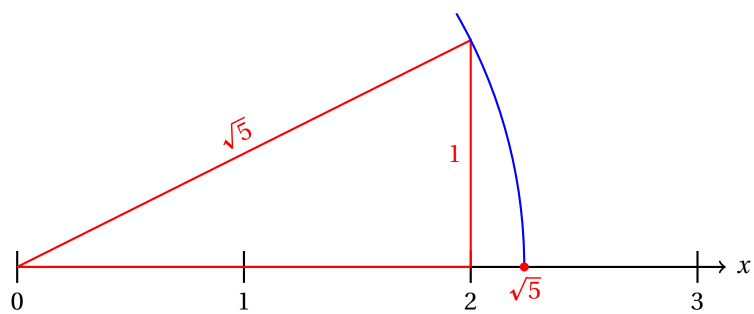
- La figura es la siguiente:



- Finalmente, para calcular la posición del número $\sqrt{5}$, trazamos un triángulo rectángulo con catetos de longitudes 2 y 1, porque así, la hipotenusa medirá:

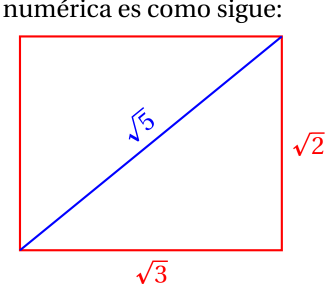
$$c = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \text{ unidades.}$$

- La figura muestra el trazo:



- Otra forma de encontrar el punto que corresponde a $\sqrt{5}$ en la recta numérica es como sigue:
- Construimos un rectángulo de base $\sqrt{3}$ y altura $\sqrt{2}$.
- Trazamos la diagonal de ese rectángulo.
- La diagonal mide $\sqrt{5}$, porque:

$$D = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3+2} = \sqrt{5}$$



Muchos problemas aplicados requieren del uso del teorema de Pitágoras.

Al igual que en el caso de problemas aplicados, otras ramas de la matemática utilizan muy frecuentemente el teorema de Pitágoras para resolver problemas.

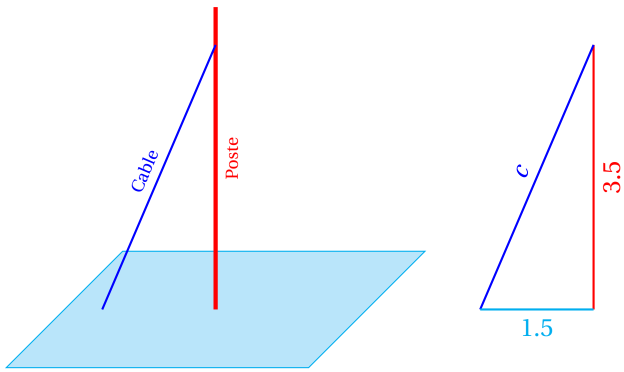
Por ejemplo, para calcular la distancia entre dos puntos en geometría analítica, vamos a utilizar una fórmula que consiste en la aplicación del teorema de Pitágoras.

En cálculo diferencial e integral, en trigonometría, etc., y en muchas diferentes situaciones vamos a necesitar aplicar este teorema para resolver problemas diversos.

Ejemplo 6

A un poste del cableado eléctrico se le colocará un cable tensor de acero para darle soporte. La altura a la cual se colocará este cable de acero es de 3.5 metros y se fijará a 1.25 metros de la base del poste. ¿Qué longitud tendrá el cable? (Omite el cable requerido para fijarlo)

- Nosotros tenemos la siguiente situación:



- Necesitamos calcular la hipotenusa del triangulo dibujado a la derecha.
- Para eso, aplicamos el teorema de pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(3.5)^2 + (1.5)^2} = \sqrt{12.25 + 2.25} = \sqrt{14.5} \approx 3.807886553 \text{ metros.}$$

- Al cortar el cable antes de colocarlo, deben considerar lo que se requiere para ajustarlo en el suelo y en la parte donde se sujetará del poste.

Ejercicios 5.3.3

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios. Las longitudes a y b corresponden a los catetos y c a la hipotenusa.

1) ¿Cuáles de las siguientes longitudes pueden corresponder a los lados de un triángulo rectángulo?

a) $a = 3, b = 4, c = 5$.
b) $a = 8, b = 6, c = 10$.
c) $a = 5, b = 12, c = 13$.
d) $a = 15, b = 8, c = 17$.
e) $a = 12, b = 16, c = 20$.
f) $a = 7, b = 24, c = 25$.
g) $a = 24, b = 10, c = 26$.
h) $a = 21, b = 20, c = 29$.
i) $a = 16, b = 30, c = 34$.
j) $a = 9, b = 40, c = 41$.
k) $a = 35, b = 12, c = 37$.
l) $a = 32, b = 24, c = 40$.
m) $a = 27, b = 36, c = 45$.
n) $a = 20, b = 48, c = 52$.
o) $a = 11, b = 60, c = 61$.
p) $a = 48, b = 14, c = 50$.
q) $a = 45, b = 28, c = 53$.
r) $a = 40, b = 42, c = 58$.

s) $a = 33, b = 56, c = 65$.
t) $a = 24, b = 70, c = 74$.
u) $a = 13, b = 84, c = 85$.
v) $a = 63, b = 16, c = 65$.
w) $a = 60, b = 32, c = 68$.
x) $a = 55, b = 48, c = 73$.
y) $a = 48, b = 64, c = 80$.

2) Cateto 1: 7, Hipotenusa: $\sqrt{53}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 2$

3) Cateto 1: 11, Hipotenusa: $\sqrt{265}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 12$

4) Cateto 1: 10, Cateto 2: 9. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{181}$

5) Cateto 1: 4, Cateto 2: 7. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{65}$

6) Cateto 1: 7, Hipotenusa: $\sqrt{170}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 11$

7) Cateto 1: 7, Cateto 2: 3. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{58}$

8) Cateto 1: 13, Cateto 2: 3. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{178}$

9) Cateto 1: 13, Cateto 2: 7. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{218}$

10) Cateto 1: 2, Cateto 2: 3. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{13}$

11) Hipotenusa: $\sqrt{5}$, Cateto 2: 1. Encontrar la longitud del cateto 1. $a = 2$

12) Cateto 1: 12, Cateto 2: 5. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = 13$

13) Cateto 1: 9, Hipotenusa: $\sqrt{106}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 5$

14) Cateto 1: 11, Hipotenusa: $\sqrt{122}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 1$

15) Cateto 1: 9, Hipotenusa: $\sqrt{225}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 12$

16) Hipotenusa: $\sqrt{29}$, Cateto 2: 2. Encontrar la longitud del cateto 1. $a = 5$

17) Cateto 1: 6, Hipotenusa: $\sqrt{72}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 6$

18) Cateto 1: 3, Hipotenusa: $\sqrt{109}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 10$

19) Hipotenusa: $\sqrt{8}$, Cateto 2: 2. Encontrar la longitud del cateto 1. $a = 2$

20) Cateto 1: 1, Cateto 2: 11. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{122}$

21) Cateto 1: 3, Hipotenusa: $\sqrt{10}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 1$

22) Utilizando regla y compás encuentra los siguientes puntos en la recta numérica, aplicando el teorema de Pitágoras:

a) $\sqrt{6}$
b) $\sqrt{7}$
c) $\sqrt{8}$
d) $\sqrt{10}$
e) $\sqrt{11}$
f) $\sqrt{12}$
g) $\sqrt{13}$
h) $\sqrt{14}$
i) $\sqrt{15}$
j) $\sqrt{17}$
k) $\sqrt{18}$
l) $\sqrt{19}$
m) $\sqrt{20}$
n) $\sqrt{21}$
o) $\sqrt{22}$
p) $\sqrt{23}$
q) $\sqrt{24}$
r) $\sqrt{26}$
s) $\sqrt{27}$
t) $\sqrt{28}$

23) ¿Qué distancias irracionales puedes obtener al dibujar triángulos rectángulos con lados de longitudes 9 cm y 7 cm? $\sqrt{130}$ y $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

24) ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado de lado 7 cm? $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

25) ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado de lado 10 cm? $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

26) ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado de lado x cm? $\sqrt{2\,x^2} = x\sqrt{2}$.

27) ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de base 7 cm y altura 6 cm? $\sqrt{85}$

28) ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de base 10 cm y con un área de 50 cm^2? $\sqrt{125}$

Capítulo 6

Polígonos y Circunferencia

Por aprender...

Por qué es importante...

Los polígonos forman...

6.1 Definición y Clasificación de Polígonos

Además del triángulo hay una gran cantidad de otras figuras geométricas delimitadas por segmentos de recta que son importantes en geometría.

6.1.1 Definición

Polígono

Figura geométrica cerrada delimitada por segmentos de recta. Cada uno de los segmentos de recta es uno de sus lados y los puntos donde se intesectan dos segmentos de recta se llaman vértices.

Definición 1

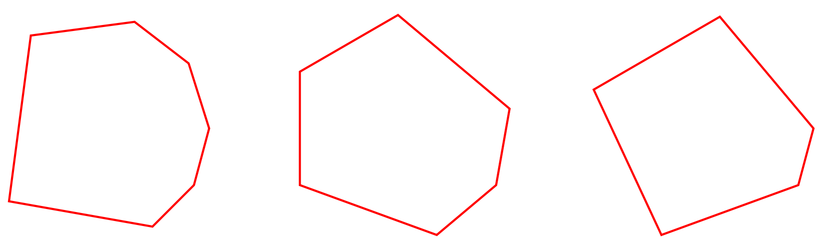
Los polígonos deben cumplir con:

✓ Dos lados consecutivos no están sobre la misma recta,

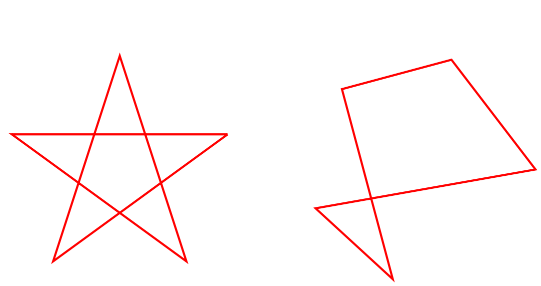
✓ Cada lado del polígono intersecta a exactamente otros dos lados del polígono, y

✓ Los lados del polígono se intersectan por sus extremos.

Por ejemplo, los siguientes son polígonos:



Pero los siguientes no lo son:



Cada polígono recibe su nombre de acuerdo al número de lados que tiene:

Triángulo: polígono de tres lados,

Cuadrilátero: polígono de cuatro lados,

Pentágono: polígono de cinco lados,

Hexágono: polígono de seis lados,

Heptágono: polígono de siete lados,

Octágono: polígono de ocho lados,

Eneágono: polígono de nueve lados,

Decágono: polígono de diez lados, etc.

6.1.2 Clasificación

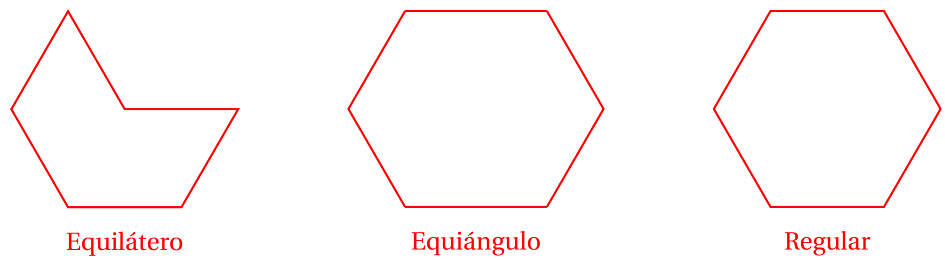
Para facilitar el estudio de las figuras geométricas es conveniente clasificarlas.

Los polígonos se clasifican como:

Equilátero: es aquel polígono que tiene todos sus lados iguales.

Equiángulo: es aquel polígono que tiene todos sus ángulos iguales.

Regular: aquel polígono que es equiláteo y equiángulo a la vez. Es decir, un polígono es regular si todos sus lados y todos sus ángulos tienen la misma medida.



También se definen:

Cóncavo: es aquel polígono que tiene al menos uno de sus ángulos internos es entrante. El polígono mostrado como un polígono equilátero, es cóncavo.

Convexo: es aquel polígono que ninguno de sus ángulos internos es entrante. El polígono mostrado como un polígono equiángulo, es convexo.

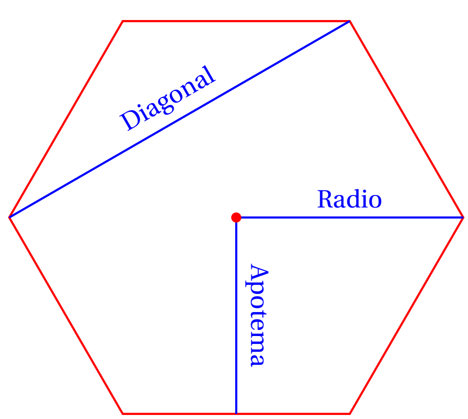
En particular, para el polígono regular de n lados, se definen los siguientes elementos:

Radio: Es el segmento de recta que va del centro del polígono regular a cualquiera de sus vértices.

Apotema: Es el segmento de recta que va del centro del polígono al punto medio de cualquiera de sus lados.

Diagonales: Es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.

En la siguiente figura se muestran cada uno de los siguientes elementos:

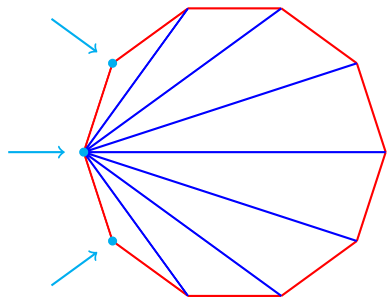


En realidad, la diagonal se define para cualquier polígono, no solamente los polígonos regulares.

Podemos calcular el número de diagonales que tiene un polígono convexo de la siguiente manera.

Calcula el número de diagonales que tiene un polígono regular de n lados. **Ejemplo 1**

- Empezamos notando que el polígono regular de n lados tiene n vértices.
- Fijándonos en uno de los n vértices, podemos formar $n-3$ diagonales, porque una diagonal no puede ir de un vértice a sí mismo, ni a los vértices más próximos a él:



- Observa que hay tres nodos que no sirven para trazar una diagonal.
- Los dos vecinos porque en lugar de formar una diagonal generan un lado del polígono.
- El tercer vértice es sobre el cual nos hemos fijado: una diagonal no puede iniciar y terminar en el mismo vértice.
- Pero nosotros podemos fijarnos en cualquiera de los n vértices del polígono.
- Entonces, considerando todos los vértices, podemos trazar $n(n-3)$ diagonales.
- Sin embargo, debemos tener en cuenta que cada diagonal la hemos contado dos veces: una cuando el vértice es inicial y la otra cuando es el punto final de la diagonal.
- Recuerda que cada diangonal toca dos vértices.
- Es decir, si dividimos entre dos, obtenemos el número de diagonales del polígono regular:

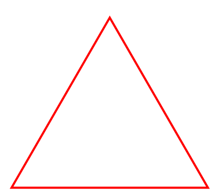
$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Podemos verificar el resultado calculando para polígonos de un número de lados pequeño.

Calcula el número de diagonales para los polígonos regulares de 3, 4, 5 y 6 lados. **Ejemplo 2**

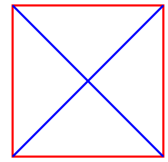
- Empezamos con el triángulo: no se le pueden trazar diagonales.

$$D_3 = \frac{3(3-3)}{2} = \frac{3(0)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$



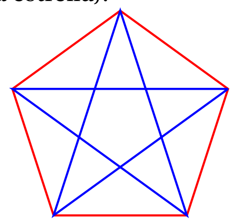
- Ahora el cuadrado: se le pueden trazar dos diagonales.

$$D_4 = \frac{4(4-3)}{2} = \frac{4(1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$



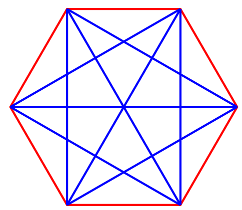
- Sigue el pentágono: se le pueden trazar 5 diagonales (recuerda la estrella).

$$D_5 = \frac{5(5-3)}{2} = \frac{5(2)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$



- Finalmente, el hexágono:

$$D_6 = \frac{6(6-3)}{2} = \frac{6(3)}{2} = \frac{18}{2} = 9$$



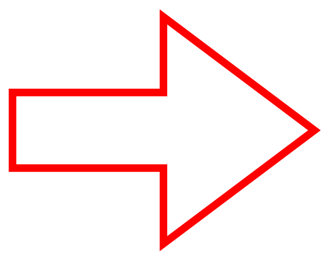
Observa que las diagonales siempre van de un vértice a otro vértice no consecutivo del inicial. Siempre debe haber al menos un vértice entre el inicio y fin de la diagonal.

Ejemplo 3 Indica la clasificación de cada polígono.

- Este símbolo se utiliza frecuentemente en señalización para indicar advertencia.

- Es un triángulo: *equilátero*, porque todos sus lados tienen la misma medida, y también es equiángulo, porque todos sus ángulos también tienen la misma medida.
- Es decir, el triángulo es regular, pues es equilátero y equiángulo a la vez.
- También se trata de un triángulo convexo, pues ninguno de sus ángulos internos es entrante.
- El siguiente símbolo se utliza en tránsito:

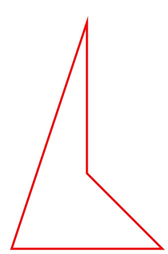
- Este polígono es un cuadrilátero.
- Al parecer, todos sus lados tienen la misma medida, por lo que se trata de un cuadrilátero regular.
- También tiene las medidas de todos sus ángulos internos iguales, así que es un cuadrilátero equiángulo.
- También es convexo, porque todos sus ángulos internos miden lo mismo que un ángulo recto.
- Siguiente:



- Ahora tenemos un polígono de siete lados: se trata de un heptágono.
- Este heptágono no es ni equilátero, ni equiángulo.
- Pero tiene algunos ángulos internos entrantes, por eso es cóncavo.

¿A qué clase de polígono pertenece el mostrado? **Ejemplo 4**

- Como el polígono tiene 4 lados se trata de un cuadrilátero.



- Dado que tiene un ángulo interno que es entrante se trata de un cuadrilátero cóncavo.
- También es fácil observar que las medidas de todos sus lados es diferente, así que no se trata de un cuadrilátero equilátero.

- Al igual que con sus ángulos. Así que tampoco es equiángulo.

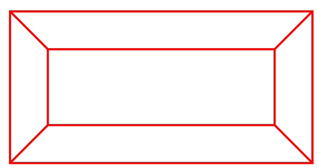
En matemáticas, cuando resolvemos problemas, siempre aplicamos las propiedades de los objetos cuando nos ayudan a la solución.

Es importante que aprendas a identificar cuándo una figura no es un polígono porque no podemos aplicar propiedades de polígonos a cualquier figura.

Si encuentras una figura que no sea polígono, posiblemente no tenga las mismas propiedades que éstos.

Ejemplo 5 ¿Es la siguiente figura un polígono? ¿Por qué?

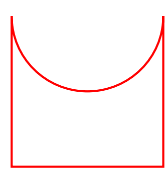
- Esta figura...



- No es un polígono, porque cada lado debe tocar exactamente dos lados en sus extremos.
- Observa que cada lado de la figura encuentra a otros dos lados en cada uno de sus extremos.
- Es decir, cada lado toca a otros cuatro lados, lo cual no ocurre para los polígonos.

Ejemplo 6 ¿Es la siguiente figura un polígono? ¿Por qué?

- Esta figura...



- No es un polígono.
- Un polígono es una figura cerrada formada de segmentos de recta solamente.
- Esta figura tiene un arco en la parte superior.
- Por tanto, no se trata de un polígono.

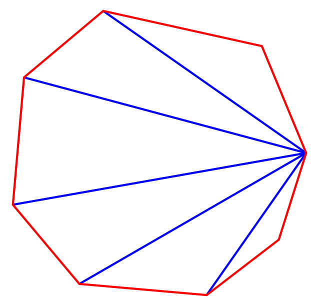
6.1.3 Suma de ángulos

En esta sección vamos a demostrar algunos teoremas que nos ayudarán a resolver problemas más adelante.

Teorema 1

La suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual a $180(n-2)°$.

En un polígono de n lados podemos dibujar $n-3$ diagonales que forman $n-2$ triángulos.



La suma de los ángulos internos de esos triángulos es igual a la suma de los ángulos internos del polígono de n lados.
Y como para cada triángulo, la suma de los ángulos internos es 180°, para los $n-2$ triángulos que se trazaron la suma es: $180(n-2)°$. ■

Ejemplo 1

Calcula la suma de los ángulos internos de los polígonos de 3, 4, 5, 6, 7 y 8 lados utilizando la fórmula:

$$S_{\text{int}} = 180(n-2)°$$

- Para $n = 3$, sabemos que la suma es 180°:

$$S_{\text{int}} = 180(n-2)° = 180(3-2)° = 180°$$

- Para $n = 4$ se trata de un cuadrilátero.
- Dentro del cuadrilátero podemos dibujar dos triángulos trazando una de sus diagonales.
- Entonces la suma debe ser: $2 \times 180° = 360°$.
- Ahora aplicamos la fórmula:

$$S_{\text{int}} = 180(n-2)° = 180(4-2)° = 180(2)° = 360°$$

- Para el caso $n = 5$ se trata de un pentágono:

$$S_{\text{int}} = 180(5-2)° = 180(3)° = 540°$$

- Para $n = 6$ se trata de un hexágono:

$$S_{\text{int}} = 180(6-2)° = 180(6-2)° = 180(4) = 720°$$

- Para $n = 7$ tenemos un heptágono:

$$S_{\text{int}} = 180(7-2)° = 180(5)° = 900°$$

- Y finalmente, para $n=8$ tenemos un octágono:

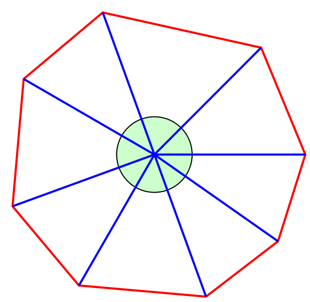
$$S_{\text{int}} = 180(8-2)^{\circ} = 180(6)^{\circ} = 1080^{\circ}$$

En matemáticas, frecuentemente podemos demostrar un mismo teorema de varias formas.

Por ejemplo, el Teorema de Pitágoras tiene más de cien formas diferentes de demostrarse.

Ejemplo 2 Demuestra de una segunda forma que la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual a $180(n-2)^{\circ}$.

- Empezamos trazando un polígono de n lados y elegimos un punto dentro del mismo.
- Desde este punto interno trazamos segmentos de recta hasta cada uno de los vértices, como se muestra en la siguiente figura:



- Así hemos formado n triángulos.
- La suma de los ángulos internos todos esos triángulos es $180\,n^{\circ}$.
- Pero los ángulos que están alrededor del punto interno al polígono que sirve de vértice común a todos los triángulos que dibujamos, no son parte de los ángulos internos del polígono.
- Estos ángulos adyacentes suman 360°.
- Así que la suma de los ángulos internos del polígono es:

$$S_{\text{int}} = 180\,n^{\circ} - 360^{\circ} = 180(n-2)^{\circ}$$

- Y con esto terminamos la demostración.

De este teorema se desprenden los siguientes corolarios.

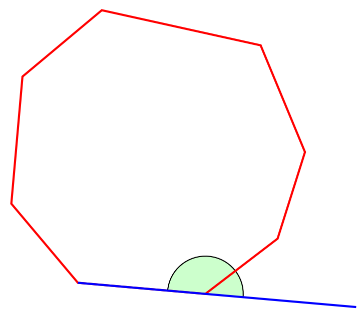
Corolario 1 Cada ángulo de un polígono equiángulo mide $(180(n-2)/n)^{\circ}$.

Corolario 2 La suma de los cuatro ángulos internos de cualquier cuadrilátero es 360°.

Corolario 3 Si al menos tres ángulos internos de un cuadrilátero son iguales, entonces todos sus ángulos internos miden lo mismo.

Teorema 2 La suma de todos los ángulos externos de un polígono de n lados es 360°.

Ya sabemos que la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual a $180(n-2)°$. Podemos prolongar cada lado en uno de sus sentidos para observar que un ángulo externo y su correspondiente interno adyacente suman $180°$.



Si sumamos todos los ángulos internos con los externos obtenemos:

$$S_{\text{ext}} + S_{\text{int}} = 180\,n°$$

Si a este valor le restamos la suma de los ángulos internos obtenemos la suma de los ángulos externos:

$$\begin{aligned} S_{\text{ext}} &= 180\,n° - S_{\text{int}} \\ &= 180\,n° - 180(n-2)° \\ &= \cancel{180\,n}° - \cancel{180\,n}° + 180(2)° \\ &= 360° \end{aligned}$$

Entonces, la suma de los ángulos externos de un polígono de n lados es $360°$. ■

De este teorema se desprenden los siguientes corolarios:

Cada ángulo externo de un polígono equiángulo de n lados mide $(360/n)°$. **Corolario 4**

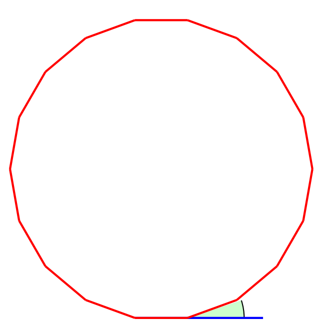
La suma de los ángulos externos de un polígono no depende del número de lados. **Corolario 5**

Calcula la medida de cada ángulo externo del polígono de 20 lados. **Ejemplo 3**

- En este caso tenemos $n = 20$.
- Sustituyendo en la fórmula obtenemos:

$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360°}{20} = 18°$$

- Enseguida se muestra el polínо regular de 20 lados y uno de sus ángulos externos:



- Por otra parte, el ángulo interno debe medir: $180° - 18° = 162°$, lo cual podemos verificar usando la fórmula:
$$\alpha_{\text{int}} = \frac{S_{\text{int}}}{n} = \frac{180(n-2)°}{n} = \frac{180(18)°}{20} = 162°$$

Ejemplo 4 Calcula la medida de cada ángulo externo de los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 7, y 8 lados.

- Aplicamos la fórmula en cada caso.
- Empezamos con $n = 3$, el triángulo:
$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360°}{3} = 120°$$
Este resultado es obvio, pues el ángulo interno del triángulo equilátero es de 60°, su suplemento debe medir 120°.
- Ahora calculamos el valor del ángulo externo del cuadrilátero regular:
$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360°}{4} = 90°$$
- Ahora consideramos al pentágono regular:
$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360°}{5} = 72°$$
- A continuación, el hexágono regular:
$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360°}{6} = 60°$$
- Ahora el heptágono regular:
$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360°}{7} \approx 51.42857143°$$
- Y finalmente, el octágono regular:
$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360°}{8} = 45°$$

Ejemplo 5 ¿Cuántos lados tiene el polígono que cumple que la diferencia de la suma de los ángulos internos menos la suma de los ángulos externos es 900°?

- Definimos por n al número de lados de ese polígono.
- Sabemos que:
$$S_{\text{int}} - S_{\text{ext}} = 900°$$
- Entonces, tenemos que resolver la ecuación:
$$\begin{aligned} 180(n-2) - 360 &= 900° \\ 180\,n° - 360 &= 900° + 360 \\ 180\,n° &= 1260° + 360 \\ n &= \frac{1620°}{180°} = 9 \end{aligned}$$

- Entonces, se trata de un eneágono, también conocido como nonágono.

¿Cuántos lados tiene el polígono cuyos ángulos internos suman 1 800°? **Ejemplo 6**

- Debemos resolver la ecuación:

$$S_{\text{int}} = 1\,800^\circ$$

- La solución es:

$$\begin{aligned} 180(n-2)^\circ &= 1\,800^\circ \\ 180\,n^\circ - 360^\circ &= 1\,800^\circ \\ 180\,n^\circ &= 2160^\circ \\ n &= \frac{2\,160^\circ}{180^\circ} = 12 \end{aligned}$$

- Entonces, se trata de un dodecágono.

¿Cuántos lados tiene el polígono que tiene la propiedad que todos los ángulos internos suman lo mismo que todos los ángulos externos? **Ejemplo 7**

- En este caso tenemos la ecuación: $S_{\text{int}} = S_{\text{ext}}$, la cual resolvemos enseguida:

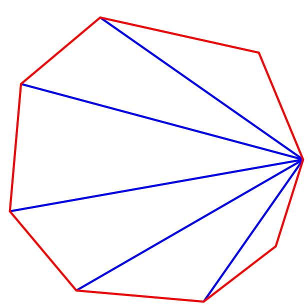
$$\begin{aligned} 180(n-2)^\circ &= 360^\circ \\ 180\,n^\circ - 360^\circ &= 360^\circ \\ 180\,n^\circ &= 720^\circ \\ n &= \frac{720^\circ}{180^\circ} = 4 \end{aligned}$$

- Se trata de un cuadrilátero.

6.1.4 Triangulación de polígonos

Para calcular el área de un polígono de n lados nos apoyaremos en la fórmula para calcular el área de un triángulo.

Empezamos dibujando $n-2$ diagonales que partan de un mismo vértice:



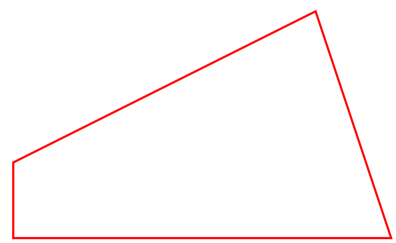
Ahora calculamos el área de cada uno de los triángulos que hemos formado dentro del polígono.

La suma de todas las áreas de los triángulos es igual al área del polígono.

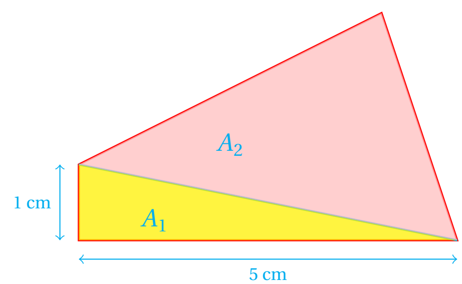
6.1.5 Perímetros y áreas

Ejemplo 1 Calcula el área del cuadrilátero mostrado:

- Cuadrilátero:



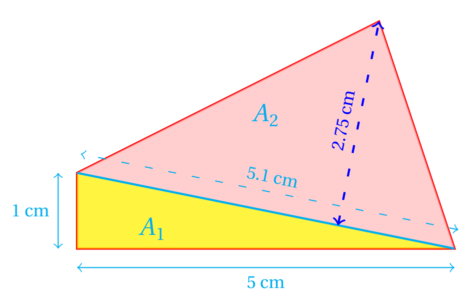
- Empezamos dibujando dos triángulos dentro del cuadrilátro trazando una de sus diagonales:



- Ahora tenemos que calcular el área de dos triángulos.
- Uno de los triángulos es rectángulo. Su base y altura se han indicado en la figura.
- Calcular su área es inmediato:

$$A_1 = \frac{(5)(1)}{2} = \frac{5}{2}\ \text{cm}^2$$

- Para calcular el área A_2 del otro triángulo necesitamos medir su altura, como se muestra en la siguiente figura:



- Ahora que sabemos que $h = 2.75$ cm y la base de ese triángulo mide $b = 5.1$ cm, podemos calcular el área A_2:

$$A_2 = \frac{(5.1)(2.75)}{2} = 7.0125\ \text{cm}^2$$

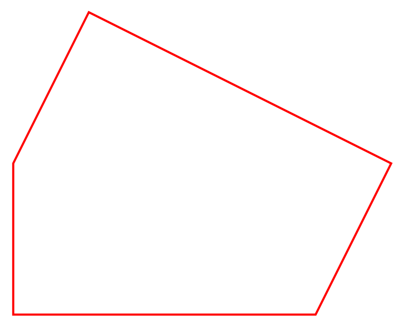
- Al sumar $A_1 + A_2$ obtenemos el área del cuadrilátero:

$$A = A_1 + A_2 = 2.5 \text{ cm}^2 + 7.0125 \text{ cm}^2 = 9.5125 \text{ cm}^2$$

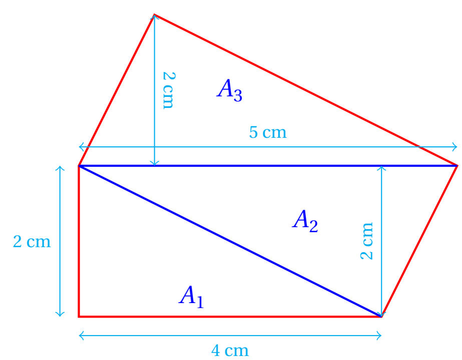
De esta manera podemos *triangular* cualquier polígono para calcular su área.

Calcula el área del siguiente polígono por medio de triangulación: **Ejemplo 2**

- Polígono a considerar:



- Empezamos dibujando las diagonales del pentágono:



- Ahora solo calculamos el área de cada uno de los triángulos que hemos formado y sumamos estos valores para obtener el área del pentágono:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(4)(2)}{2} = 4 \text{ cm}^2 \\ A_2 &= \frac{(5)(2)}{2} = 5 \text{ cm}^2 \\ A_3 &= \frac{(5)(2)}{2} = 5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- Y el área del polígono es:

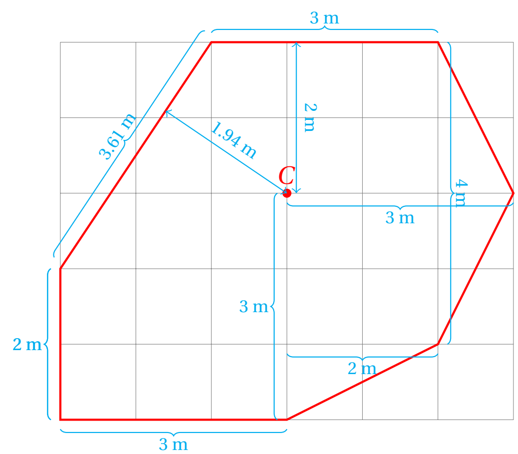
$$A = A_2 + A_2 + A_3 = 4 \text{ cm}^2 + 5 \text{ cm}^2 + 5 \text{ cm}^2 = 14 \text{ cm}^2$$

Algunas veces conviene considerar un punto dentro del polígono en lugar de un vértice para formar la triangulación.

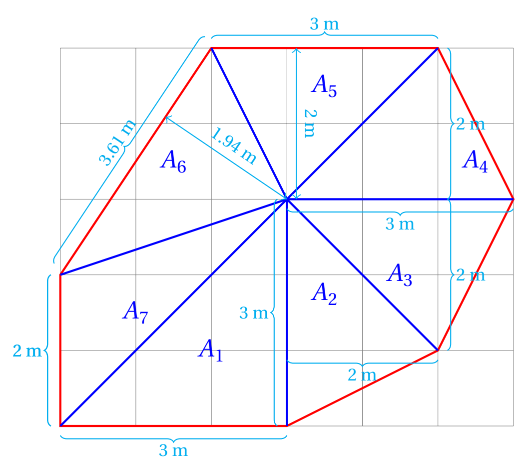
Calcula el área del terreno poligonal siguiente. El plano del terreno se ha cuadriculado para su medición.

Ejemplo 3

- Terreno:



- Empezamos trazando segmentos de recta desde cada vértice del polígono al punto de referencia C marcado en el terreno.
- Así que trazamos los segmentos de recta como se muestran en la siguiente figura:



- Ahora calculamos el área de cada triángulo:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(3)(3)}{2} = 4.5\text{ m}^2 \\ A_2 &= \frac{(3)(2)}{2} = 3\text{ m}^2 \\ A_3 &= \frac{(3)(2)}{2} = 3\text{ m}^2 \\ A_4 &= \frac{(3)(2)}{2} = 3\text{ m}^2 \end{aligned}$$

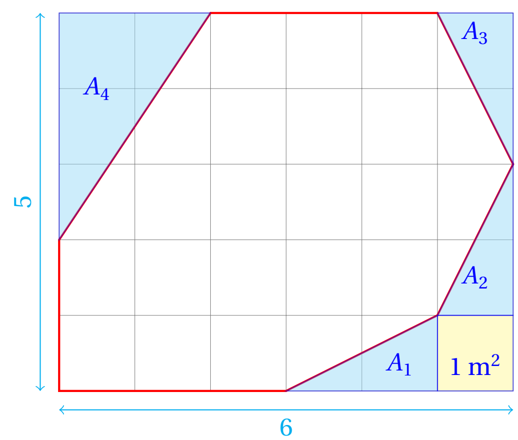
$$\begin{aligned} A_5 &= \frac{(3)(2)}{2} = 3\text{ m}^2 \\ A_6 &= \frac{(3.61)(1.94)}{2} = 3.5\text{ m}^2 \\ A_7 &= \frac{(2)(3)}{2} = 3\text{ m}^2 \\ \sum A_i &= 23\text{ m}^2 \end{aligned}$$

- Entonces, el área del heptágono es: 26 metros cuadrados.

El mismo problema puede atacarse de otra forma: primero calculamos el área de la cuadrícula que se dibujó sobre el plano del terreno y a esta área le restamos las áreas de los triángulos que quedan alrededor del terreno, sobre la cuadrícula.

Calcula el área y el perímetro del terreno del ejemplo anterior calculando el área de la cuadrícula primero y después restando el área de los triángulos que quedan alrededor. **Ejemplo 4**

- Empezamos trazando los triángulos que quedan fuera del terreno sobre la cuadrícula:



- La cuadrícula tiene 30 m^2 de área; $6 \times 5 = 30$.
- Observa que los triángulos A_1, A_2 y A_3 tienen una base de 2 metros y una altura de 1 m.
- Entonces cada uno de ellos tiene un área de 1 metro cuadrado.
- El triángulo A_4 tiene un área de:
$$A_4 = \frac{(3)(2)}{2} = 3 \text{ m}^2$$
- Además hay un cuadrado de área en la esquina inferior derecha de la cuadrícula que no pertenece al terreno.
- Entonces, el área del terreno es:

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{cuadricula}} - A_{\text{externa}} \\ &= \underbrace{30}_{\text{cuadrícula}} - [\underbrace{(3)(1)}_{A_1, A_2, A_3} - \underbrace{3}_{A_4} - \underbrace{1}_{1 \text{ m}^2}] \\ &= 23 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

- Como era de esperarse, debemos obtener el mismo resultado usando ambos procedimientos.
- Este nuevo procedimiento lo llamaremos «*triangulación externa*».
- Generalmente la *triangulación externa* es más exacta que la triangulación (interna) porque no requiere del cálculo de área a partir de aproximaciones.
- Recuerda que para calcular el área del triángulo necesitamos de las medidas de la base y la altura.

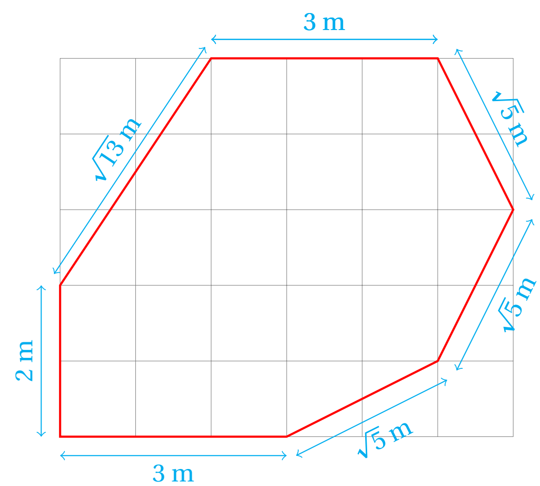
- Algunas veces vamos a hacer mediciones y obtendremos aproximaciones a los valores reales de estas medidas.
- Por eso, algunas veces es preferible usar el método de *triangulación externa*.
- Para calcular el perímetro vamos a aplicar el teorema de Pitágoras.
- Empezamos observando que algunos lados del terreno tienen lados enteros, mientras que otros son la diagonal de triángulos rectángulos.
- Para calcular la longitud de estos últimos vamos a aplicar el Teorema de Pitágoras.
- La hipotenusa del triángulo A_4 es:

$$h_4 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\text{ m}$$

- La hipotenusa de cada uno de los triángulos A_1, A_2 y A_3 es:

$$h = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\text{ m}$$

- Mostramos el terreno con las longitudes de todos sus lados:



- El perímetro no es sino la suma de las longitudes de todos los lados del terreno:

$$P = 3+3\sqrt{5}+3+\sqrt{13}+2 = 8+\sqrt{13}+3\sqrt{13} \approx 18.314\text{ metros}$$

6.2 Circunferencia

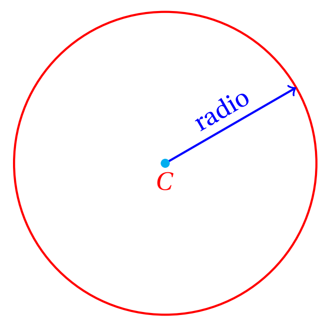
En esta sección vamos a estudiar los conceptos básicos relacionados con el objeto geométrico llamado circunferencia.

6.2.1 Definición y elementos

La circunferencia muy frecuentemente se confunde con el círculo, que aunque están siempre juntos, son diferentes una figura geométrica de la otra.

Circunferencia
Es la figura geométrica formada por todos los puntos del plano que se encuentran a una distancia constante de un punto fijo llamado centro. La distancia fija se conoce como el radio de la circunferencia.
Definición 1

En la figura de la derecha, el radio es la distancia del centro de la circunferencia a cualquiera de sus puntos. Por eso, también llamamos *radio* al segmento de recta que va del centro a cualquiera de los puntos de la circunferencia.



El centro de la circunferencia está en su centro y está denotado por la literal C.

Los elementos de la circunferencia son los siguientes:

Cuerda
Segmento de recta que tiene sus puntos extremo sobre la circunferencia.
Definición 2

Diámetro
Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Todo diámetro de una circunferencia es el eje de simetría de la misma. El diámetro es la mayor cuerda que se puede trazar a una circunferencia.
Definición 3

Arco
Parte de la circunferencia delimitada por dos puntos de la misma. Estos puntos se llaman extremos del arco.
Definición 4

Tangente
Recta que toca a la circunferencia en un punto solamente.
Definición 5

Punto de tangencia
El punto donde la recta tangente toca a la circunferencia a la cual es tangente.
Definición 6

Un elemento más que podemos definir, como una generalización del concepto de tangente es el de secante:

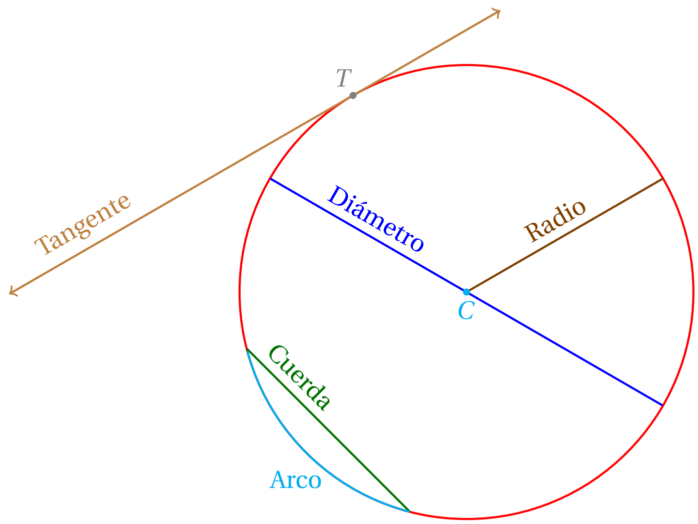
Secante
Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
Definición 7

Algunos elementos más que frecuentemente se requieren en las discusiones geométricas son:

Definición 8
SEMICIRCUNFERENCIA
Arco que abarca la mitad de la circunferencia.

Definición 9
SEMICÍRCULO
La mitad de un círculo.

Y estos elementos se muestran en la siguiente figura:



Por la forma de la circunferencia es claro que todas las circunferencias son semejantes entre sí, independientemente de la medida de su radio.

De este hecho se desprende que si dividimos el perímetro de la circunferencia entre su diámetro siempre obtenemos el mismo cociente.

Este resultado se establece como un teorema.

Teorema 1
La razón de la circunferencia al diámetro es constante para todas las circunferencias.

Este teorema da origen a la siguiente definición.

Definición 10
π
El número π es igual al cociente: Circunferencia entre diámetro de una misma circunferencia y este valor es aproximadamente igual a 3.141592654

Matemáticamente, tenemos:

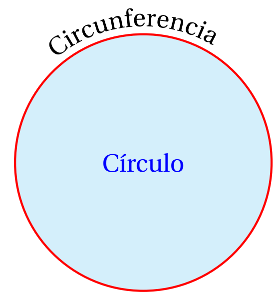
$$\pi = \frac{\text{Circunferencia}}{\text{Diámetro}} = \frac{C}{D} \approx 3.141592654$$

Este número irracional es muy importante en matemáticas y frecuentemente lo aproximamos usando el valor $\pi \approx 3.1416$ para facilitar los cálculos.

Otro concepto relacionado con el de circunferencia es el de *círculo*.

Definición 11
CÍRCULO
Región del plano delimitada por una circunferencia.

Es decir, la curva que delimita al círculo es una circunferencia. En otras palabras, el círculo es el área que queda encerrada por la circunferencia.



Nosotros podemos calcular el área de un círculo, pero no así para la circunferencia. Igualmente, podemos calcular el perímetro de una circunferencia, pero no así del círculo.

La fórmula para calcular el área del círculo se da en el siguiente teorema.

Teorema 2

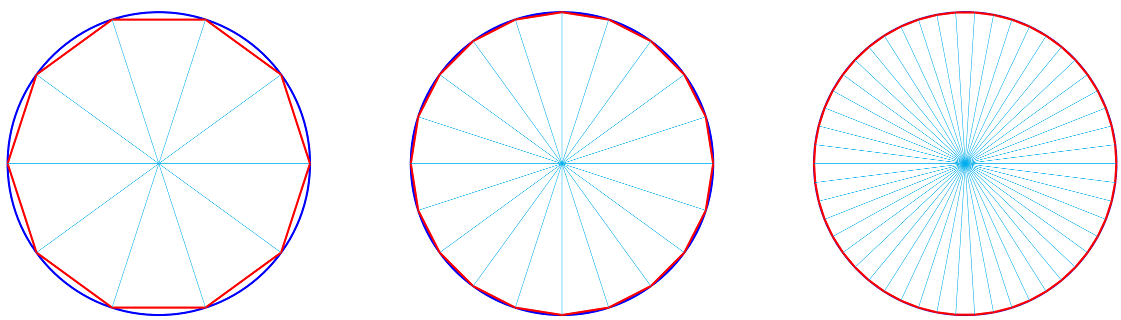
El área A_c del círculo de radio r es igual a:

$$A_c = \pi\, r^2$$

La demostración de este teorema no es difícil de dar, aunque requiere de la idea de límite, que estudiaremos hasta el curso de cálculo diferencial.

De cualquier manera, enseguida se da una idea general de la demostración.

Consideramos un polígono regular de n lados con vértices sobre la circunferencia de radio r como se muestra en la siguiente figura:



Conforme hacemos crecer el número de lados n del polígono regular, el área del polígono se parece cada vez más al área del círculo.
Nosotros podemos dividir el polígono regular de n lados en n triángulos con vértice en el centro de la circunferencia y base en cada lado del polígono.
Cuando n crece mucho la altura de cada triángulo se acerca mucho al radio de la circunferencia y la suma de todas las bases de los triángulos, que es igual al perímetro del polígono, se acerca cada vez más a la longitud de la circunferencia.
El área del polígono A_p es igual a la suma de las áreas de todos los triángulos que hemos formado:

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{b_1\, h}{2} + \frac{b_2\, h}{2} + \cdots + \frac{b_n\, h}{2} \\ &= \left(\frac{h}{2}\right) \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \end{aligned}$$

Pero cuando n crece mucho, la suma de las bases de los triángulos se acerca cada vez más a la longitud de la circunferencia C.
Y ya sabemos que $C = \pi \cdot D$, donde D es la longitud del diámetro y $\pi \approx 3.1416$.
Al sustituir:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = C$$

en la fórmula para calcular el área del polígono regular de n lados, obtenemos:

$$\begin{aligned} A_p &= \left(\frac{h}{2}\right)\cdot C \\ &= \frac{h}{2}\cdot 2\pi r \\ &= \pi h r \end{aligned}$$

Pero ya habíamos dicho que cuando n crece mucho, la altura h de cada triángulo mide lo mismo que el radio de la circunferencia y el área del polígono es igual al área del círculo, luego:

$$A_c = \pi r^2$$

■

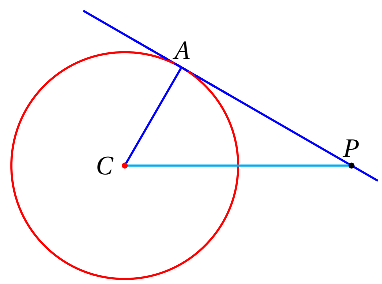
6.2.2 Rectas tangentes a una circunferencia

Cuando una recta toca a una circunferencia en un punto, la recta se llama tangente.

Las rectas tangentes a la circunferencia tienen especial interés en la geometría.

Teorema 1 El radio de una circunferencia trazado al punto de tangencia es perpendicular a la tangente.

Por la desigualdad del triángulo, $\overline{AC} + \overline{AP} > \overline{CP}$, para cualquier punto P que esté sobre la tangente, distinto de A, siendo A el punto de tangencia.
En otras palabras, para cualquier punto P diferente de A, la distancia desde P hasta el centro de la circunferencia es mayor que el radio.
Es decir, el radio es la menor distancia desde el centro de la circunferencia a la recta tangente, y por eso el radio es perpendicular a la recta tangente. ■

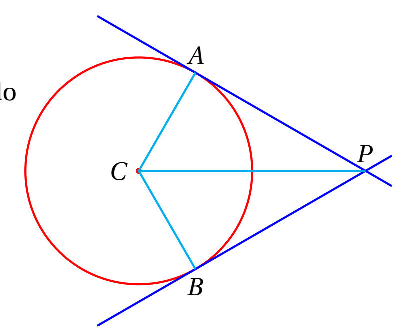


Otra forma de dar este mismo resultado es:

Corolario 1 La perpendicular a una recta tangente a una circunferencia en el punto de tangencia pasa por el centro de la circunferencia.

Teorema 2 Dos tangentes a una circunferencia que pasan por un mismo punto P externo a la circunferencia y con puntos de tangencia en A y B, respectivamente, cumplen: $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$.

Trazamos dos radios a los puntos de tangencia y el segmento de recta que va del centro de la circunferencia al punto P.
Así hemos formado dos triángulos rectángulo: $\triangle CAP$ y $\triangle CBP$ siendo $\angle CAP$ y $\angle CBP$ ángulos recto.
En estos triángulos los lados $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ tienen la misma medida al ser ambos radios de la misma circunferencia.
Por otra parte, el segmento $\overline{CP}$ es la hipotenusa de ambos triángulos.
Luego, los triángulos rectángulo trazados son iguales y los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ miden lo mismo. ■



El resultado de este teorema se hace evidente al observar la simetría de la figura, gracias a la forma que tiene la circunferencia.

Con este teorema podemos demostrar otros que nos ayudarán a resolver otros problemas más adelante.

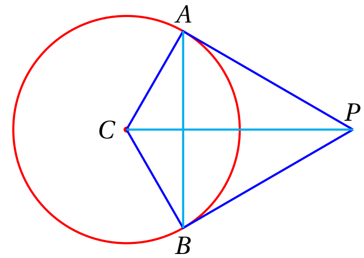
Si desde un punto P externo a la circunferencia se dibujan tangentes a la misma, y se dibujan radios a los puntos de tangencia, el segmento que une el centro de la circunferencia y el punto P bisectan:

i. El ángulo formado por las tangentes.

ii. El ángulo formado por los radios.

iii. La cuerda con extremos en los puntos de tangencia.

Teorema 3

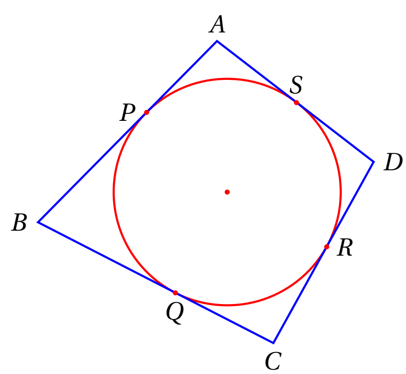


Observa que los triángulos $\triangle CAP$ y $\triangle CBP$ son iguales porque tienen sus tres lados iguales.
El lado $\overline{CP}$ es común a ambos triángulos, los lados $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son radios de la circunferencia y el otro lado de cada triángulo se trata de cada tangente, por eso son iguales.
Esto indica que los triángulos $\triangle CAP$ y $\triangle CBP$ son congruentes.
Por eso, los ángulos $\angle APC$ y $\angle BPC$ son iguales.
También, $\angle ACP = \angle BCP$.
Observa que el segmento $\overline{CP}$ es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, porque el punto P equidista de los puntos A y B, y también C equidista de A y B, que es el método que utilizamos para trazar la mediatriz de un segmento.

Demuestra que si los cuatro lados de un cuadrilátero son tangentes a una circunferencia, la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual a la de los otros dos.

Ejemplo 1

- Empezamos trazando la figura correspondiente:



- Considerando la igualdad: $|\overline{AB}| + |\overline{CD}| = |\overline{BC}| + |\overline{AD}|$.
- Pero $|\overline{AB}| = |\overline{AP}| + |\overline{PB}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{BQ}| + |\overline{QC}|$, $|\overline{CD}| = |\overline{CR}| + |\overline{RD}|$, y $|\overline{AD}| = |\overline{AS}| + |\overline{SD}|$.
- Luego:

$$\begin{array}{rcl} |\overline{AB}| + |\overline{CD}| & = & |\overline{BC}| + |\overline{AD}| \\ \left(|\overline{AP}| + |\overline{PB}|\right) + \left(|\overline{CR}| + |\overline{RD}|\right) & = & \left(|\overline{BQ}| + |\overline{QC}|\right) + \left(|\overline{AS}| + |\overline{SD}|\right) \end{array}$$

- Por otra parte, dado que los lados son tangentes a la circunferencia, la distancia desde cualquier vértice del cuadrilátero hasta dos puntos de tangencia consecutivos es constante.
- Entonces, también se cumple: $|\overline{AP}| = |\overline{AS}|$, $|\overline{BP}| = |\overline{BQ}|$, $|\overline{CQ}| = |\overline{CR}|$, y $|\overline{DR}| = |\overline{DS}|$.

- De las cuatro igualdades anteriores, cada uno de los miembros está, bien a la izquierda, bien a la derecha de la ecuación:

$$\left(|\overline{AP}|+|\overline{PB}|\right)+\left(|\overline{CR}|+|\overline{RD}|\right)=\left(|\overline{BQ}|+|\overline{QC}|\right)+\left(|\overline{AS}|+|\overline{SD}|\right)$$

Y por eso se cumple la igualdad.

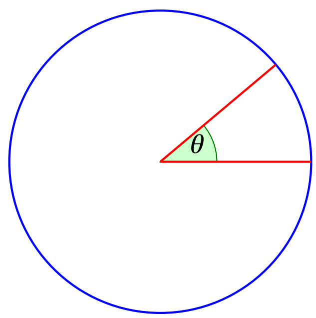
6.2.3 Ángulos en la circunferencia

En la circunferencia frecuentemente encontramos ciertos ángulos que nos ayudan a encontrar algunas de sus propiedades y a resolver problemas.

Definición 1

Ángulo central
En una circunferencia, el ángulo inscrito es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y cuyos lados son dos radios.

La siguiente figura se muestra un ángulo central θ:



Se dice que un ángulo central es subtendido por el arco cuyos extremos son los puntos donde tocan sus lados a la circunferencia.

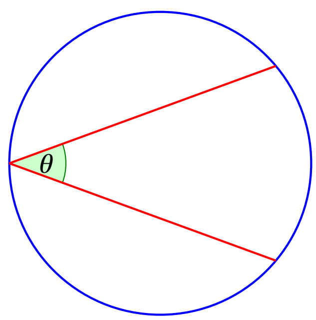
Teorema 1

La medida de un ángulo central es igual a la medida del arco que lo subtiende.

Definición 2

Ángulo inscrito
En una circunferencia un ángulo inscrito tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son cuerdas.

En la figura se muestra un ángulo inscrito:



Teorema 2

Todo ángulo inscrito mide la mitad del arco que subtiende.

Capítulo 7

Funciones Trigonométricas

Por aprender...

Por qué es importante...

Podemos resolver muchas situaciones prácticas utilizando las funciones trigonométricas...

7.1 Funciones trigonométricas para ángulos agudos

La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia la resolución de triángulos.

TRIGONOMETRÍA
Es la rama de las matemáticas que estudia las proporciones de los lados y los ángulos de los triángulos en el plano, sus aplicaciones y relaciones entre las funciones trigonométricas.

Definición 3

En la geometría, para calcular los lados de un triángulo, casi nunca considera las magnitudes de los ángulos.

Por el contrario, en trigonometría, la resolución de triángulos, siempre vamos a utilizar los ángulos internos del triángulo para calcular las longitudes de los lados desconocidos.

Con este fin, en la trigonometría se definen las funciones trigonométricas.

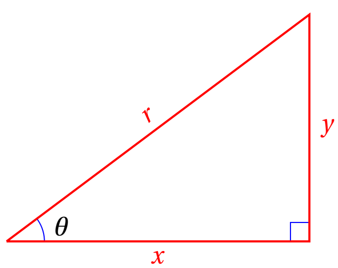
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS
Las funciones trigonométricas son razones que caracterizan a un ángulo, de acuerdo a la proporción de dos lados de un triángulo que tiene por ángulo interno al ángulo en consideración.
Las funciones trigonométricas son las siguientes:

- ✓ *Seno* ($\sin\theta$)
- ✓ *Coseno* ($\cos\theta$)
- ✓ *Tangente* ($\tan\theta$)
- ✓ *Cosecante* ($\csc\theta$)
- ✓ *Secante* ($\sec\theta$)
- ✓ *Cotangente* ($\cot\theta$)

Definición 4

Las funciones trigonométricas caracterizan a un ángulo θ. En un triángulo rectángulo, las proporciones de sus lados nos dan una idea de los ángulos que lo forman. Esta idea es la que nos ayuda a definir las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

En un triángulo rectángulo, las seis funciones trigonométricas se definen como sigue:

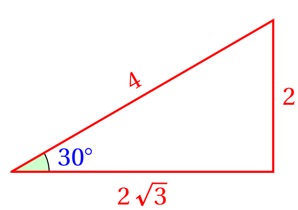


- ✓ $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$
- ✓ $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$
- ✓ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
- ✓ $\csc\theta = \dfrac{r}{y}$
- ✓ $\sec\theta = \dfrac{r}{x}$
- ✓ $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

Calcula los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo $\theta = 30°$ mostrado en el siguiente triángulo rectángulo:

Ejemplo 1

- Figura:



- Calculamos los valores de cada una de las funciones trigonométricas a partir de la definición dada en el triángulo rectángulo:

$$\begin{aligned}
\sin 30^\circ &= \frac{y}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} & \csc 30^\circ &= \frac{r}{y} = \frac{4}{2} = 2\\
\cos 30^\circ &= \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sec 30^\circ &= \frac{r}{x} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\\
\tan 30^\circ &= \frac{y}{x} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} & \cot 30^\circ &= \frac{x}{y} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

7.1.1 Conversión de grados a radianes

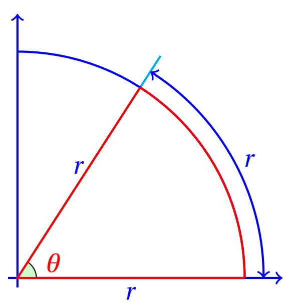
Para medir la magnitud de un ángulo, además de los grados sexagesimales tenemos otra unidad de medida conocida como el radián.

Definición 1

Radián

Unidad de medida de ángulo que es igual al ángulo que subtendido por un arco de longitud igual al radio. El radián se abrevia como rad.

En la siguiente figura se muestra el ángulo θ que mide un radián:



Como el radio cabe $2\pi \approx 6.2831853$ veces en el perímetro de la circunferencia, tenemos que $2\pi\,\text{rad} = 360^\circ$.

Entonces, para hacer la conversión de grados a radianes o de radianes a grados aplicaremos una regla de tres directa.

Ejemplo 1 Convierte 180° y 90° a radianes.

- Aplicamos directamente la regla de tres:

	Grados		Radianes
	Grados	$\Rightarrow$	Radianes
Datos conocidos:	360°	$\Rightarrow$	$2\pi\,\text{rad}$
Para calcular:	180°	$\Rightarrow$	x

- De donde:

$$x = \frac{180^\circ(2\pi\,\text{rad})}{360^\circ} = \pi\,\text{rad}$$

- Para el caso del ángulo recto:

$$\begin{array}{rrcl} \text{Datos conocidos:} & 180^\circ & \Rightarrow & \pi\,\text{rad} \\ \text{Para calcular:} & 90^\circ & \Rightarrow & y \end{array}$$

- Entonces,

$$y = \frac{90^\circ(\pi\,\text{rad})}{180} = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$$

Convierte 1 radián a grados sexagesimales. **Ejemplo 2**

- Aplicamos de nuevo la regla de tres:

$$\begin{array}{rrcl} & \text{Grados} & \Rightarrow & \text{Radianes} \\ \text{Datos conocidos:} & 180^\circ & \Rightarrow & \pi\,\text{rad} \\ \text{Para calcular:} & x^\circ & \Rightarrow & 1\,\text{rad} \end{array}$$

- Al calcular el valor de x obtenemos:

$$1\text{rad} = x = \frac{180}{\pi}^\circ \approx 57.29577951^\circ = 57^\circ 17' 44.81''$$

- Si el valor de π fuera 3, la división daría 60°.
- Al ser el valor de $\pi > 3$, el resultado de la división es ligeramente menor a 60°.

¿Cuánto mide el ángulo interno del triángulo equilátero en radianes? **Ejemplo 3**

- Ya sabemos que el ángulo interno del triángulo equilátero mide 60°.
- Vamos a convertirlo a radianes:

$$\begin{array}{rrcl} & \text{Grados} & \Rightarrow & \text{Radianes} \\ \text{Datos conocidos:} & 180^\circ & \Rightarrow & \pi\,\text{rad} \\ \text{Para calcular:} & 60^\circ & \Rightarrow & x \end{array}$$

- De donde obtenemos:

$$x = \frac{(60^\circ)(\pi\,\text{rad})}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$$

El procedimiento para convertir las unidades de un ángulo de grados a radianes y de radianes a grados es muy importante, porque frecuentmente vamos a requerir conversiones, no solamente en matemáticas, sino también en otras ramas de la ciencia como la física o la química.

Una ciclista viaja a 6 m/s en una carrera. Si la llanta de su bicicleta tiene un diámetro de 50 cm ¿qué ángulo barre uno de los puntos sobre la llanta (respecto de su centro) en cada segundo? **Ejemplo 4**

- Sabemos que en un segundo la llanta recorre 6 metros.

- Y que el diámetro de ésta es de 50 cm.
- Vamos a calcular cuántas vueltas da la llanta por segundo:

$$\omega = \frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Perímetro}} = \frac{600 \text{ cm}}{50 \text{ cm}} = 12\,\text{rev/s}$$

- En una revolución completa recorre 360°, o bien 2π radianes.
- Pero como da 12 revoluciones en un segundo, el ángulo que barre un punto de la llanta respecto de su centro es:

$$\begin{aligned}
\omega &= 12\,\text{rev/s}(360°/\text{rev}) = 4320°/\text{s}\\
\omega &= 12\,\text{rev/s}(2\pi\,\text{rad/rev}) = 24\pi\,\text{rad/s}
\end{aligned}$$

- Las dos últimas magnitudes dadas son equivalentes.
- Cada una representa la misma velocidad angular.

7.1.2 Funciones recíprocas

Ya se definieron las funciones trigonométricas.

De las seis funciones definidas ateriormente, las funciones trigonométrica recíprocas son las siguientes:

✓ $\csc\theta$ ✓ $\sec\theta$ ✓ $\cot\theta$

El adjetivo «*recíprocas*» viene del hecho que podemos establecer las siguientes identidades:

✓ $\sin\theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$ ✓ $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ ✓ $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

La demostración de esto es inmediata:

1) $\sin\theta = \dfrac{1}{\csc\theta} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{r}{y}\right)} = \dfrac{y}{r}$

2) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{r}{x}\right)} = \dfrac{x}{r}$

3) $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{y}\right)} = \dfrac{y}{x}$

■

Evidentemente, también se cumplen:

✓ $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ ✓ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ ✓ $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

y su demostración es muy parecida a la que se acaba de dar.

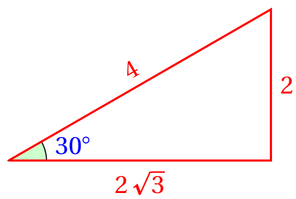
7.1.3 Cálculos de valores para ángulos notables

Los ángulos notables son aquellos que aparecen frecuentemente en la resolución de problemas.

Estos ángulos son los que miden: $30°, 45°$ y $60°$.

Para calcular los valores de las funciones trigonométricas vamos a dibujar triángulos rectángulos que tengan a estos ángulos en uno de sus ángulos internos.

Para esto, utilizamos la figura utilizada en secciones anteriores:

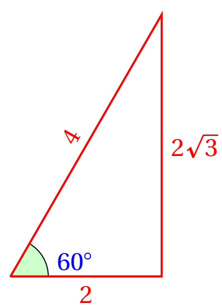


Dado que el triángulo es rectángulo, y uno de los ángulos agudos mide $30°$, el otro debe medir $60°$.

Con eso, podemos calcular los valores de las funciones trigonométricas de estos ángulos.

Ya calculamos los valores para $30°$ en la página 328.

Ahora calculamos los valores para $60°$ modificando la figura como se muestra enseguida:



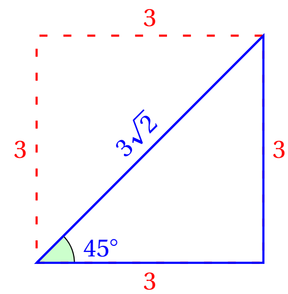
Observa que la altura del cuadrado mide $2\sqrt{3}$, porque al aplicar el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{(4)^2 - (2)^2} = \sqrt{12} = \sqrt{(3)(4)} = \sqrt{(3)(2)^2} = 2\sqrt{3}$$

Los valores de las funciones trigonométricas para $\theta = 60°$ son:

$$\begin{aligned}
\sin 60° &= \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \csc 60° &= \frac{r}{y} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\\
\cos 60° &= \frac{x}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} & \sec 60° &= \frac{r}{x} = \frac{4}{2} = 2\\
\tan 60° &= \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} & \cot 60° &= \frac{x}{y} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Para calcular los valores correspondientes al ángulo de $45°$, vamos a trazar un cuadrilátero regular (un cuadrado) y vamos a considerar una de sus diagonales:



Para calcular la longitud de la diagonal del cuadrado utilizamos el teorema de Pitágoras:

$$D = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{2(3)^2} = 3\sqrt{2}$$

Consideramos solamente el triángulo que se forma con dos de los lados del cuadrado y su diagonal que corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo:

$$\begin{aligned}
\sin 45° &= \frac{y}{r} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \csc 45° &= \frac{r}{y} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}\\
\cos 45° &= \frac{x}{r} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sec 45° &= \frac{r}{x} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}\\
\tan 45° &= \frac{y}{x} = \frac{3}{3} = 1 & \cot 45° &= \frac{x}{y} = \frac{3}{3} = 1
\end{aligned}$$

Con los valores obtenidos podemos crear la siguiente tabla de resumen de los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables:

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

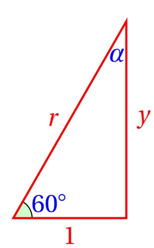
Estos valores nos serán de gran utilidad para resolver problemas en lo sucesivo.

7.1.4 Resolución de triángulos rectángulos

Ahora vamos a aplicar las funciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos.

Ejemplo 1 Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:

- Figura:



- Empezamos notando que podemos utilizar la información de la tabla de resumen de valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables (página 332).
- Para calcular el valor de r podemos aplicar la función coseno, pues esta función incluye a r, x (que es el valor que conocemos) y al ángulo $\theta = 60°$:

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \qquad \Rightarrow \qquad r = x\,\sec\theta = (1)(2) = 2$$

- Para calcular el otro cateto desconocido del triángulo, tenemos varios métodos:
- **Primer Método:** (Teorema de Pitágoras)

$$y^2 = r^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad y = \sqrt{3}$$

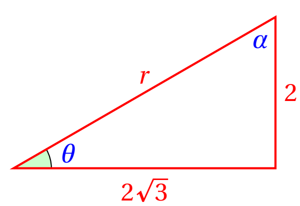
- **Segundo Método:** (Aplicar $\sin\theta$)

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \Rightarrow \qquad y = r\,\sin\theta = 2\,\sin(60°) = (2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\text{ cm}$$

- El ángulo α, es el complemento del ángulo $\theta = 60°$, porque los dos ángulos agudos de cualquier triángulo rectángulo suman 90°.
- Entonces, $\alpha = 90° - \theta = 90° - 60° = 30°$.
- Y terminamos.

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo: **Ejemplo 2**

- Figura:



- Empezamos observando que desconocemos la medida de la hipotenusa.
- Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$r = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (2)^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

- Ahora vamos a calcular cada uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo.
- Utilizamos la definición de tangente:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- Del resumen de los valores de las funciones trigonométricas (página 332) vemos que $\theta = 30°$.

- Entonces, dado que: $\alpha+\theta=90°$, se sigue que:

$$\alpha = 90° - 30° = 60°$$

- Y terminamos.

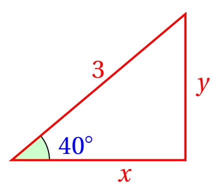
Cuando los valores de las funciones trigonométricas no estén en la tabla de resumen, tendremos que utilizar una calculadora científica.

Recuerda antes de hacer los cálculos que debes indicar en la calculadora que las medidas de los ángulos que utilizaremos están en grados sexagesimales.

Tu profesor de matemáticas te puede ayudar a configurar la calculadora para que los cálculos se realicen en grados sexagesimales y no en radianes.

Ejemplo 3 Calcula la longitud de cada uno de los catetos del triángulo rectángulo siguiente:

- Figura:



- De la figura, sabemos que $r=3$ cm, y $\theta=40°$.
- A partir de las definiciones de las funciones trigonométricas $\sin\theta$ y $\cos\theta$ podemos calcular los valores de y y x respectivamente.
- Para eso, vamos a sustituir los valores conocidos y despejar la incógnita en cada caso.
- Empezamos calculando el valor de x:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \Rightarrow \qquad x = r\,\cos\theta = 3\,\cos(40°) \approx 2.2981$$

- Ahora calculamos el valor de y usando el mismo procedimiento:

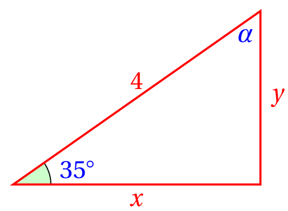
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \Rightarrow \qquad y = r\,\sin\theta = 3\,\sin(40°) \approx 1.92836$$

- El otro ángulo agudo mide 50°, porque los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.
- Y terminamos.

Recuerda que resolver un triángulo significa calcular las longitudes de todos sus lados y las medidas de todos sus ángulos.

Ejemplo 4 Resuelve el siguiente triángulo rectángulo a partir de la información dada:

- Figura:



- Empezamos calculando el ángulo agudo desconocido.
- Dado que la suma de los tres ángulos internos es 180° y uno de ellos es un ángulo recto, tenemos que la suma del ángulo desconocido más 35° es igual a 90°.
- Entonces, si α es la medida del ángulo desconocido tenemos:

$$35^\circ + \alpha = 90^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

- Para calcular las longitudes de los lados aplicamos la definición de las funciones trigonométricas $\cos\theta$ y $\sin\theta$:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \Rightarrow \qquad x = r\,\cos\theta = 4\,\cos(35^\circ) \approx 3.2766$$

- Ahora calculamos el valor de y usando el mismo procedimiento:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \Rightarrow \qquad y = r\,\sin\theta = 4\,\sin(35^\circ) \approx 2.2943$$

- Y terminamos.

Algunas veces no vamos a tener el valor de algún ángulo agudo del triángulo rectángulo y además, no estará en la tabla de resumen (página 332).

En esos casos tendremos que aplicar las funciones trigonométricas inversas.

Definición 1

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS
Funciones que calculan el valor de un ángulo a partir del valor de una función trigonométrica del mismo ángulo.

Las funciones trigonométricas son:

✓ Arcoseno: $\arcsin y$

✓ Arcocoseno: $\arccos x$

✓ Arcotangente: $\arctan m$

Si nosotros conocemos que el seno de $30^\circ = 0.5$, cuando aplicamos este valor (0.5) a la función seno inverso nos devuelve 30°.

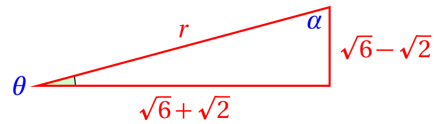
Es decir, una función inversa contesta a la pregunta: «*Sé que el valor de la función trigonométrica $f(\theta)$ es u. ¿Cuánto vale el ángulo θ?*»

Nosotros sustituimos el valor u en la función trigonométrica y nos devuelve el valor del ángulo θ.

Ejemplo 5

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:

- Figura:



- En este caso solamente conocemos uno de los ángulos del triángulo: el ángulo recto.
- Podemos empezar calculando la hipotenusa del triángulo rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(6+2\sqrt{12}+2\right)+\left(6-2\sqrt{12}+2\right)} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

- Teniendo las longitudes de los lados del triángulo, podemos calcular cualquiera de los valores de las funciones trigonométricas del ángulo θ:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Ahora, para calcular el ángulo θ podemos aplicar una función trigonométrica inversa.
- **Primer Método:** (Aplicar $\arcsin y$)

$$\theta = \arcsin y = \arcsin(\sin\theta) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = 15^\circ$$

- **Segundo Método:** (Aplicar $\arccos x$)

$$\theta = \arccos x = \arccos(\cos\theta) = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = 15^\circ$$

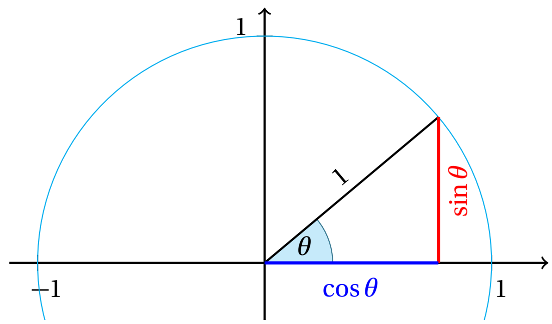
- **Tercer Método:** (Aplicar $\arctan m$)

$$\theta = \arcsin y = \arctan(\tan\theta) = \arctan\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right) = 15^\circ$$

- El otro ángulo agudo del triángulo rectángulo debe medir: $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

Una interpretación geométrica de las funciones $\sin\theta$ y $\cos\theta$ que nos servirá para resolver algunos problemas es la siguiente.

Considera una circunferencia unitaria, y en ésta traza un radio, como se muestra en la siguiente figura:



Observa que las funciones trigonométricas están representadas por segmentos de recta que resultan de las proyecciones, horizontal para el coseno y vertical para el seno, porque si la hipotenusa del triángulo rectángulo mide 1, entonces,

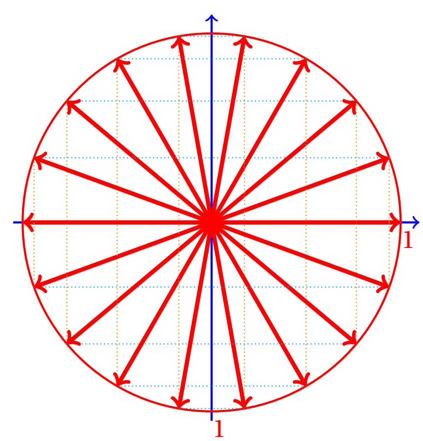
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \text{y también,} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

7.1.5 F. Trig. para ángulos de cualquier magnitud

Ahora vamos a utilizar la ciruncferencia unitaria para descubrir algunas propiedades de las funciones trigonométricas.

Empezamos con las funciones $\sin\theta$ y $\cos\theta$.

Al variar el valor del ángulo θ el radio sobre la circunferencia unitaria va girando desde 0° hasta 360° y para valores mayores los valores de las funciones trigonométricas se vuelven a repetir.



Recuerda que la proyección horizontal del radio es igual al valor de la función coseno y que la proyección vertical del radio es igual al valor de la función seno.

Observa que cuando $\theta = 0° = 0\,\text{rad}$, la función coseno tiene una proyección horizontal de longitud igual al radio. Es decir, $\cos(0) = 1$.

Conforme los valores de θ van creciendo, los valores de la función $\cos\theta$ van decreciendo, hasta llegar al valor cero cuando $\theta = 90° = \pi/2\,\text{rad}$.

Para ángulos mayores a 90° las proyecciones horizontales del radio se van al lado negativo, pues no caen sobre el lado inicial del ángulo, y los valores de la función $\cos\theta$ van creciendo, pero con valores negativos, hasta llegar a tomar el valor -1 cuando $\theta = 180° = \pi\,\text{rad}$.

Cuando θ rebasa los 180°, los valores de la función coseno vuelven a decrecer (siendo negativos), hasta llegar al valor 0 cuando $\theta = 270° = (3\pi/2)\,\text{rad}$.

Finalmente, cuando el ángulo θ rebasa los 270°, la función coseno vuelve a tomar valores positivos crecientes, hasta que alcanza el máximo valor a los $360° = 2\pi\,\text{rad}$, y los valores se vuelven a repetir de nuevo.

Una discusión similar corresponde a la función seno.

Cuando $\theta = 0°$, la proyección vertical del radio es un punto, por eso, $\sin(0) = 0$.

Conforme el ángulo θ va creciendo, las proyecciones verticales también crecen, y son positivas, llegando a un máximo cuando $\theta = 90°$. Entonces, $\sin\theta = 1$, siendo $\theta = 90° = \pi/2\,\text{rad}$.

Al seguir creciendo $\theta > 90°$, los valores de la función seno van decreciendo, pero siguen siendo positivos, hasta que θ alcanza un valor de 180°, porque en ese punto la proyección vertical del radio de nuevo es un punto al igual que al inicio y tenemos: $\sin(180°) = 0$.

Cuando θ rebasa los 180°, los proyecciones verticales del radio quedan por debajo del eje horizontal y por eso son negativas. Los valores de la función seno van creciendo negativamente hasta alcanzar el valor -1 para un ángulo $\theta = 270°$.

Para ángulos θ entre 270° y 360° los valores de la función seno van decreciendo en valor absoluto, pero siendo negativos y llegando a cero cuando $\theta = 360°$.

Todo este ciclo se repite de nuevo si hacemos crecer aún más el ángulo θ. Por eso, generalmente nos quedamos con el estudio de los valores de las funciones trigonométicas utilizando solamente el intervalo $0° \leq \theta \leq 360°$, pues para valores mayores de θ podemos imaginarnos que giramos varias veces (cuantas veces sea necesario) para que θ coincida con un ángulo en el intervalo inicial ($0° \leq \theta \leq 360°$) y obtener los valores de las funciones de aquí.

En otras palabras, los valores de las funciones trigonométricas se van repitiendo cada 360°. Por eso decimos que las funciones trigonométricas son periódicas.

Definición 1

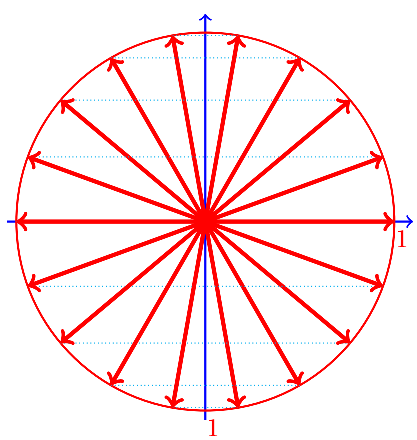
FUNCIÓN PERIÓDICA
Si una función f que tiene la propiedad: $f(x) = f(x+k)$ para un k dado característico de cada función, entonces decimos que la función es periódica.

Definición 2

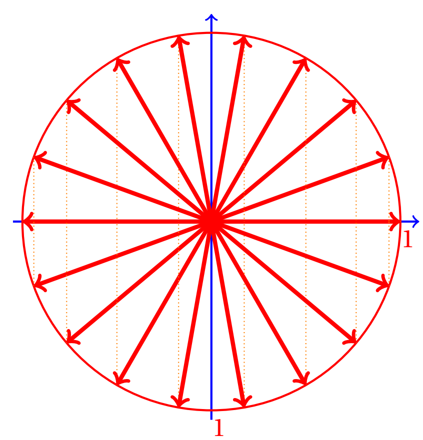
PERIODO DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA
Sea f una función periódica. El valor mínimo de k que hace que se cumpla: $f(x) = f(x+k)$ para toda x en el dominio de la función f es el periodo de la función.

Observa que por la simetría se cumple:

$\cos\theta = \cos(-\theta)$



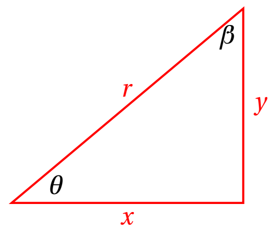
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

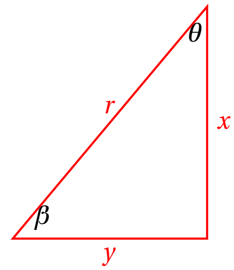


Recuerda que el ángulo positivo gira en contra de las manecillas del reloj, mientras que el ángulo negativo a favor de las manecillas.

Si cambiamos el valor de θ por $(-\theta)$, obtenemos el mismo valor de la función. Es decir, las proyecciones horizontales de radios con inclinaciones θ o $(-\theta)$ son iguales.

Observa que en los triángulos rectángulos equivalentes:





los ángulos θ y β son complementarios.

Lo único que hemos hecho es cambiar la posición del triángulo para obtener el de la izquierda a partir del triángulo de la derecha.

Observa que $\sin\theta = \cos\beta$, porque:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \text{y} \qquad \cos\beta = \frac{y}{r}$$

También se cumple: $\sec\theta = \csc\beta$, porque:

$$\sec\theta = \frac{r}{y} \qquad \text{y} \qquad \csc\beta = \frac{r}{y}$$

Y finalmente, también: $\tan\theta = \cot\beta$, porque:

$$\tan\theta = \frac{r}{y} \qquad \text{y} \qquad \cot\beta = \frac{r}{y}$$

Ahora observa los nombres de las funciones relacionadas como se ha indicado:

Función	**Cofunción**
Seno $(\sin\theta)$	Coseno $(\cos\beta)$
Secante $(\sec\theta)$	Cosecante $(\csc\beta)$
Tangente $(\tan\theta)$	Cotangente $(\cot\beta)$

Y al recordar que los ángulos θ y β son complementarios, puedes imaginar de dónde viene el prefijo «*co*» de las cofunciones.

COFUNCIÓN

La cofunción $C(\beta)$ de una función trigonométrica $f(\theta)$ es la función trigonométrica que cumple:

$$f(\theta) = C(90^\circ - \theta)$$

para: $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

Definición 3

Este resultado se establece como un teorema:

Las funciones trigonométricas tienen las siguientes propiedades:

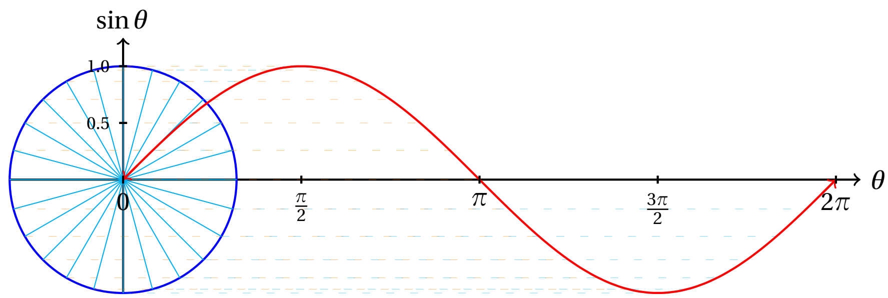
- ✓ $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$
- ✓ $\sec\theta = \csc(90^\circ - \theta)$
- ✓ $\tan\theta = \cot(90^\circ - \theta)$
- ✓ $\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$
- ✓ $\csc\theta = \sec(90^\circ - \theta)$
- ✓ $\cot\theta = \tan(90^\circ - \theta)$

En palabras, cualquier función de θ es igual a la cofunción del complemento de θ.

Teorema 1

Para graficar las funciones trigonométricas utilizamos los argumentos dados anteriormente y trazamos solamente un *periodo* de la función, y después solamente debemos repetir la gráfica, por la definición de función periódica.

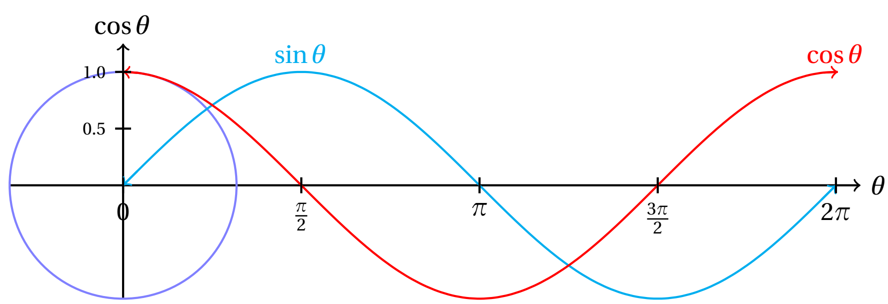
Enseguida se muestra la gráfica de la función seno:



Conforme vamos aumentando el valor del ángulo θ, vamos recorriendo el punto sobre el eje horizontal y graficamos el valor de $\sin\theta$. Al considerar varios puntos podemos obtener una idea de la gráfica de la función.

Al recordar que la función es periódica, podemos extenderla en ambas direcciones repitiendo la forma de la función tantas veces como se requiera.

Por otra parte, la gráfica de la función coseno se obtiene fácilmente al recordar que: $\cos\theta = \sin(90° - \theta)$, haciendo una traslación hotizontal de la gráfica de la función $\sin\theta$ como se muestra en la siguiente figura:



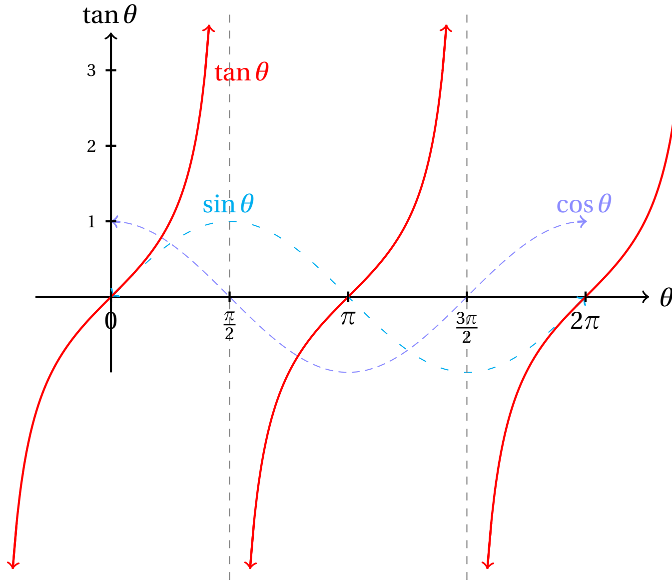
Para obtener la gráfica de la función $\tan\theta$ basta observar del triángulo rectángulo que usamos para definir las funciones trigonométricas que:

$$\tan\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Es decir, si dividimos el valor de $\sin\theta$ entre el valor de $\cos\theta$ obtenemos el valor de $\tan\theta$.

Cuando los valores de la función $\sin\theta$ van acercándose a cero, los valores de $\tan\theta$ también y $\tan\theta = 0$ exactamente en los mismos puntos para los cuales $\sin\theta = 0$.

Cuando los valores de la función $\cos\theta$ se acercan a cero, los valores del cociente $\sin\theta / \cos\theta$ crecen cada vez más, y cuando $\cos\theta = 0$, la división no está definida, así que en esos puntos la gráfica de la función $\tan\theta$ tampoco estará definida.



Como puedes ver, la gráfica de la función tangente también es periódica, pues sus valores se van repitiendo cada π rad.

La gráfica de $\tan\theta$ está compuesta de muchas ramas idénticas. Dado que no es posible dibujar la gráfica de la función tangente sin levantar el lápiz del papel sobre la cual se le dibuja, decimos que la gráfica es discontínua.

Los puntos de discontinuidad de la gráfica de la función tangente están en los puntos en donde $\cos\theta = 0$; es decir, en todos los múltiplos impares de $\pi/2$ radianes.

Resuelve los siguientes ejercicios. **Ejercicios 7.1.5**

1) Utilizando la propiedad $\cot\theta = \tan(90° - \theta)$ obtén la gráfica de la función $\cot\theta$.

2) Verifica que la gráfica de la función $\cot\theta$ que obtuviste en el ejercicio anterior cumple con que los puntos de discontinuidad están en donde $\sin\theta = 0$ usando las gráficas de las funciones $\sin\theta$ y $\cos\theta$.

3) En el texto se menciona: «*Los puntos de discontinuidad de la gráfica están en los puntos en donde* $\cos\theta = 0$*; es decir, en todos los múltiplos impares de* $\pi/2$ *radianes.*» Corrige esta frase adaptándola para el caso de la gráfica de la función $\cot\theta$.

4) Adapta la frase del ejercicio anterior para indicar en qué puntos se encuentran los ceros de la función seno.

5) Adapta la frase del ejercicio anterior para indicar en qué puntos se encuentran los ceros de la función coseno.

Capítulo 8

Leyes de Senos y Cosenos

Por aprender...

Por qué es importante...

Las leyes de senos y cosenos generalizan la solución de triángulos. En el anterior capítulo solamente resolvimos triángulos rectángulos. Estas leyes nos permiten resolver triángulos de cualquier tipo.

8.1 LEY DE SENOS

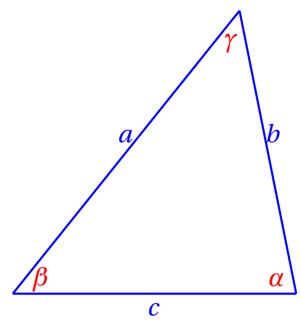
Hasta ahora hemos resuelto triángulos rectángulos, pero también es común encontrar problemas con triángulos que no son rectángulos, como acutángulos u obtusángulos.

Para resolver estos problemas el método que hemos utilizado no funciona, pero podemos utilizar la ley de senos.

Teorema 2

LEY DE SENOS
Para cualquier triángulo que se encuentre en el plano, con ángulos internos α, β, γ, y longitudes de lados opuestos a, b, c respectivamente, se cumple:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$



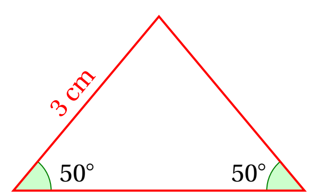
En palabras, la ley de senos dice: «*para cualquier triángulo que se encuentra en un plano, las longitudes de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos*».

Si nosotros conocemos la longitud de uno de los lados del triángulo y sus ángulos internos, podemos calcular las longitudes de los otros dos lados utilizando esta ley.

Ejemplo 1

Resuelve el siguiente triángulo isósceles:

- Figura:



- Como el triángulo es isósceles, los dos lados inclinados miden 3 cm.
- Vamos a demostrarlo usando la ley de senos.
- Para esto definimos: $a = 3$ cm, $\alpha = 50°$, $\beta = 50°$ y necesitamos calcular b.
- Utilizando:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

podemos despejar b para obtener:

$$b = \frac{a\,\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{3\,\sin(50°)}{\sin(50°)} = 3\text{ cm}$$

- Con esto queda demostrado que es un triángulo isósceles.
- Para calcular la longitud de la base, debemos notar que la suma de los dos ángulos conocidos es 100° y que el tercer ángulo debe medir 80°.
- Con esto podemos volver a utilizar la ley de senos para calcular la longitud de c:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c} \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{a\,\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

- Ahora solamente sustituimos los valores conocidos:

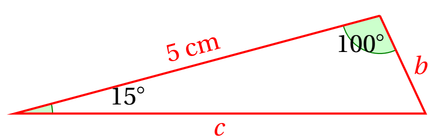
$$c = \frac{a\,\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{3\,\sin(80^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 3.85673 \text{ cm}$$

- Y con esto hemos resuelto este triángulo acutángulo.

La ley de senos también funciona para triángulos obtusángulos, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Resuelve el siguiente triángulo obtusángulo:

- Figura:



- En este caso $a = 5$ cm, $\beta = 15°$, $\gamma = 100°$ y podemos calcular α:

$$\alpha = 180^\circ - 15^\circ - 100^\circ = 65^\circ$$

- Ahora podemos calcular la longitud del lado b aplicando la ley de senos:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sin(65^\circ)}{5} = \frac{\sin(15^\circ)}{b}$$

- Despejando y resolviendo obtenemos: $b \approx 1.427876$ cm.
- Finalmente, podemos calcular el valor de c:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c} \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{a\,\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

- Sustituyendo los valores obtenemos:

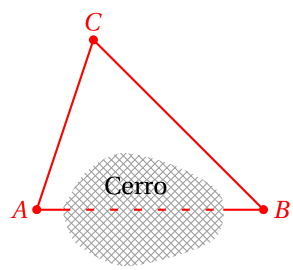
$$c = \frac{5\,\sin(100^\circ)}{\sin(65^\circ)} \approx 5.4330756 \text{ cm}$$

- Y terminamos.

La ley de senos sirve también para resolver problemas aplicados.

Una compañía constructora va a perforar un tunel a través de un cerro para reducir el tiempo de transporte de Acatlán (punto A en la figura) a Bacatlán (punto B). Si el tunel está sobre la recta que pasa por los puntos A y B, ¿cuál será la distancia de la carretera? Cazatlán es el punto C indicado en la siguiente figura. Se midieron: $\lvert\overline{AC}\rvert = 31.6$ km, $\angle CBA = 45°$ y $\angle CAB = 71.6°$.	**Ejemplo 3**

- Figura:



- Empezamos notando que podemos calcular el valor del ángulo $\angle ABC$:

$$\angle ABC = 180° - 45° - 71.6° = 63.4°$$

- Ahora podemos calcular la distancia entre los puntos A y B aplicando la ley de senos:

$$\lvert\overline{AB}\rvert = \frac{31.6\ \sin(45°)}{\sin(63.4°)} \approx 39.9 \text{ km}$$

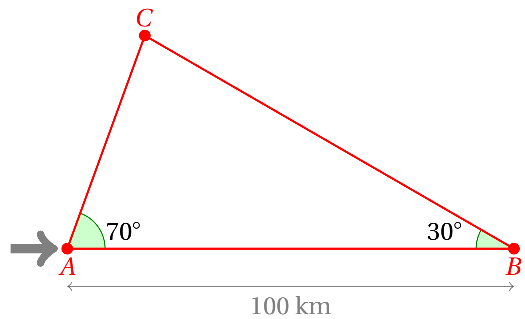
- También podemos calcular la distancia entre el punto C y Bacatlán:

$$\lvert\overline{BC}\rvert = \frac{31.6\ \sin(71.6°)}{\sin(45°)} \approx 42.4 \text{ km}$$

- Con esto hemos resuelto completamente el triángulo $\triangle ABC$.
- Esto significa que actualmente para llegar desde Acatlán a Bacatlán recorren, al menos, 31.6 km desde Acatlán hasta Cazatlán primero, y después 42.4 km desde Cazatlán hasta Bacatlán.
- 31.6 km $+ 42.4$ mk $= 74$ km en total.
- Con la nueva carretera que pasará a través del tunel, la distancia se acorta a 40 km, aproximadamente.

En el punto A se encuentra un avión que viaja hacia el este, desde ahí a 70° grados hacia el norte (izquerda del frente del avión) se encuentra un aeropuerto. Si avanza 100 kilómetros, ubicándose el avión ahora en el punto B, el mismo aeropuerto está a 70° al sur respecto del mismo avión. ¿A qué distancia se encuentran los puntos A y B del aeropuerto?	**Ejemplo 4**

- Empezamos elaborando un diagrama para tener una mejor idea del problema:



- Definimos: $\alpha = 70°$, y $\beta = 30°$.
- El tercer ángulo $\gamma = 80°$, porque $70° + 30° + 80° = 180°$.
- Para calcular las distancias que queremos conocer aplicamos la ley de senos.

$$\frac{|\overline{BC}|}{\sin(70°)} = \frac{100}{\sin(80°)} \qquad \Rightarrow \qquad |\overline{BC}| = \frac{100\sin(70°)}{\sin(80°)} \approx 95.42 \text{ km}$$

- La distancia desde el punto A hasta el punto C es:

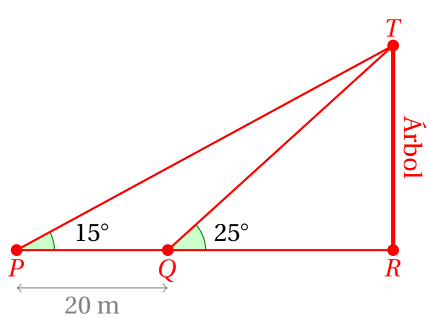
$$\frac{|\overline{AC}|}{\sin(30°)} = \frac{100}{\sin(80°)} \qquad \Rightarrow \qquad |\overline{AC}| = \frac{100\sin(30°)}{\sin(80°)} \approx 50.77 \text{ km}$$

- Y hemos terminado.

Ejemplo 5

Marco notó que se forma un ángulo de 15° desde un punto P en el suelo hasta la copa de un árbol, pero si avanza horizontalmente 20 metros hacia el árbol a un punto Q, el ángulo que se forma es de 25°. ¿Cuál es la altura del árbol?

- Empezamos haciendo un bosquejo de la situación:



- Dado que los ángulos $\angle RQT$ y $\angle TQP$ son suplementarios y $\angle RQT$ mide 25°, se sigue que $\angle TQP$ mide 155°.
- Ahora que conocemos dos ángulos internos del triángulo $\triangle PQT$ podemos calcular la medida del ángulo $\angle PQT$:

$$\angle PQT = 180° - 15° - 155° = 10°$$

- Ahora podemos aplicar la ley de senos para calcular la medida del lado $\overline{QT}$:

$$\frac{|\overline{QT}|}{\sin(15^\circ)} = \frac{20}{\sin(10^\circ)} \qquad \Rightarrow \qquad |\overline{QT}| = \frac{20\sin(15^\circ)}{\sin(10^\circ)} \approx 29.81 \text{ metros}$$

- Ahora podemos calcular la longitud del segmento $\overline{QR}$, aplicando la definición de la función coseno en el triángulo rectángulo $\triangle QRT$:

$$|\overline{QR}| = |\overline{QT}|\,\cos(25^\circ) = 29.81\,\cos(25^\circ) \approx 27.02 \text{ metros}$$

- Finalmente, podemos aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $\triangle QRT$ para calcular la altura del árbol.
- En este triángulo, la hipotenusa mide $|\overline{QT}| = 29.81$, y el cateto conocido: $|\overline{QR}| = 27.02$.

$$\begin{aligned}
|\overline{RT}| &= \sqrt{|\overline{QT}|^2 - |\overline{QR}|^2}\\
&= \sqrt{(29.81)^2 - (27.02)^2}\\
&= \sqrt{888.64 - 730.08}\\
&= \sqrt{158.55}\\
&\approx 12.59 \text{ metros}
\end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Parte III

Geometría Analítica

Capítulo 9

Sistemas de ejes coordenados

Por aprender...

Por qué es importante...

En el aprendizaje de cualquier ciencia, es importante concer la terminología con la que estamos hablando. En esta unidad vamos a descubrir las fórmulas que nos servirán para el resto del curso.

9.1 Coordenadas de un punto

En esta sección iniciamos con las definiciones de algunos conceptos básicos sobre los cuales descansan todos los demás conceptos que utilizaremos a lo largo del curso.

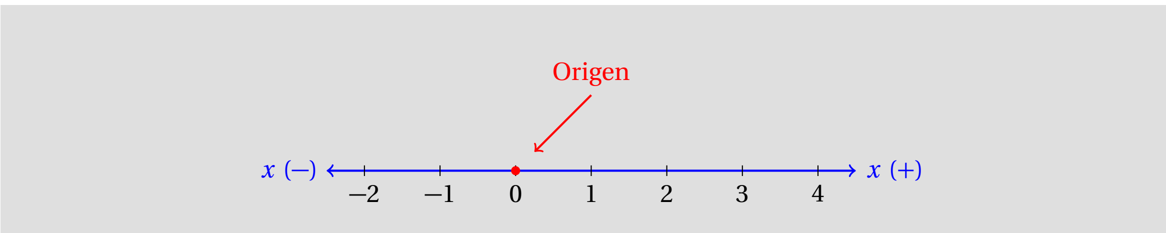
9.1.1 Ejes Coordenados

RECTA DIRIGIDA

Sobre una línea recta eleginos un punto al cual llamaremos origen. A partir de este punto se definen las direcciones una como positiva y la otra como negativa.
Nosotros utilizaremos una unidad de medida en cada recta dirigida.

Definición 1

Por ejemplo, la siguiente es una recta dirigida:



En una recta dirigida definimos una unidad de medida y un origen, donde colocamos el cero.

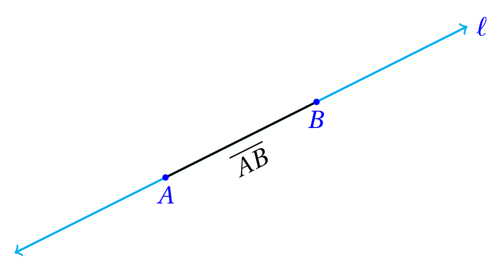
También definimos en qué dirección se consideran los números positivos. Una vez definida esta dirección, la otra dirección se considera que contiene los números negativos.

SEGMENTO

Es una parte de una recta limitada por dos de sus puntos.

Definición 2

El siguiente segmento está limitado por los puntos A y B y se denota por $\overline{AB}$.



Pero no tenemos por qué conformarnos con usar solamente una recta dirigida. Algunas veces es muy conveniente considerar dos rectas dirigidas.

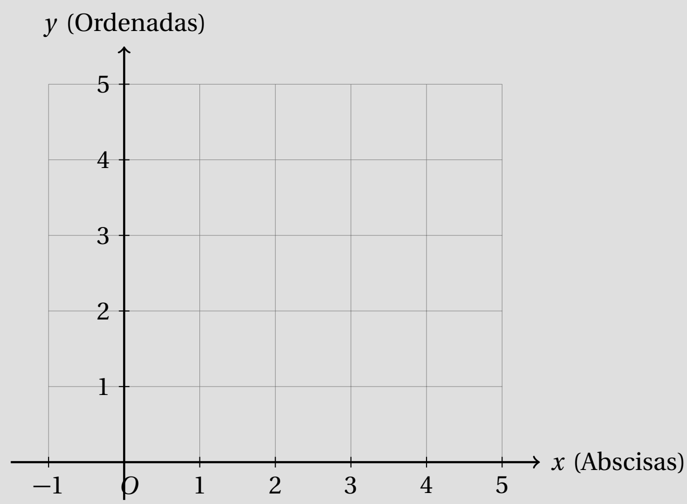
Por ejemplo, en algunas ciudades, las calles están enumeradas. De manera que una dirección puede ser, Calle 34 Entre 21 y 23. Esto ayuda a localizar de una manera más rápida una ubicación.

Definición 3

EJES COORDENADOS

Un sistema de ejes coordenados se representa por medio de dos rectas dirigidas, mutuamente perpendiculares.
Las dos rectas dirigidas se intersectan en sus respectivos orígenes.
Cada una de las rectas que forman el sistema de ejes coordenados se conoce como eje.
Es común dibujar los sistemas de ejes coordenados con un eje horizontal (abscisas) y el otro vertical (ordenadas) con la unidad de medida común a ambos.

El siguiente es un sistema de ejes coordenados:



De esta manera, cuando elegimos un punto del plano así formado, podemos asignar un único par de valores, que corresponden a la distancia del origen a la coordenada que le corresponde en cada uno de los ejes.

Por ejemplo, fácilmente podemos ubicar el punto $A(3,2)$ en el sistema de ejes coordenados. Primero recorremos a partir del origen 3 unidades y después, verticalmente avanzamos 2 unidades.

Definición 4

COORDENADA DE UN PUNTO

Cuando un punto del plano se define a través de las distancias de sus respectivos ejes al origen, se dice que cada uno de los valores son sus coordenadas.

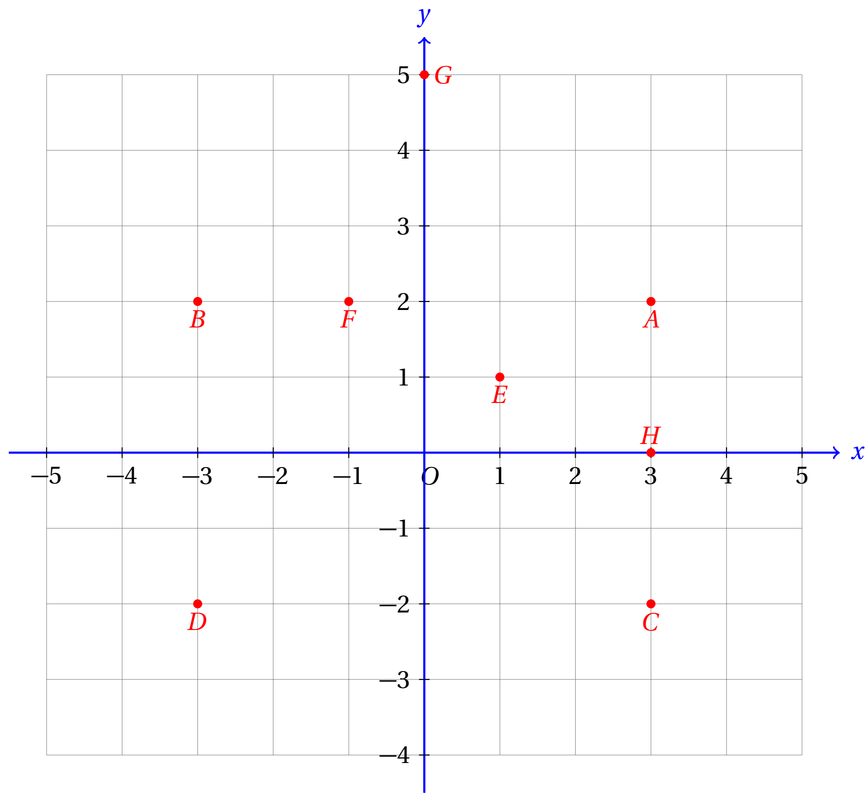
Por ejemplo, en el punto $A(3,2)$ el número 3 es la coordenada de las abscisas, o también del eje horizontal, que comúnmente llamaremos eje x y el número 2 es la coordenada de las ordenadas, o del eje vertival, que llamaremos eje y.

Ejemplo 1

Ubica los siguientes puntos en el sistema de ejes coordenados dado:

✓ $A(3,2)$	✓ $C(3,-2)$	✓ $E(1,1)$	✓ $G(0,5)$
✓ $B(-3,2)$	✓ $D(-3,-2)$	✓ $F(-1,2)$	✓ $H(3,0)$

- Recuerda, siempre debemos primero ubicar la primera coordenada sobre el eje horizontal.



- Junto a la etiqueta que corresponde a cada punto escribe sus coordenadas.

Observa que si $A(x_a, y_a)$ y $B(x_b, y_b)$, entonces, $A = B$ solamente si $x_a = x_b$ y también, $y_a = y_b$.

En palabras, dos puntos son el mismo punto si tienen exactamente las mismas coordenadas (en el mismo sistema de ejes coordenados).

En la geometría analítica frecuentemente necesitaremos calcular la distancia entre dos puntos, para lo cual nos será de gran ayuda la siguiente fórmula:

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Sean $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$ dos puntos del plano. La distancia entre ellos, medido en la unidad de medida del sistema de coordenadas es igual a:

$$D = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$$

Definición 5

A partir de la fórmula anterior, podemos deducir las siguientes:

Condiciones que satisface la distancia entre dos puntos:

✓ La distancia entre dos puntos del plano cartesiano siempre es un número no negativo.

✓ La distancia de un punto a sí mismo siempre es igual a cero.

✓ La distancia de P a Q es igual a la distancia del punto Q al punto P.

Comentario

Encuentra la distancia entre los puntos $P(2,3)$ y $Q(6,6)$. **Ejemplo 2**

- Podemos aplicar directamente la fórmula y sustituir las coordenadas de los puntos:

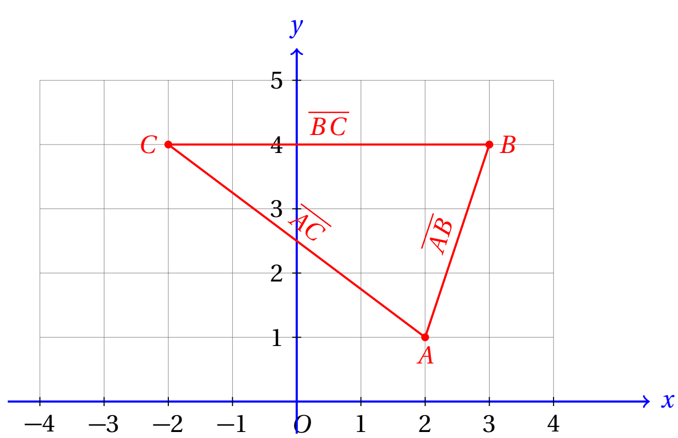
$$\begin{aligned}
D &= \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}\\
&= \sqrt{(6-2)^2 + (6-3)^2}\\
&= \sqrt{(4)^2 + (3)^2}\\
&= \sqrt{16+9}\\
&= \sqrt{25}\\
&= 5
\end{aligned}$$

- Entonces, si el sistema de coordenadas tiene por unidad de medida el centímetro, la distancia entre los puntos $P(2,3)$ y $Q(6,6)$ será de 5 cm.
- Se te queda como ejercicio verificar la tercera condición que satisface la distancia entre los puntos P y Q.

En este curso vamos a utilizar las definiciones de la geometría plana para poder resolver muchos problemas y probar propiedades de las figuras geométricas, pero ahora vamos a utlizar el álgebra para poder demostrar o identificar propiedades de los objetos geométricos con los que nos encontraremos.

Ejemplo 3 Verifica si el triángulo con vértices en los puntos $A(2,1)$, $B(3,4)$ y $C(-2,4)$ es isósceles.

- Para saber si es isósceles o no, debemos asegurarnos que dos de sus lados midan lo mismo.
- Así que tenemos que encontrar la longitud de cada uno de sus lados.
- Realizamos un dibujo para representar la situación:



- Al parecer, los lados que tienen la misma longitud son $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.
- Ahora encontramos la longitud del lado $\overline{AC}$:

$$\begin{aligned}
D_{\overline{AC}} &= \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2}\\
&= \sqrt{(-2-2)^2 + (4-1)^2}\\
&= \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9}\\
&= \sqrt{25} = 5
\end{aligned}$$

- Por otra parte, la longitud del lado BC es:

$$
\begin{aligned}
D_{\overline{BC}} &= \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2} \\
&= \sqrt{(-2-3)^2 + (4-4)^2} \\
&= \sqrt{(-5)^2 + (0)^2} = \sqrt{25+0} \\
&= \sqrt{25} = 5
\end{aligned}
$$

- Entonces, el triángulo sí es un triángulo isósceles.

Punto de división

Sean P y Q dos puntos fijos en una recta dirigida. Se dice que el punto M divide al segmento $\overline{PQ}$ en otros dos segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{MQ}$.

Definición 6

Lo interesante del punto de división consiste en la proporción de los segmentos formados por él.

Razón de división

La razón de división r ocasionada por el punto de división M sobre el segmento $\overline{PQ}$ es:

$$r = \frac{\overline{PM}}{\overline{MQ}}$$

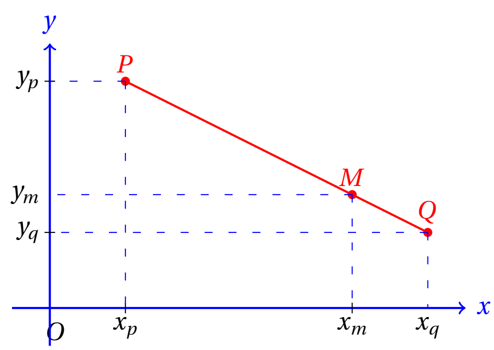
Definición 7

Si consideramos que $M(x_m, y_m)$ es el punto de división del segmento $\overline{PQ}$, entonces, podemos escribir:

$$r = \frac{x_m - x_p}{x_q - x_m}$$

y de manera semejante:

$$r = \frac{y_m - y_p}{y_q - y_m}$$



A partir de cada una de las ecuaciones podemos despejar x_m y y_m respectivamente, que es, la mayoría de las veces, lo que necesitaremos encontrar:

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{x_m - x_p}{x_q - x_m} \\
r\,(x_q - x_m) &= x_m - x_p \\
r\,x_q - r\,x_m &= x_m - x_p \\
r\,x_q + x_p &= x_m + r\,x_m \\
r\,x_q + x_p &= x_m(1+r) \\
x_m &= \frac{r\,x_q + x_p}{1+r}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
r &= \frac{y_p - y_m}{y_m - y_q} = \frac{y_m - y_p}{y_q - y_m} \\
r\,(y_q - y_m) &= y_m - y_p \\
r\,y_q - r\,y_m &= y_m - y_p \\
r\,y_q + y_p &= y_m + r\,y_m \\
r\,y_q + y_p &= y_m(1+r) \\
y_m &= \frac{r\,y_q + y_p}{1+r}
\end{aligned}
$$

Es importante recordar que r es la proporción de las longitudes de los segmentos formados al incluir el punto de división M en el segmento.

La proporción es una constante que se define como la razón de la longitud del semento $\overline{PM}$ entre la longitud del segmento $\overline{MQ}$.

Definición 8

COORDENADAS DEL PUNTO DE DIVISIÓN CON UNA RAZÓN DADA

Las coordenadas del punto de división $M(x_m, y_m)$ del segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$ con una razón r, se calculan con las siguientes fórmulas:

$$x_m = \frac{r\,x_q + x_p}{1+r} \qquad y_m = \frac{r\,y_q + y_p}{1+r}$$

Ejemplo 4

Encuentra las coordenadas del punto $M(x_m, y_m)$ que divide al segmento cuyos extremos son los puntos $P(1,-1)$, y $Q(7,2)$ en la razón $r = 2$.

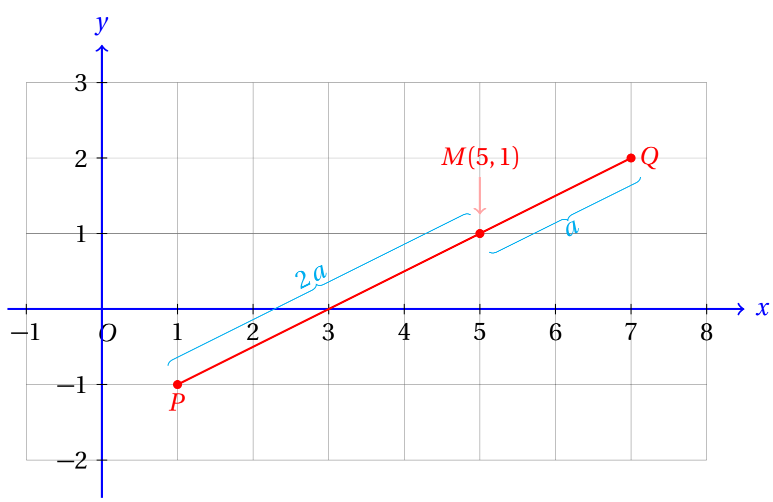
- Tenemos todos los datos:

✓ $r = 2$ ✓ $x_p = 1,\ y_p = -1$ ✓ $x_q = 7,\ y_q = 2$

- Lo único que necesitamos es sustituir en las fórmulas:

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{2(7)+1}{1+2} \\ &= \frac{15}{3} \\ &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_m &= \frac{2(2)-1}{1+2} \\ &= \frac{3}{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- La siguiente figura muestra geométricamente el resultado:



Un caso particular muy importante ocurre cuando consideramos el punto medio.

Entonces, $r = 1$, porque queremos que ambos segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{MQ}$ tengan la misma longitud.

En este caso:

$$\bar{x} = \frac{x_q + x_p}{2} \qquad \bar{y} = \frac{y_q + y_p}{2}$$

PUNTO MEDIO

Las coordenadas del punto medio $M(\bar{x},\bar{y})$ del segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$ se calcula con las siguientes fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{x_q + x_p}{2} \qquad \bar{y} = \frac{y_q + y_p}{2}$$

Definición 9

Una forma sencilla de memorizar esta fórmula es la siguiente:

La coordenada del punto medio se calcula con el promedio

Comentario

Observa que en cada fórmula debemos calcular el promedio de las coordenadas de los puntos extremos del segmento para calcular la coordenada de su punto medio. Así de fácil.

Gracias a la propiedad de conmutatividad, el punto medio de un segmento es independiente del orden. Es decir, no importa qué punto sustituyas primero y cuál después, siempre obtienes el mismo resultado. Después de todo, el segmento $\overline{PQ}$ es idéntico al segmento $\overline{QP}$.

Los extremos del diámetro de un círculo son los puntos $P(-4,1)$ y $Q(2,-3)$. Encuentra las coordenadas de su centro $C(h,k)$.

Ejemplo 5

- Sabemos que el centro del círculo siempre es el punto medio del diámetro.

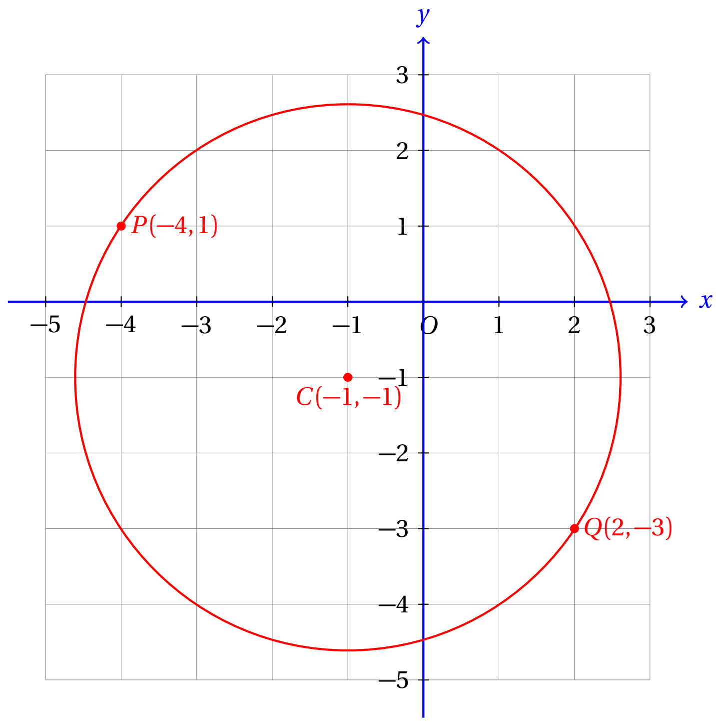
- Así que en este caso debemos encontrar el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

- Sustituimos los valores de las coordenadas de los puntos en las fórmulas:

$$\begin{aligned} h &= \frac{-4+2}{2} \\ &= \frac{-2}{3} \\ &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} k &= \frac{1-3}{2} \\ &= \frac{-2}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

- Entonces, el centro del círculo es el punto $C(-1,-1)$.

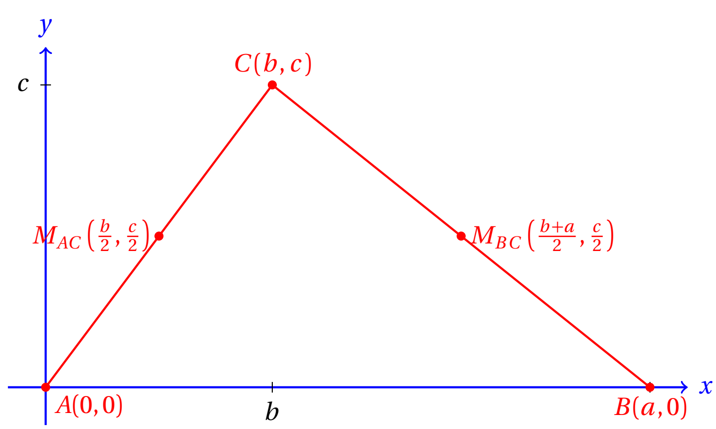
- Geométricamente, el resultado es el siguiente:



Estas fórmulas se estarán utilizando a lo largo de todo el curso, así que es mejor que las vayas memorizando.

Ejemplo 6 Demuestra que la longitud del segmento que se forma al unir los puntos medios de dos de los lados de un triángulo mide la mitad del otro lado.

- Consideramos el triángulo con vértices en los siguientes puntos:



- La distancia desde el punto medio del lado $\overline{AC}$ hasta el punto medio del lado $\overline{BC}$ es:

$$\overline{M_{AC}M_{BC}} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{2}\right)^2}$$

- Podemos simplificar esta expresión para obtener:

$$\begin{aligned}\overline{M_{AC}M_{BC}} &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2+0}\\ &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2}\\ &= \frac{|a|}{2}\end{aligned}$$

Que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Siempre que encuentres problemas donde requieras demostrar una aseveración, escribe las coordenadas suponiendo que son números.

Trátalos como si fueran números siempre, indicando las operaciones que debes hacer con ellos y trata de expresar tus resultados de la manera más simplificada que te sea posible.

Cuando encuentres lo que deseas demostrar has terminado.

Estos problemas tienen exactamente el mismo nivel de dificultad que en el que te dan números específicos para las coordenadas de puntos, etc., pero tienen un mayor nivel de abstracción, porque debes suponer que cada letra es un número.

El método de solución del problema no cambia en forma alguna.

Si tienes dificultad para resolver un problema usando las literales, sustituye números en su lugar, resuelve el problema y después intenta resolverlo con letras usando el método que usaste para resolverlo con números en lugar de literales.

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios. De ser posible, realiza una gráfica para cada uno de ellos. El simbolo ✌ indica que el problema tiene dos soluciones correctas.

Ejercicios 9.1.1

1) Encuentra el punto medio para cada par de los siguientes puntos:

✓ $A(2,7), B(6,5)$
✓ $C(1,-2), D(-1,2)$
✓ $E(3,5), F(7,9)$
✓ $G(-2,10), H(2,-10)$
✓ $I(-1,-1), J(3,7)$
✓ $K(-3,-5), L(-2,0)$
✓ $M(7,3), N(5,11)$
✓ $P(1,5), Q(3,1)$
✓ $R(-5,4), S(-4,5)$

2) ¿A qué distancia del origen se encuentra el punto $A(6,8)$? A 10 unidades.

3) Dos puntos que se encuentran sobre el eje x están a 12 unidades de distancia entre sí. El primero de ellos es el punto $x=5$. ¿Cuál es el otro punto? ✌ $x=17$, $x=-7$.

4) Un cuadrado tiene dos de sus vértices en los puntos $P(1,2)$ y $Q(5,2)$. Encuentra los otros dos vértices R y S. $R(5,6)$ y $S(1,6)$.

5) Un rectángulo con base igual al doble de la altura tiene dos de sus vértices en los puntos $A(1,1)$ y $B(1,5)$. Encuentra los demás vértices si la base es un lado horizontal. $C(9,1)$ y $D(9,5)$.

6) Calcula la distancia desde el origen hasta el punto $P(x,y)$. Expresa tu resultado como una fórmula. $D_{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$.

7) Calcula las coordenadas del punto medio $M(x_m,y_m)$ entre el origen y el punto $A(6,8)$. Encuentra también la distancia desde el origen hasta M. $M(3,4)$, $|\overline{OM}|=5$ unidades.

8) Encuentra los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo cuyos vértices están sobre los puntos $A(2,1)$, $B(10,3)$ y $C(6,5)$. $M_{AC}(4,3), M_{AB}(6,2), M_{BC}(8,4)$.

9) Un estudiante estipuló: «*El triángulo con vértices en los puntos* $P(-1,2)$, $Q(2,1)$ *y* $R(2,6)$, *es isósceles.*» Verifica si tiene razón o si está equivocado, calculando las longitudes de los tres lados del triángulo. Las longitudes de los lados del triángulo son: 5, 5 y $\sqrt{10}$.

10) Calcula el área del triángulo con vérices en los puntos: $A(-1,1)$, $B(1,-1)$ y $C(3,2)$ usando la fórmula de Herón (lee el formulario de esta unidad.) 5 u^2.

11) Verifica si el cuadrilátero con vértices en los puntos $P(2,1)$, $Q(3,4)$, $R(7,4)$ y $S(6,1)$ es un paralelogramo. Sí es.

12) Calcula la longitud de las diagonales del cuadrilátero del problema anterior. Calcula también el punto medio de cada diagonal. $\overline{PR} = \sqrt{34}$ y $\overline{QS} = \sqrt{18}$. $M_{PR} = M_{QS} = (9/2, 5/2)$.

13) Los puntos medios de los lados de un triángulo $\triangle(ABC)$ son: $O(0,0)$, $P(1,2)$ y $Q(2,1)$. Calcula las coordenadas de cada vértice. $A(-1,1)$, $B(1,-1)$ y $C(3,3)$.

14) De acuerdo a la clasificación de los triángulos por la medida de sus lados, ¿qué tipo de triángulo es el del problema anterior? Isósceles.

15) Los vértices de un paralelogramo son los puntos $P(1,1)$, $Q(2,4)$, $R(6,4)$ y $S(5,1)$. Calcula la longitud de cada diagonal. **Nota.** Una diagonal es el segmento que divide al paralelogramo en dos triángulos. $\overline{QS} = 4.24$, $\overline{PR} = 5.83$.

16) Calcula el área del paralelogramo del problema anterior. **Sugerencia:** Usa la fórmula de Herón. 12 u^2.

17) Dos de los vértices de un triángulo equilátero están en los puntos $P(2,2)$ y $Q(6,2)$. Calcula las coordenadas del tercer vértice. ✌ $R(4, 2+2\sqrt{3})$ y $R(4, 2-2\sqrt{3})$.

18) El segmento de recta con extremos en los puntos: $P(-2,3)$ y $Q(4,1)$ se alarga al doble de su longitud original al agregar en ambos lados una longitud igual a la mitad de su longitud inicial. Calcula las coordenadas de los extremos del nuevo segmento. $P'(-7,7), Q'(8,-2)$.

19) El segmento de recta con extremos en los puntos: $P(-2,4)$ y $Q(3,1)$ se alarga extendiéndose en ambos lados una longitud igual a su longitud inicial. Calcula las coordenadas de los extremos del nuevo segmento. $P'(-5,4), Q'(7,0)$.

20) **Reto:** Demuestra que las longitudes de las diagonales de un rectángulo son iguales. **Sugerencia:** Considera el rectángulo con vértices en los puntos: $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,b)$ y $D(0,b)$.

21) **Reto:** ¿Existe un punto $P(x,y)$ que divida al segmento $\overline{AB}$ con $A(2,3)$ y $B(5,7)$ en la razón $r=-1$? Argumenta tu respuesta. No existe, porque no podemos dividir por cero.

22) **Reto:** Demuestra que para todo triángulo rectángulo, el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices del triángulo. **Sugerencia:** Considera los vértices del triángulo en los puntos $O(0,0)$, $A(a,0)$ y $B(0,b)$.

9.1.2 Lugares geométricos

En esta sección estudiaremos el concepto de lugar geométrico, concepto clave para el desarrollo del estudio de los conceptos de este semestre.

LUGAR GEOMÉTRICO
El conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen ciertas condiciones dadas, y solamente esos puntos, se llama el lugar geométrico de esas condiciones.

Definición 1

La curva representada por una ecuación dada (referida a un sistema de coordenadas) es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Es decir, al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación, en ésta se cumple la igualdad.

Nosotros generalmente hablaremos de la ecuación de una curva refiriéndonos a lo anterior. También frecuentemente utilizaremos las palabras «*curva*» o «*gráfica*» como sinónimo de lugar geométrico.

La geometría analítica se dedica al estudio de las propiedades algebraicas y geométricas de los lugares geométricos.

GEOMETRÍA ANALÍTICA
Es el estudio de las propiedades geométricas por medio de operaciones algebraicas sobre símbolos definidos en términos de un sistema de coordenadas. La geometría analítica también se conoce como geometría de coordenadas.

Definición 2

La idea central de la geometría analítica está basada en el concepto de lugar geométrico, en el sentido de que si conocemos cualquier punto $P(x, y)$ que pertenece al lugar geométrico dado, entonces las condiciones nos ayudan a encontrar la ecuación del lugar geométrico.

Los siguientes ejemplos aclaran esta idea.

Encuentra la ecuación de lugar geométrico cuyos puntos equidistan de los extremos del segmento $\overline{AB}$ siendo $A(-1,3)$ y $B(3,1)$.

Ejemplo 1

- Para esto necesitamos escribir de manera algebraica la condición dada en el problema.
- Sabemos que si el punto $P(x, y)$ pertenece al lugar geométrico, la distancia $\overline{AP}$ es igual a la distancia $\overline{PB}$.
- Algebraicamente, la distancia del punto A al punto P es:

$$|\overline{AP}| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$$

- Por otra parte, la distancia del punto P al punto B es:

$$|\overline{PB}| = \sqrt{(3-x)^2 + (1-y)^2}$$

- El problema nos dice que estas distancias son iguales, entonces:

$$\begin{aligned} |\overline{AP}| &= |\overline{PB}| \qquad \Rightarrow \\ \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} &= \sqrt{(3-x)^2+(1-y)^2} \end{aligned}$$

- Ahora debemos simplificar esta expresión hasta donde nos sea posible.

- Empezamos elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)^2 &= \left(\sqrt{(3-x)^2+(1-y)^2}\right)^2\\ (x+1)^2+(y-3)^2 &= (3-x)^2+(1-y)^2\end{aligned}$$

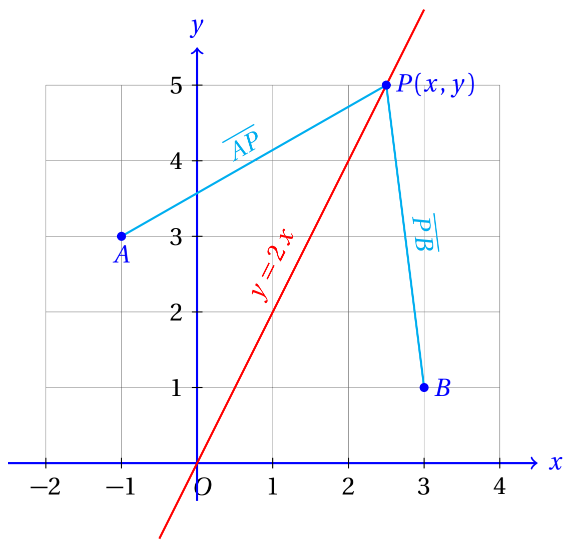
- Ahora vamos a desarrollar los binomios que aparecen elevados al cuadrado:

$$\begin{aligned}\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}-6y+\cancel{9} &= \cancel{9}-6x+\cancel{x^2}+\cancel{1}-2y+\cancel{y^2}\\ 2x-6y &= -6x-2y\end{aligned}$$

- Ahora vamos a agrupar todos los términos que tienen como factor la literal x y vamos a factorizarla.
- De manera semejante con la literal y:

$$\begin{aligned}2x+6x-6y+2y &= 0\\ 8x-4y &= 0\\ 2x-y &= 0\end{aligned}$$

- Geométricamente, tenemos la siguiente situación:



donde $\overline{AP} = \overline{PB}$.

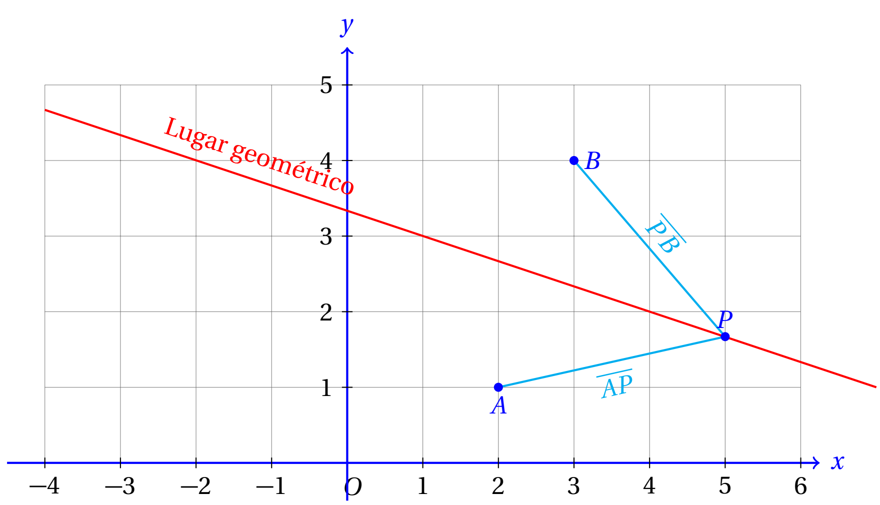
- La recta $y = 2x$ es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$. Es decir, pasa por el punto medio de los dos puntos y además es perpendicular al segmento mismo.

También podemos resolver el problema anterior de manera más general, lo cual se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Encuentra la ecuación de lugar geométrico cuyos puntos equidistan de los extremos del segmento $\overline{AB}$ siendo $A(x_a, y_a)$ y $B(x_b, y_b)$.

- Para esto necesitamos escribir de manera algebraica la condición dada en el problema.

- Sabemos que si el punto $P(x, y)$ pertenece al lugar geométrico, la distancia $\overline{AP}$ es igual a la distancia $\overline{PB}$.
- Algebraicamente, la distancia del punto A al punto P es:
$$|\overline{AP}| = \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2}$$
- Por otra parte, la distancia del punto P al punto B es:
$$|\overline{PB}| = \sqrt{(x_b - x)^2 + (y_b - y)^2}$$
- El problema nos dice que estas distancias son iguales, entonces:
$$\begin{aligned} |\overline{AP}| &= |\overline{PB}| \qquad \Rightarrow \\ \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2} &= \sqrt{(x_b - x)^2 + (y_b - y)^2} \end{aligned}$$
- Ahora debemos simplificar esta expresión hasta donde nos sea posible.
- Empezamos elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad:
$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2}\right)^2 &= \left(\sqrt{(x_b - x)^2 + (y_b - y)^2}\right)^2 \\ (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 &= (x_b - x)^2 + (y_b - y)^2 \end{aligned}$$
- Ahora vamos a desarrollar los binomios que aparecen elevados alcuadrado:
$$\begin{aligned} (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 &= (x_b - x)^2 + (y_b - y)^2 \\ x^2 - 2\,x\,x_a + x_a^2 + y^2 - 2\,y\,y_a + y_a^2 &= x_b^2 + 2\,x_b\,x + x^2 + y_b^2 + 2\,y_b\,y + y^2 \\ \cancel{x^2} - 2\,x\,x_a + x_a^2 + \cancel{y^2} - 2\,y\,y_a + y_a^2 &= x_b^2 + 2\,x_b\,x + \cancel{x^2} + y_b^2 - 2\,y_b\,y + \cancel{y^2} \\ -2\,x\,x_a + x_a^2 - 2\,y\,y_a + y_a^2 &= x_b^2 + 2\,x_b\,x + y_b^2 + 2\,y_b\,y \end{aligned}$$
- Ahora vamos a agrupar todos los términos que tienen como factor la literal x y vamos a factorizarla.
- De manera semejante con la literal y:
$$\begin{aligned} 2\,x\,x_a + 2\,x_b\,x + 2\,y_b\,y + 2\,y\,y_a + x_b^2 + y_b^2 - x_a^2 - y_a^2 &= 0 \\ (2\,x_a + 2\,x_b)\,x + \left(2\,y_a + 2\,y_b\right)\,y + x_b^2 + y_b^2 - \left(x_a^2 + y_a^2\right) &= 0 \end{aligned}$$
- Geométricamente, tenemos la siguiente situación:



donde $\overline{AP} = \overline{PB}$.

Ahora vamos a resolver un ejemplo donde no obtendremos una recta, sino una circunferencia.

Ejemplo 3 Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal manera que su distancia al punto $C(2,4)$ siempre es igual a 4. Encuentra la ecuación de este lugar geométrico.

- La distancia desde el punto $P(x, y)$ hasta el punto $C(2,4)$ siempre es 4.
- Algebraicamente esta condición se escribe:

$$4 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}$$

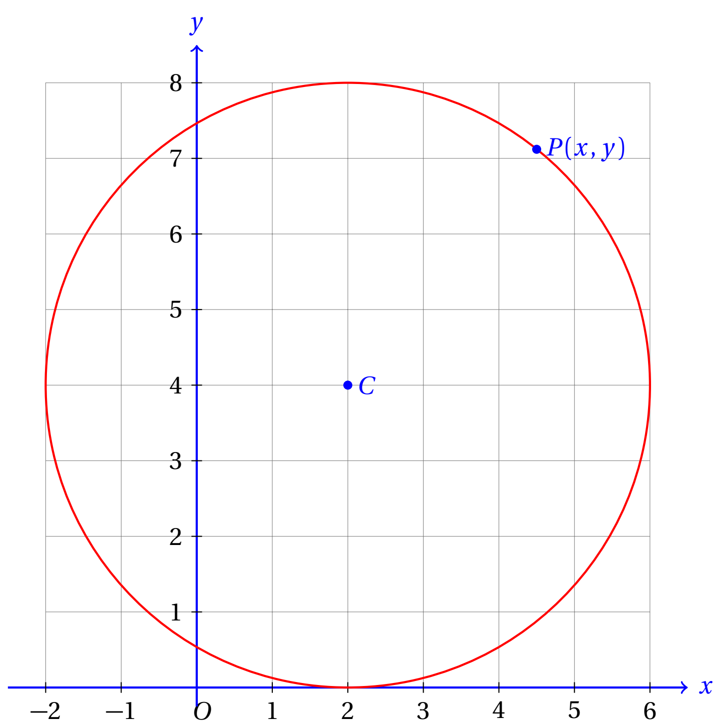
- Podemos simplificar esta expresión si elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad:

$$16 = (x-2)^2 + (y-4)^2$$

- Finalmente podemos desarrollar los binomios que quedaron indicados y simplificar la expresión:

$$\begin{aligned} 16 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 \\ x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

- La gráfica de este lugar geométrico es una circunferencia:



Cualquier punto $P(x, y)$ que esté sobre la circunferencia, estará a 4 unidades de distancia del punto $C(2,4)$.

Un punto $P(x, y)$ se mueve sobre el plano de manera que su distancia al punto $F(2,3)$ sea siempre la misma que la distancia a la recta $\ell: y+2=0$. Encuentra la ecuación que representa a este lugar geométrico.

Ejemplo 4

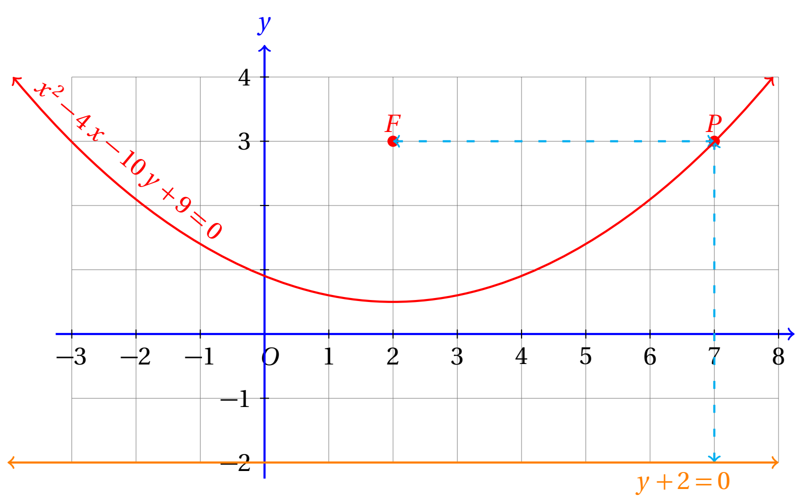
- Sabemos que el punto P está a la misma distancia de F como de la recta ℓ.
- Por otra parte, un punto que está sobre la recta $y+2=0$ tiene coordenadas $(x,-2)$, porque $y=-2$, independientemente del valor de x.
- Entonces, la condición impuesta por el lugar geométrico se representa algebraicamente como:

$$
\begin{aligned}
|\overline{PF}| &= |\ell P| \\
\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} &= \sqrt{(x-x)^2+(y-2)^2} \\
\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} &= \sqrt{(y-2)^2}
\end{aligned}
$$

- Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad para desaparecer las raíces cuadradas y después desarrollamos los binomios que están elevados al cuadrado.

$$
\begin{aligned}
(x-2)^2+(y-3)^2 &= (y-2)^2 \\
\left[x^2-4x+4\right]+\left[\cancel{y^2}-6y+9\right] &= \cancel{y^2}-6y+9 \\
x^2-4x-10y+9 &= 0
\end{aligned}
$$

- Esta es la ecuación que representa al lugar geométrico.
- Geométricamente, tenemos la siguiente situación:



Encuentra la ecuación del lugar geométrico que forma el punto $P(x, y)$ que se mueve de tal manera que su distancia del punto $A(8,0)$ siempre es el doble de la distancia al punto $B(2,0)$.

Ejemplo 5

- Del texto es claro que se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}
\text{distancia } \overline{AP} &= 2\cdot\text{distancia } \overline{BP}\\
|\overline{AP}| &= 2\,|\overline{BP}|\\
\sqrt{(8-x)^2+y^2} &= 2\sqrt{(2-x)^2+y^2}
\end{aligned}$$

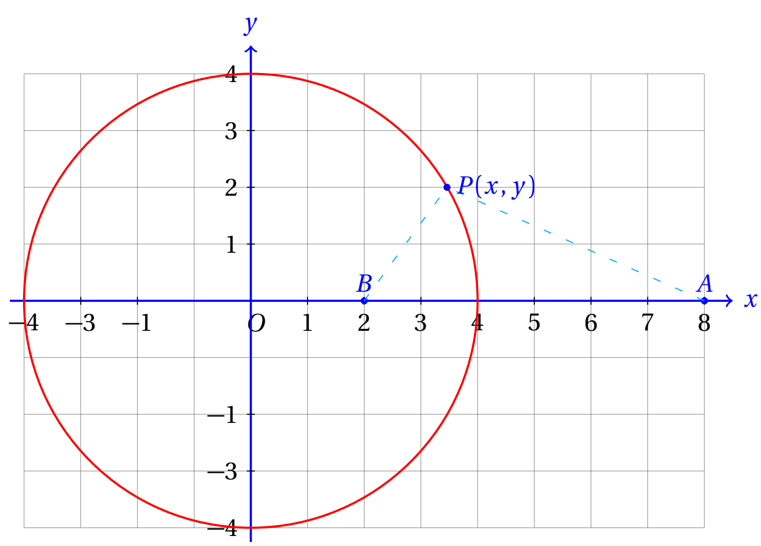
- Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$(8-x)^2+y^2=4\cdot[(2-x)^2+y^2]$$

- Podemos desarrollar los binomios al cuadrado y simplificar:

$$\begin{aligned}
(8-x)^2+y^2 &= 4\cdot[(2-x)^2+y^2]\\
64-16\,x+x^2+y^2 &= 4\cdot[4-4\,x+x^2+y^2]\\
64-\cancel{16\,x}+x^2+y^2 &= 16-\cancel{16\,x}+4\,x^2+4\,y^2\\
48 &= 3\,x^2+3\,y^2\\
x^2+y^2 &= 16
\end{aligned}$$

- Ahora nos enfrentamos al problema de visualizar el lugar geométrico.



La otra parte de la historia referente a los lugares geométricos consiste en tener una ecuación y nosotros debemos encontrar el lugar geométrico que ésta describe.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación: $2\,x+y-1=0$, nosotros debemos dibujar la gráfica de esta ecuación.

Para poder graficar de una manera rápida el lugar geométrico de una ecuación sirve apoyarnos en los siguientes conceptos.

Definición 3

SIMETRÍA RESPECTO A LOS EJES DE COORDENADAS
La gráfica de una ecuación $f(x,y)=0$ es simétrica respecto al eje x si $f(x,y)=f(x,-y)$. De manera semejante, la gráfica de la ecuación será simétrica respecto al eje y si $f(x,y)=f(-x,y)$.

Si al sustituir $-x$ en lugar de x en la ecuación y obtenemos la misma ecuación después de realizar las operaciones que han quedado indicadas, entonces la gráfica de esa ecuación es simétrica respecto al eje y.

Ejemplo 6

Grafica la siguiente ecuación:

$$y - 2x^2 = 0$$

- Primero vamos a averiguar si la gráfica de esta función es simétrica respecto a alguno de los ejes.
- Para esto, vamos a sustitur $-x$ en lugar de x y después vamos a realizar las operaciones que queden indicadas para ver si cambió la ecuación:

$$\begin{aligned} y - 2(-x)^2 &= 0 \\ y - 2x^2 &= 0 \end{aligned}$$

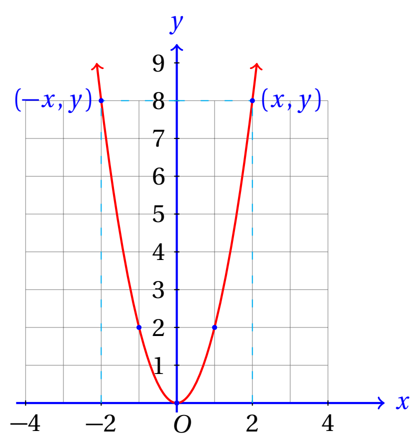
- Como la ecuación no se altera al sustituir $-x$ en lugar de x, entonces, es simétrica respecto del eje y.
- Ahora vamos a hacer lo mismo, pero ahora cambiando el signo de y en cualquier lugar que aparezca:

$$\begin{aligned} -y - 2x^2 &= 0 \\ y + 2x^2 &= 0 \end{aligned}$$

- La ecuación que obtuvimos es distinta a la ecuación que nos dieron en el problema, así que ésta no presenta simetría respecto al eje x.
- Para graficar una ecuación es una buena idea tabular valores (x, y) que satisfagan la misma.
- A continuación se muestra la gráfica de esta ecuación:

$y = 2x^2$

Punto	x	y
A	0	0
B	1	2
C	-1	2
D	2	8
E	-2	8



Definición 4

INTERSECCIÓN CON LOS EJES

El lugar geométrico de la ecuación $f(x, y) = 0$ puede intersectar a uno o a ambos ejes. Para conocer los puntos de intersección con el eje x sustituimos $y = 0$ y resolvemos para y.

De manera semejante, para conocer las intersecciones con el eje y sustituimos $x = 0$ y resolvemos para y.

Arriba del eje x, los valores de y son positivos, debajo del eje x los valores de y son negativos. Exactamente sobre el eje x los valores de y son iguales a cero. Por eso, cuando queremos encontrar los puntos donde la gráfica que representa el lugar geométrico de una ecuación corta al eje x, sustituimos $y = 0$.

De manera semejante, a la izquierda del eje y, los valores de x son negativos, y su derecha son positivos. Exactamente sobre el eje y, los valores de x son iguales a cero. Esto nos ayuda a encontrar las intersecciones de la gráfica de una ecuación.

Ejemplo 7 Verifica si el lugar geométrico de la ecuación $x^2+y^2-14x-8y=0$ es simétrico respecto de los ejes coordenados y encuentra sus intersecciones con los ejes.

- Para verificar si es simétrico respecto del eje x sustituimos $-y$ en lugar de y y verificamos si la ecuación cambia:

$$\begin{aligned} x^2+(-y)^2-14x-8(-y) &= 0\\ x^2+y^2-14x+8y &= 0 \end{aligned}$$

- Como cambió el signo del último término, no es simétrica respecto del eje x.
- Ahora verificamos si es simétrica respecto del eje y.
- Para eso, sustituimos $-x$ en lugar de x:

$$\begin{aligned} (-x)^2+y^2-14(-x)-8y &= 0\\ x^2+y^2+14x-8y &= 0 \end{aligned}$$

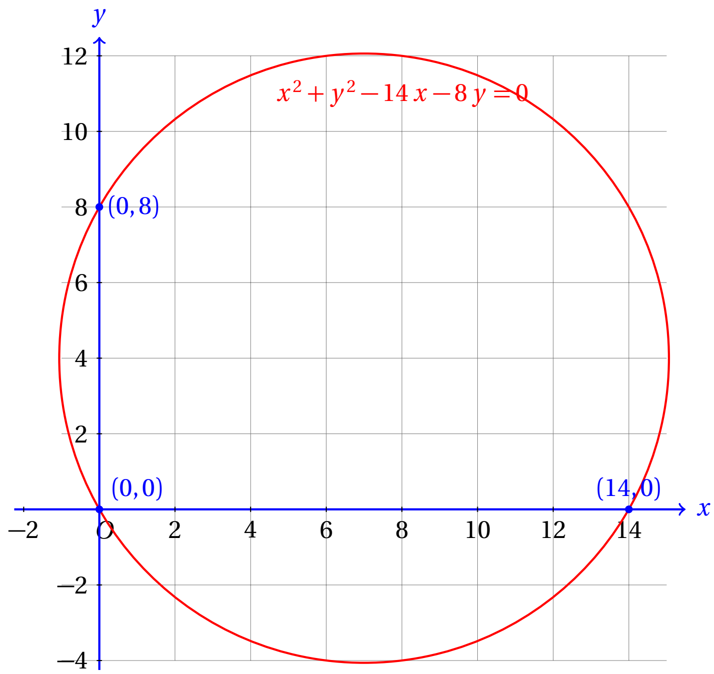
- Ahora cambió el signo del tercer término.
- Tampoco es simétrica respecto del eje y.
- Para encontrar las intersecciones del lugar geométrico con el eje x.
- Para eso sustituimos $y=0$ en la ecuación, y resolvemos para x:

$$\begin{aligned} x^2+0^2-14x-8(0) &= 0\\ x^2-14x &= 0\\ x(x-14) &= 0 \end{aligned}$$

- Por factorización, tenemos que $x=0$, y que $x=14$.
- Por lo que las intersecciones del lugar geométrico con el eje x están en los puntos: $(0,0)$ y $(14,0)$.
- Ahora vamos a encontrar las intersecciones con el eje y.
- Vamos a sustituir $x=0$ en la ecuación y resolvemos para y:

$$\begin{aligned} 0^2+y^2-14x(0)-8y &= 0\\ y^2-8y &= 0\\ y(y-8) &= 0 \end{aligned}$$

- En este caso, $y=0$ y también, $y=8$.
- Entonces, las intersecciones con el eje y están en los puntos: $(0,0)$ y $(0,8)$.
- Ahora graficamos la ecuación.



- Si sustituyes cada una de las coordenadas de los puntos de intersección deben satisfacerla ecuación.
- Esto es así porque esos puntos pertenecen a ese lugar geométrico.

Calcula la ecuación para cada uno de los siguientes lugares geométricos. De ser posible, realiza una gráfica para cada uno. **Ejercicios 9.1.2**

1) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que siempre está a la misma distancia de los puntos $O(0,0)$, $A(7,4)$. $14x-8y-65=0$

2) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera tal que su distancia al eje x siempre es igual al doble de la distancia al eje y. $y=2x$.

3) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera tal que su distancia al eje x siempre es igual al doble de la raíz cuadrada de la distancia al eje y. $y=2\sqrt{x}$.

4) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera tal que su distancia al eje x siempre es igual a la mitad del cubo de la distancia al eje y. $y=x^3/2$.

5) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que siempre está a la misma distancia de los puntos $A(-2,2)$ y $B(1,-1)$. $x-y+1=0$

6) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que siempre está a la misma distancia de los puntos $A(-1,4)$ y $B(3,2)$. $2x-y+1=0$

7) Un punto $P(x,y)$ se mueve de manera que siempre está a la misma distancia de los puntos $A(1,-1)$ y $B(3,3)$. $x+2y-4=0$

8) El punto $P(x,y)$ que se mueve de manera que su distancia al origen siempre es 1. $x^2+y^2=1$.

9) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que su distancia al punto $C(2,-1)$ siempre es igual a 7. $x^2+y^2-4x+2y-44=0$.

10) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que su distancia al punto $C(-5,2)$ siempre es igual a 3. $x^2+y^2+10x-4y+20=0.$

11) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que su distancia al punto $F(3,8)$ siempre es igual a la distancia al eje x. $x^2-6x-16y+73=0.$

12) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que su distancia al punto $F(2,5)$ siempre es igual a la distancia al eje y. $y^2-4x-10y+29=0.$

13) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que su distancia al punto $F(4,5)$ siempre es igual a la distancia a la recta $y+1=0$. $x^2-8x-12y+52=0.$

14) El punto $P(x,y)$ se mueve de manera que la suma de las distancias a los puntos $F'(0,-4)$ y $F(0,4)$ siempre es igual a 10. $144x^2+400y^2-6400x+360=0.$

15) **Reto:** Grafica el lugar geométrico que forma la ecuación: $x-y=0$.

16) **Reto:** Grafica el lugar geométrico que forma la ecuación: $x\cdot y=0$.

9.2 Rectas, segmentos y polígonos

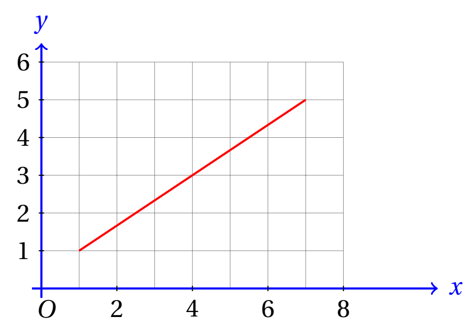
Ahora vamos a profundizar un poco más en el estudio de los segmentos.

En esta sección vamos a encontrar algunas características de los segmentos y las rectas que nos ayudarán a estudiar con mayor provecho los siguientes temas.

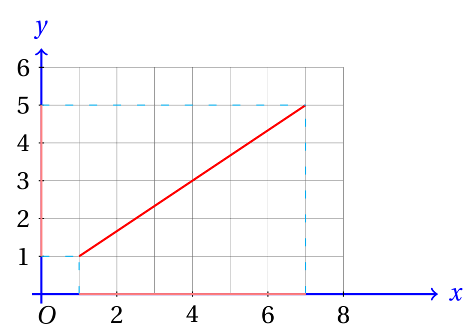
9.2.1 Segmentos Rectilíneos

Cuando consideramos un segmento rectilíneo en un sistema de coordenadas, no siempre encontraremos segmentos paralelos a alguno de los ejes.

La mayoría de las veces encontraremos segmentos con cierta inclinación. El siguiente segmento es un ejemplo de esos casos:

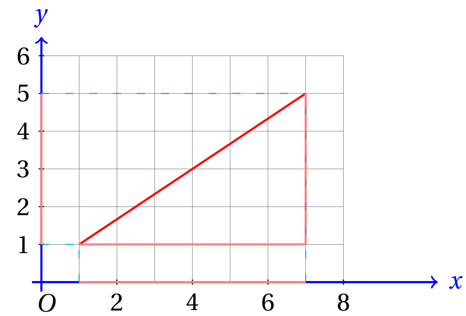


Este segmento, sin embargo, puede estudiarse de una manera más sencilla si lo descomponemos en proyecciones sobre los ejes coordenados, de la siguiente manera:



De hecho, para deducir las fórmulas que ya hemos utilizado (punto medio, distancia entre dos puntos, etc.) se deducen a partir de la descomposición que se mostró anteriormente.

Por ejemplo, para deducir la fórmula de distancia entre dos puntos, dibujamos un triángulo rectángulo, siendo las proyecciones paralelas a los ejes los catetos del triángulo y la hipotenusa el segmento inclinado, como se muestra a continuación:



Fácilmente podemos notar que la «*componente*» del segmento que es paralela al eje x mide $7-1=6$ unidades, mientras que la «*componente*» paralela aleje y mide $5-1=4$ unidades de longitud.

Para encontrar la longitud del segmento, podemos utilizar el teorema de Pitágoras, que estudiamos el semestre pasado. Recuerda que este teorema se aplica solamente a triángulos rectángulos y en este caso, nuestro triángulo es rectángulo.

Para encontrar la longitud del segmento hacemos:

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2+4^2 \\ c &= \sqrt{6^2+4^2} \end{aligned}$$

Observa que para calcular las «*componentes*» del segmento paralelas a cada eje, calculamos la diferencia de las coordenadas:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2-x_1 \\ \Delta y &= y_2-y_1 \end{aligned}$$

Y estos valores son las medidas de los catetos horizontal y vertical, en nuestro caso, del triángulo rectángulo, mientras que la diagonal es la hipotenusa.

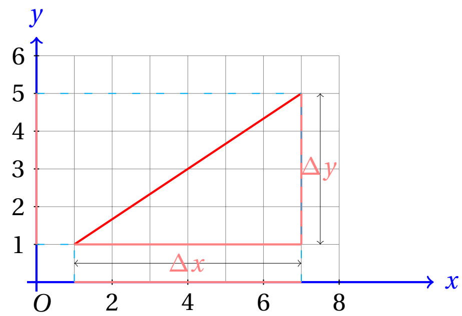
Al aplicar el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$\begin{aligned} c^2 &= (\Delta x)^2+(\Delta y)^2 \\ c &= \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{aligned}$$

que es la fórmula que utilizamos para encontrar la distancia entre los puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$. Observa que c representa la longitud de la hipotenusa, que en este caso es la longitud del segmento $\overline{PQ}$.

Entonces, si tenemos dos puntos en un segmento dirigido, podemos encontrar la distancia entre ellos calculando la diferencia entre sus coordenadas. Al valor que está más a la izquierda (o más arriba) le restamos el valor que esté más a la derecha (o abajo).

Para la diferencia de las coordenadas sobre el eje x lo denotamos por Δx y a la diferencia de las coordenadas sobre el eje y se denotan por Δy:



9.2.2 RECTAS

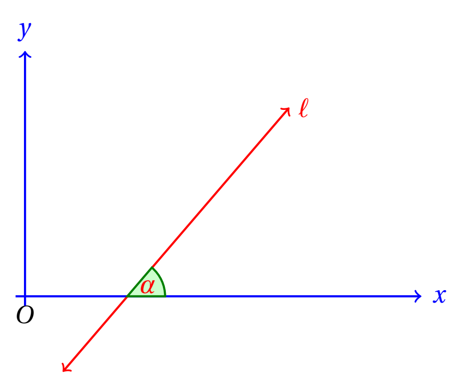
Podemos determinar de una manera única a una recta de varias formas:

- ✓ a partir de su ecuación,
- ✓ a partir de dos de sus puntos
- ✓ a partir del ángulo que forma con uno de los ejes y su distancia al origen,
- ✓ etc.

Para poder desarrollar todas estas formas, primero debemos definir algunos conceptos relacionados.

INCLINACIÓN *La inclinación de una recta es el menor ángulo positivo (medido en el sentido positivo) que ésta forma con el eje de las abscisas (x).*	**Definición 1**

El siguiente diagrama muestra la inclinación α de la recta ℓ.



Algunas veces conoceremos dos de los puntos por donde pasa la recta.

A partir de estos dos puntos siempre podremos calcular Δx y Δy.

Con estos dos valores podemos calcular otro valor que nos ayude a caracterizar la inclinación de la recta.

Definición 2

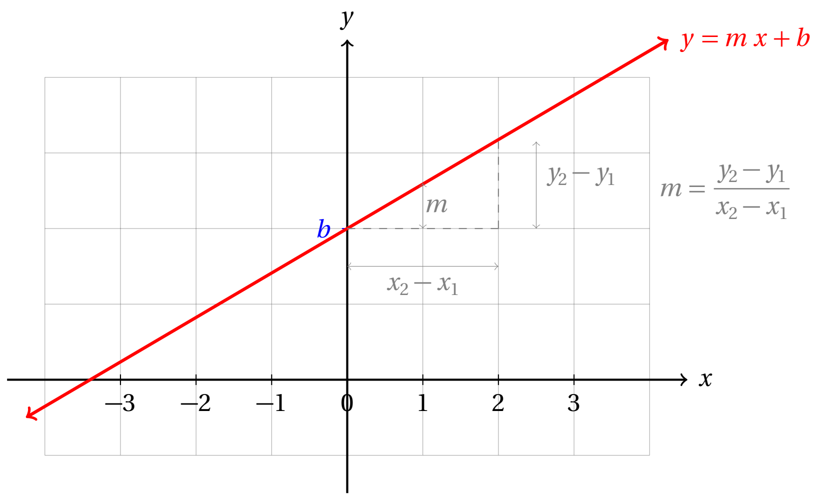
PENDIENTE

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se denota por la letra m y se calcula con la siguiente fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta es igual a la tangente de su inclinación.

Para reconocer cómo caracteriza a una recta su pendiente nos ayudará mucho la siguiente gráfica:



Ya sabemos que la pendiente m de una recta se define así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Incremento en } y}{\text{Incremento en } x}$$

¿Qué nos dice esto en palabras? Dice: "*La pendiente de una recta es igual al incremento de y entre el incremento de x*".

Ahora la pregunta importante: "*... ¿y cómo debo interpretar eso?*"

Bien, empezamos primero recordando una interpretación para la división: cuando dividimos diez entre cinco obtenemos como resultado dos; esto lo podemos interpretar de varias maneras. Por ejemplo, una interpretación correcta del resultado de la división es que $2 \times 5 = 10$.

Otra interpretación correcta, equivalente a la anterior consiste en decir que el número diez es dos veces más grande que el número cinco. Pero la interpretación que más nos ayudará para el resto del curso es la siguiente: "*por cada uno que hay en el denominador de la fracción $\frac{10}{5}$, hay dos en el numerador*"; o dicho de otra manera: para tener una fracción equivalente, o el mismo valor, por cada uno que aumentemos en el denominador, tenemos que aumentar dos en el numerador.

Esto mismo podemos generalizarlo y aplicarlo a la fórmula para calcular la pendiente. En este caso, la interpretación dice: "*por cada uno que incrementamos en x, hay que incrementar m en y*". Así, la pendiente nos dice cuánto debemos subir (en la dirección del eje y) por cada unidad que avancemos hacia la derecha (en la dirección del eje x).

En otras palabras, la pendiente m de una recta es igual a la razón de los incrementos de las ordenadas Δy respecto de las abscisas Δx de dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ que se encuentren sobre la recta.

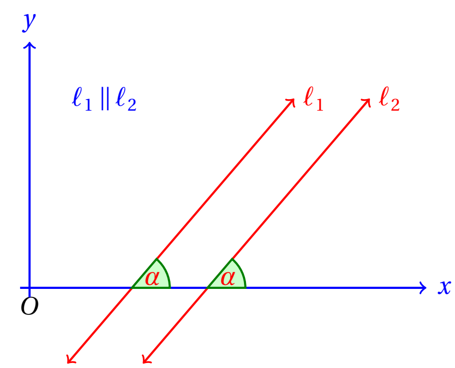
Es importante notar que no podemos definir la pendiente de una recta para la cual $x_2 = x_1$ independientemente de los puntos que elijamos. Es decir, no está definida la pendiente de una recta vertical. Esto es así porque en ese caso, $x_2 - x_1 = 0$ y tendremos división por cero. Algo que no está definido.

Sin embargo, sí es posible definir la pendiente de la recta para la cual $y_2 - y_1 = 0$ para cualesquiera dos puntos que elijamos sobre la recta. En este caso, $m = 0$.

A partir de la definición de pendiente podemos darnos cuenta de manera intuitiva que dos rectas con la misma inclinación, es decir, paralelas, deben tener la misma pendiente.

Esto es así porque para que las rectas no se corten por cada unidad que se avance en el eje x en ambas rectas deben subir la misma cantidad. De otra manera se cortaría en algún punto.

Si dos rectas son paralelas sus pendientes son iguales y recíprocamente, si dos rectas tienen sus pendientes iguales son paralelas. **Teorema 1**



Si dos rectas son tienen la misma pendiente, debemos subir en el sentido del eje y la misma cantidad por cada unidad en el sentido del eje x que avancemos. Por eso son paralelas.

Condición de paralelismo:
Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas ℓ_1 y ℓ_2, entonces, $m_1 = m_2$ implica que $\ell_1 \parallel \ell_2$. **Comentario**

Si recuerdas, la tangente de un ángulo que se mide en un triángulo rectángulo se calcula con la razón del cateto opuesto entre el cateto adyacente. En el caso de la notación que hemos estado utilizando, tenemos:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Utilizando esta definición y algunas propiedades de las funciones trigonométricas, podemos mostrar todavía más propiedades de las rectas.

Si aprovechamos el hecho de que $m = \tan\alpha$, podemos demostrar propiedades que sería difícil demostrar solamente con el uso de las coordenadas.

Por ejemplo, el siguiente teorema, que no es para nada evidente.

Si dos rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra recta y recíprocamente. **Teorema 2**

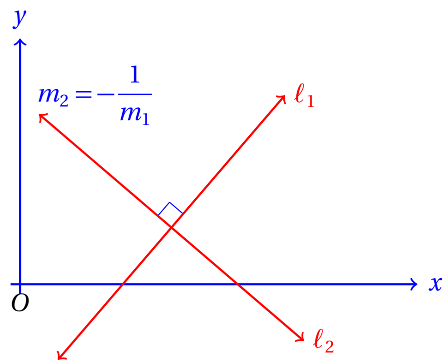
Si ninguna de las rectas es vertical, y α_1 es la inclinación de una, se sigue que $\alpha_2 = \alpha_1 + 90$ es la inclinación de la otra, y se tiene que,

$$\begin{aligned} m_2 &= \tan\alpha_2 = \tan(\alpha_1 + 90) \\ &= -\frac{1}{\tan\alpha_1} = -\frac{1}{m_1} \end{aligned}$$

■

La demostración de este teorema requiere del uso de las funciones trigonométricas, así que si no recuerdas bien las definiciones posiblemente te ocasione confusión.

Igual es una buena idea repasar los conceptos del semestre pasado, las definiciones de las funciones trigonométricas y sus propiedades.



Comentario

Condición de perpendicularidad:

Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas ℓ_1 y ℓ_2, entonces, $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ implica que $\ell_1 \perp \ell_2$.

Observa que en caso de que $m_1 = 0$, tenemos que la pendiente de la recta ℓ_2 no está definida, dado que es vertical. Lo mismo ocurre en el caso de que $m_2 = 0$. Entonces, m_1 no estará definida.

En cualquier otro caso, podemos utilizar esta fórmula para calcular la pendiente m_2 de la recta ℓ_2 a partir de la pendiente m_1 de la recta ℓ_1 sabiendo que $\ell_1 \perp \ell_2$.

Igualmente, podemos encontrar una fórmula para calcular el menor ángulo que se forma entre dos rectas que se cortan.

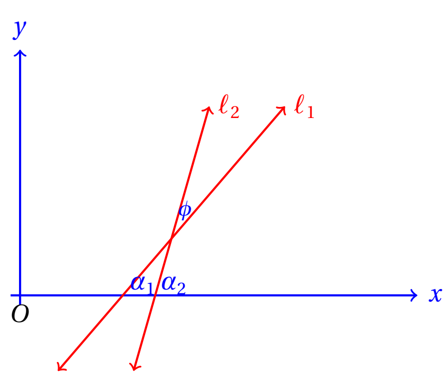
Teorema 3

Si ϕ es el ángulo (medido en contra de las manecillas del reloj) formado entre dos rectas ℓ_1, ℓ_2, cuyas pendientes son m_1 y m_2, respectivamente, entonces,

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

donde m_1 es la pendiente de la recta que sirve de lado inicial del ángulo y m_2 es la pendiente de la recta que sirve de lado terminal del ángulo.

Considerando la siguiente figura:



vemos que: $\phi + \alpha_1 = \alpha_2$, o bien, $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$.
Podemos utilizar la fórmula de la tangente de la diferencia de dos ángulos:

$$\tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2}$$

Pero, $m_1 = \tan\alpha_1$, y $m_2 = \tan\alpha_2$. Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior, obtenemos:

$$\tan(\phi) = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

■

Esta fórmula no puede ser aplicada en el caso de una recta vertical, porque una recta vertical no tiene definida su pendiente.

No te preocupes por el momento porque no hemos mostrado ejemplos del uso de estos conceptos y fórmulas.

En la siguiente sección tendremos suficientes ejemplos para que logres entender estas ideas.

9.2.3 Polígonos

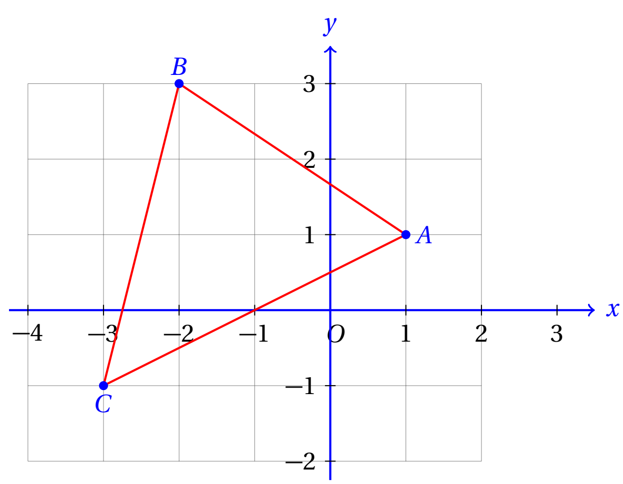
En esta sección vamos a utlizar las fórmulas que ya conocemos para calcular perímetros y áreas de polígonos.

Para esto es una buena idea recordar las fórmulas de áreas de los polígonos.

Ejemplo 1

Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $A(1,1)$, $B(-2,3)$ y $C(-3,-1)$.

- Empezamos graficando los puntos y dibujando el triángulo:



- Para encontar el área del triángulo utilizaremos la fórmula de Herón:

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$$

  donde a, b, c son las longitudes de los lados del triángulo y p es su semiperímetro.

- Entonces, debemos primero calcular las longitudes de los lados del triángulo.

- Empezamos calculando las longitudes de cada uno de los lados del triángulo:

$$\begin{array}{rcl} |\overline{AB}| & = & \sqrt{(-2-1)^2+(3-1)^2} \\ & = & \sqrt{9+4}=\sqrt{13}\approx 3.6055 \\ |\overline{BC}| & = & \sqrt{(-3-(-2))^2+(-1-3)^2} \\ & = & \sqrt{1+16}=\sqrt{17}\approx 4.1231 \\ |\overline{AC}| & = & \sqrt{(-3-1)^2+(-1-1)^2} \\ & = & \sqrt{16+4}=\sqrt{20}\approx 4.4721 \end{array}$$

- Ahora calculamos el valor de p:

$$p=\frac{3.6055+4.1231+4.4721}{2}=6.10035$$

- Ahora sustitumos los valores en la fórmula de Herón:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)} \\ & = & \sqrt{(6.10035)(6.10035-3.6055)(6.10035-4.1231)(6.10035-4.4721)} \\ & = & \sqrt{(6.10035)(2.498)(1.9804)(1.6314} \\ & = & \sqrt{49.2589}\approx 7.01846 \end{array}$$

- Debido a que utilizamos aproximaciones de las raíces, hemos obtenido una aproximación al verdadero valor del área.
- El área del triángulo es exactamente 7 unidades cuadradas.
- El siguiente reto pide calcular el área del triángulo a partir de sus coordenadas de manera exacta.

Reto 1 Calcular el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $A(1,1)$, $B(-2,3)$ y $C(-3,-1)$ dibujando otros triángulos alrededor de éste para formar un cuadrilátero.

Para calcular el área de un polígono de varios lados no existe una fórmula como la de Herón para calcular el área a partir de las longitudes de sus lados.

Sin embargo, siempre que tengamos un polígono, podemos formar triángulos dentro de este polígono y calcular las áreas de cada uno de los triángulos internos al polígono. El área del polígono será igual a la suma de las áreas de todos los triángulos internos.

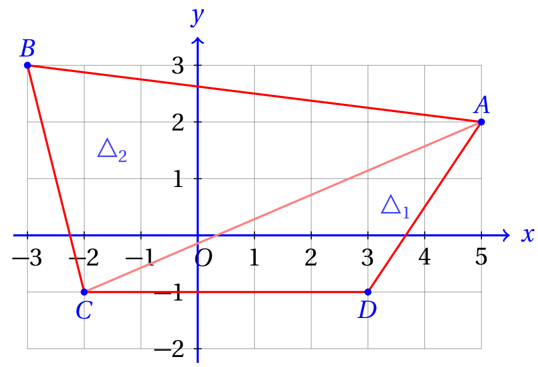
El problema consiste en que cada vez tenemos que calcular más longitudes, porque ahora no solamente debemos calcular las longitudes de los lados, sino también de las diagonales que se requieran para cubrir todo el polígono con triángulos.

Dado que nosotros solamente tenemos fórmulas para calcular el área del triángulo, solamente podemos utilizar ese artificio.

Igual, podemos calcular el área utilizando el procedimiento utilizado para resolver el reto anterior.

Ejemplo 2 Calcula el área del cuadrilátero que tiene sus vértices en los puntos $A(5,2)$, $B(-3,3)$, $C(-2,-1)$ y $D(3,-1)$.

- Vamos a dibujar el cuadrilátero y también vamos a trazar una de sus diagonales para formar dos triángulos internos.



- Al sumar el área de los dos triángulos internos obtenemos el área del cuadrilátero.
- Vamos a calcular las longitudes de los lados del cuadrilátero y de su diagonal:

$$\begin{aligned}
|\overline{AB}| &= \sqrt{(-3-5)^2+(3-2)^2}\\
&= \sqrt{64+1}=\sqrt{65}\approx 8.062257\\
|\overline{BC}| &= \sqrt{(-2-(-3))^2+(-1-3)^2}\\
&= \sqrt{1+16}=\sqrt{17}\approx 4.1231\\
|\overline{CD}| &= \sqrt{(-3-(-2))^2+(-1-(-1))^2}\\
&= \sqrt{25}=5\\
|\overline{AD}| &= \sqrt{(3-5)^2+(-1-2)^2}\\
&= \sqrt{4+9}=\sqrt{13}\approx 3.60555\\
|\overline{AC}| &= \sqrt{(-2-5)^2+(-1-2)^2}\\
&= \sqrt{49+9}=\sqrt{58}\approx 7.61577
\end{aligned}$$

- Encontramos el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $A(5,2)$, $B(-3,3)$ y $C(-2,-1)$.
- Primero calculamos el semiperímetro del triángulo:

$$p=\frac{8.062257+4.1231+7.61577}{2}=9.9005635$$

- Sustituimos las longitudes de los lados en la fórmula de Herón:

$$\begin{aligned}
A_{\triangle_1} &= \sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}\\
&= \sqrt{(9.9005635)(1.8383)(5.77746)(2.28479)}\\
&= \sqrt{240.2478653}\approx 15.49993
\end{aligned}$$

- Ahora debemos calcular el área del otro triángulo.
- Empezamos calculando su semiperímetro:

$$p=\frac{7.61577+5+3.60555}{2}=8.11066$$

- Sustituimos en la fórmula de Herón:

$$\begin{aligned}
A_{\triangle_2} &= \sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}\\
&= \sqrt{(8.11066)(0.494883)(3.11066)(4.50511)}\\
&= \sqrt{56.24924}\approx 7.49995
\end{aligned}$$

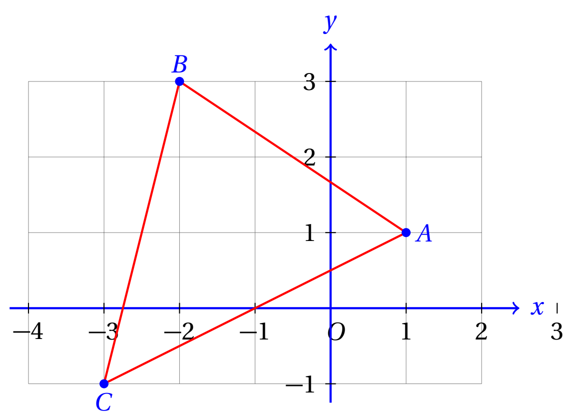
- Y la suma de las áreas de los dos triángulos es: $15.49993+7.49995=22.99988$ unidades cuadradas, aproximadamente.
- Verifica que el área exacta del cuadrilátero es 23 unidades dibujando triángulos alrededor del cuadrilátero para formar un rectángulo.

Las fórmulas que hemos encontrado en secciones anteriores nos ayudarán a describir todavía mejor los polígonos.

Por ejemplo, podemos encontrar los ángulos internos de un polígono o indicar la inclinación de sus lados.

Ejemplo 3 Calcula la medida de los ángulos internos del triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $A(1,1)$, $B(-2,3)$ y $C(-3,-1)$.

- Ya encontramos el área de este triángulo en el primer ejemplo de esta sección.
- Ahora vamos a encontrar sus ángulos internos.
- Para eso, vamos a utilizar las fórmulas de:
  - ✓ Pendiente:
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
  - ✓ Ángulo entre dos rectas:
$$\tan\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}$$
- Empezamos calculando las pendientes de los lados del triángulo.



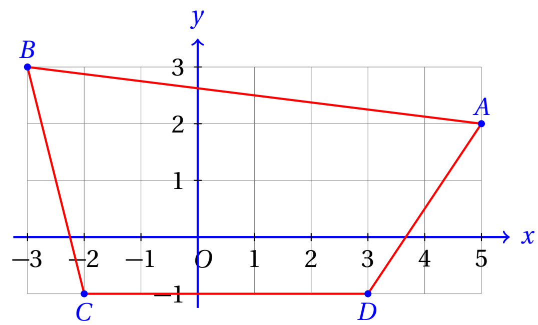
- Para el lado $\overline{AB}$, tenemos:
$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ m_{\overline{AB}} &= \frac{3-1}{-2-1}=-\frac{2}{3} \end{aligned}$$
- Para el lado $\overline{BC}$, tenemos:
$$m_{\overline{BC}}=\frac{-1-3}{-3-(-2)}=\frac{-4}{-1}=4$$

- Para el lado $\overline{AC}$, tenemos:
$$m_{\overline{AC}} = \frac{-1-1}{-3-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$
- Ahora calculamos los ángulos internos del triángulo.
- Empezamos con el ángulo que se forma con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
- Recuerda que debemos medir el ángulo en contra de las manecillas del reloj.
- En este caso, $m_1 = m_{AB} = -2/3$ y $m_2 = m_{AC} = 1/2$.
$$\begin{aligned}\tan\phi_A &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\\ &= \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\left(\frac{7}{6}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{7}{4}\end{aligned}$$
- Ahora podemos calcular el ángulo, utilizando la función arctan:
$$\tan\phi_A = \frac{7}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi_A = 60^{\circ}\, 15'\, 18.43''$$
- Enseguida calculamos el ángulo formado por los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.
- En este caso, $m_1 = m_{BC} = 4$ y $m_2 = m_{AB} = -2/3$.
- Ahora sustituimos en la fórmula:
$$\begin{aligned}\tan\phi_B &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\\ &= \frac{\frac{-2}{3} - 4}{1 + 4 \cdot \frac{-2}{3}} = \frac{-\left(\frac{14}{3}\right)}{1 - \frac{8}{3}}\\ &= \frac{-\left(\frac{14}{3}\right)}{-\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{\left(\frac{14}{3}\right)}{\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{14}{5}\end{aligned}$$
- Y el ángulo interno mide:
$$\tan\phi_B = \frac{14}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi_B = 70^{\circ}\, 20'\, 46.23''$$
- El último ángulo podemos calcularlo recordando que la suma de los tres ángulos internos del triángulo es igual a 180°:
$$\begin{aligned}180 &= 60^{\circ}\, 15'\, 18.43'' + 70^{\circ}\, 20'\, 46.23'' + \phi_C\\ 180 &= 130^{\circ}\, 36'\, 4.66'' + \phi_C\\ \phi_C &= = 180 - 130^{\circ}\, 36'\, 4.66'' = 49^{\circ}\, 23' 55.34''\end{aligned}$$
- Verifica que el ángulo ϕ_C mide $35^{\circ}\, 35'\, 57.2''$ aplicando la fórmula:
$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Ejemplo 4

Calcula la inclinación de cada uno de los lados del cuadrilátero que tiene sus vértices en los puntos $A(5,2)$, $B(-3,3)$, $C(-2,-1)$ y $D(3,-1)$.

- En el segundo ejemplo de esta sección calculamos el área de este cuadrilátero.
- Ahora vamos a calcular el ángulo que forma cada lado con el eje x.



- Para eso, utilizaremos la fórmula de pendiente y el hecho de que, si α es el menor ángulo que se forma entre una recta con pendiente m y el eje x, se cumple que: $m = \tan\alpha$.
- Iniciamos calculando las pendientes de todos los lados:

$$
\begin{aligned}
m_{\overline{AB}} &= \frac{3-2}{-3-5} = -\frac{1}{7} \qquad \Rightarrow\\
\alpha_{\overline{AB}} &= \arctan\left(-\frac{1}{7}\right) = 171^{\circ}\,52'\,11.63\\
m_{\overline{BC}} &= \frac{-1-3}{-2-(-3)} = \frac{-4}{1} = -4 \qquad \Rightarrow\\
\alpha_{\overline{BC}} &= \arctan(-4) = 104^{\circ}\,2'\,10.48\\
m_{\overline{CD}} &= \frac{-1-(-1)}{-3-(-2)} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \Rightarrow\\
\alpha_{\overline{CD}} &= \arctan(0) = 0^{\circ}\\
m_{\overline{AD}} &= \frac{3-5}{-1-2} = \frac{-2}{-3} \qquad \Rightarrow\\
\alpha_{\overline{AD}} &= \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33^{\circ}\,41'\,24.24
\end{aligned}
$$

Observa que el segmento $\overline{CD}$ que es paralelo al eje x tiene pendiente igual a cero.

Esto es así porque independientemente del incremento que demos a x, Δy siempre será igual a cero. Es decir, ni subimos ni bajamos conforme nos movemos sobre la recta que tiene una pendiente $m = 0$.

Ejemplo 5

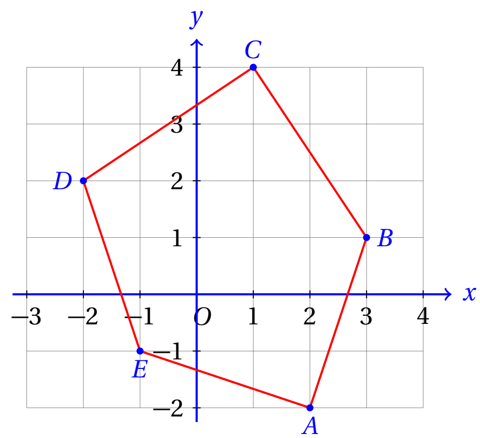
Del pentágono con vértices en los puntos $A(2,-1)$, $B(3,1)$, $C(1,4)$, $D(-2,2)$ y $E(-1,-1)$, calcula:

✓ Su perímetro.

✓ Las pendientes de todos sus lados.

✓ Sus ángulos internos.

- Empezamos dibujando el pentágono:



- Empezamos calculando las longitudes de todos sus lados para calcular el perímetro:

$$\begin{aligned}
|\overline{AB}| &= \sqrt{(3-2)^2+(1-(-1))^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\\
|\overline{BC}| &= \sqrt{(1-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\\
|\overline{CD}| &= \sqrt{(-2-1)^2+(2-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}\\
|\overline{DE}| &= \sqrt{(-1-(-2))^2+(-1-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}\\
|\overline{AD}| &= \sqrt{(-1-2)^2+(-1-(-2))^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}
\end{aligned}$$

- Ahora calcularemos las pendientes de sus lados.
- Pero vamos a intentar hacer uso de la interpretación geométrica de la pendiente:
- Escribiremos el incremento en y dividido por el incremento en x y esa fracción será la pendiente:

$$\begin{aligned}
m_{\overline{AB}} &= \frac{3}{1} = 3\\
m_{\overline{BC}} &= \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}\\
m_{\overline{CD}} &= \frac{2}{3}\\
m_{\overline{DE}} &= \frac{-3}{1} = -3\\
m_{\overline{AE}} &= \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

- Ahora identifica qué lados del pentágono son perpendiculares entre sí a partir de los valores de sus pendientes y de la condición algebraica de perpendicularidad.
- Finalmente, vamos a calcular los ángulos internos del pentágono.

$$\begin{aligned}
\tan\phi_A &= \frac{m_{AE}-m_{AB}}{1+m_{AB}\cdot m_{AE}}\\
&= \frac{-1/3-3}{1+3\cdot(-1/3)} = \frac{-4/3}{0}
\end{aligned}$$

- Dado que $\tan\phi_A$ no está definida, concluimos que $\phi_A = 90^{\rm o}$.
- Continuamos calculando el siguiente ángulo:

$$\begin{aligned}\tan\phi_B &= \frac{m_{AB} - m_{BC}}{1 + m_{BC}\cdot m_{AB}}\\ &= \frac{3-(-3/2)}{1+(-3/2)(3)} = \frac{9/2}{-7/2} = -9/7\\ \phi_B &= \arctan(-\frac{9}{7}) = 127^{\rm o}\,52'\,29.94''\end{aligned}$$

- El ángulo ϕ_C se te queda como ejercicio.
- Continuamos con el ángulo ϕ_D:

$$\begin{aligned}\tan\phi_D &= \frac{m_{CD} - m_{DE}}{1 + m_{DE}\cdot m_{CD}}\\ &= \frac{2/3-(-3)}{1+(-3)(2/3)} = \frac{8/3}{-1} = -8/3\\ \phi_D &= \arctan(-\frac{8}{3}) = 110^{\rm o}\,33'\,21.76''\end{aligned}$$

- Finalmente, calculamos el ángulo ϕ_E:

$$\begin{aligned}\tan\phi_D &= \frac{m_{DE} - m_{AE}}{1 + m_{AE}\cdot m_{DE}}\\ &= \frac{-1/3-(-3)}{1+(-3)(-1/3)} = \frac{-10/3}{2} = -5/3\\ \phi_D &= \arctan(-\frac{5}{3}) = 120^{\rm o}\,57'\,49.52''\end{aligned}$$

- Se te queda como ejercicio calcular, para este pentágono:
  - ✓ Las longitudes de todas sus diagonales.
  - ✓ Su área.

Ejercicios 9.2

Para cada ejercicio, los puntos son los vértices de distintos polígonos. Para cada uno de ellos calcula: su perímetro, área, las pendientes de todos sus lados, inclinación de cada uno de sus lados y sus ángulos internos.

1) Triángulo con vértices en: $A(1,-2)$, $B(4,1)$ y $C(-3,3)$.
Determina además qué tipo de triángulo es, de acuerdo a la medida de sus ángulos. **Soluciones:**

- ✓ Perímetro: 17.93 unidades.
- ✓ Área: 13.50 unidades cuadradas.
- ✓ $m_{AB} = 1$, $m_{BC} = -1/7$, $m_{CD} = -1$.
- ✓ $\alpha_{AB} = 45^{\rm o}$, $\alpha_{BC} = 171^{\rm o}\,52'\,11.63''$, $\alpha_{CD} = 135$.
- ✓ $\phi_A = 53.1^{\rm o}$, $\phi_B = 82.9^{\rm o}$, $\phi_C = 36.9^{\rm o}$.
- ✓ Clasificación: Triángulo rectángulo.

2) Cuadrilátero con vértices en: $A(4,-3)$, $B(3,4)$, $C(-1,3)$ y $D(-3,-1)$.
Soluciones:

- ✓ Perímetro: 22.95 unidades.
- ✓ Área: 30.50 unidades cuadradas.
- ✓ $m_{AB} = -1/7$, $m_{BC} = 1/4$, $m_{CD} = -1/2$, $m_{AD} = -2/7$.
- ✓ $\alpha_{AB} = 171^{o}\,52'11.63''$, $\alpha_{BC} = 14^{o}\,2'\,10.48''$, $\alpha_{CD} = 153^{o}\,26'5.82''$, $\alpha_{AD} = 164^{o}\,3'\,16.57''$,
- ✓ $\phi_A = 65.9^{o}$, $\phi_B = 84.1^{o}$, $\phi_C = 130.6^{o}$, $\phi_D = 79.4^{o}$.

3) Pentágono con vértices en: $A(3,-1)$, $B(4,2)$, $C(-1,3)$, $D(2,0)$ y $E(1,-2)$.
Soluciones:

- ✓ Perímetro: 17.27 unidades.
- ✓ Área: 19.50 unidades cuadradas.
- ✓ $m_{AB} = 3$, $m_{BC} = -1/5$, $m_{CD} = 3$, $m_{DE} = -2/3$, $m_{AE} = 1/2$.
- ✓ $\alpha_{AB} = 71^{o}\,33'54.18''$, $\alpha_{BC} = 168^{o}\,41'\,24.24''$, $\alpha_{CD} = 71^{o}\,33'54.18''$, $\alpha_{DE} = 146^{o}\,18'\,35.76''$, $\alpha_{AE} = 26^{o}\,33'\,54.18''$.
- ✓ $\phi_A = 135^{o}$, $\phi_B = 82.9^{o}$, $\phi_C = 97.1^{o}$, $\phi_D = 105.3^{o}$, $\phi_E = 119.7^{o}$.

Formulario

Unidad Nueve

Distancia entre dos puntos: La longitud D del segmento $\overline{PQ}$ siendo $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$, es:

$$D = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$$

Punto de división: Las coordenadas del punto $M(x_m, y_m)$ que divide al segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$, en la razón r son:

$$x_m = \frac{r\,x_q + x_p}{1+r} \qquad\qquad y_m = \frac{r\,y_q + y_p}{1+r}$$

Punto medio: Las coordenadas del punto medio $M(\bar{x}, \bar{y})$ del segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$, son:

$$\bar{x} = \frac{x_q + x_p}{2} \qquad\qquad \bar{y} = \frac{y_q + y_p}{2}$$

Pendiente: La pendiente m de la recta pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Condición de paralelismo: Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas ℓ_1 y ℓ_2, entonces, $m_1 = m_2$ implica que $\ell_1 \parallel \ell_2$.

Condición de perpendicularidad: Si m_1 y m_2 son las pendientes de dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 perpendiculares ($\ell_1 \perp \ell_2$), entonces,

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Ángulo entre dos rectas: Si ϕ es el ángulo entre las rectas ℓ_1, ℓ_2, con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Fórmula de Herón: El área del triángulo con lados de longitud a, b, c, respectivamente y semiperímetro p es:

$$A = \sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Nota: El semiperímetro es igual a la mitad del perímetro:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Capítulo 10

La línea recta

Por aprender...

Por qué es importante...

En la construcción de planos arquitectónicos, en el diseño de nuevas máquinas, etc., siempre encontramos ecuaciones que deben pasar por dos puntos o que deben tener una cierta inclinación, además, las ecuaciones de rectas sirven para modelar algunas aplicaciones que ya hemos estudiado previamente y muchas más que estudiaremos más adelante.

10.1 Ecuaciones y propiedades de la recta

En esta sección estudiaremos la caracterización de la recta desde el punto de vista algebraico.

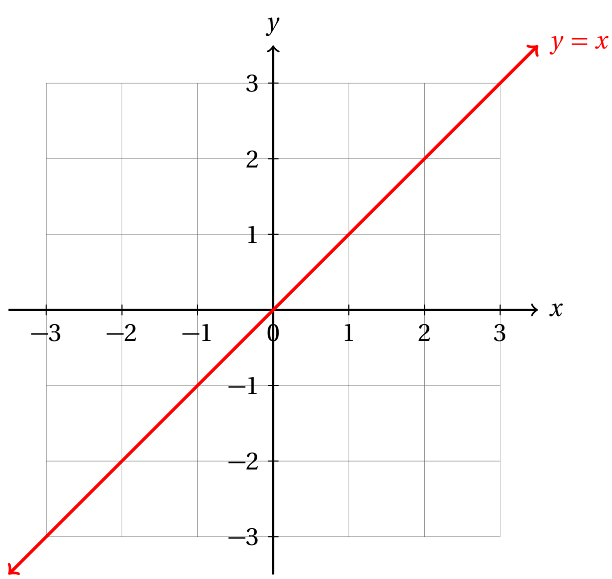
A partir del concepto de pendiente podremos entender mejor lo que nos dice en palabras la ecuación de una recta.

10.1.1 Forma punto-pendiente

Empezaremos a estudiar la ecuación de la recta a partir de la forma más sencilla.

Grafica la recta con ecuación: $y = x$. **Ejemplo 1**

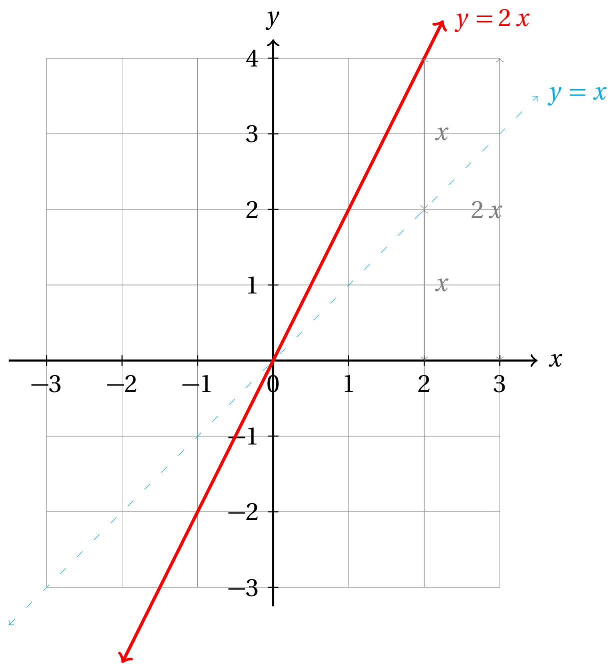
- La gráfica de esta ecuación es inmediata.
- En realidad no requerimos tabular distintos valores de x y calcular los valores de y.
- La gráfica de esta ecuación forma un ángulo de 45° con ambos ejes:



- En la gráfica se observa claramente que a cada valor de x le corresponde un valor de y.

Grafica la ecuación: $y = 2x$. **Ejemplo 2**

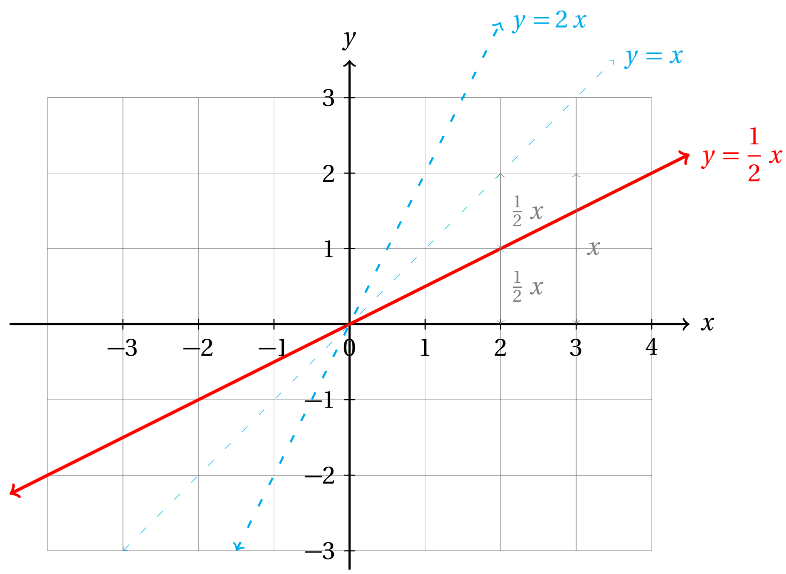
- Esta ecuación en palabras dice: "*al valor que me des de x lo multiplicaré por 2, y ese valor se lo asignaré a la variable y*.



- Al comparar las dos gráficas, vemos que esta gráfica tiene distinta inclinación que la anterior, y por tanto, distinta pendiente.

Ejemplo 3 Grafica la ecuación: $y = \frac{1}{2}\,x$.

- La gráfica de esta ecuación es el reflejo de: $y = 2\,x$ respecto a la recta: $y = x$.



- En el ejemplo anterior el coeficiente de x era 2, los valores de y siempre eran el doble de los valores de x.

- En este caso el coeficiente de x es $1/2$, esto causa que los valores de y siempre sean la mitad de los valores correspondientes de x.

Para determinar de manera única una recta necesitamos dos condiciones.

En este caso, las condiciones serán: (**1**) las coordendas de un punto y (**2**) la pendiente de la recta.

Definición 1

ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU FORMA PUNTO-PENDIENTE

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y que tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Debido a que esta ecuación se encuentra a partir de esos datos se conoce como la ecuación en la forma punto-pendiente.

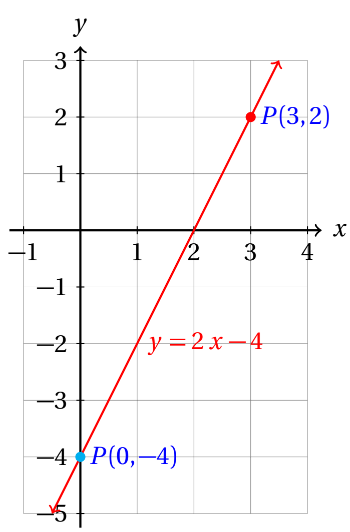
Ejemplo 4

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,2)$ con pendiente $m = 2$.

- Para encontrar la ecuación de la recta sustituimos los valores de los datos conocidos:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 2 &= 2\,(x - 3) \\ y - 2 &= 2\,x - 6 \\ y &= 2\,x - 4 \end{aligned}$$

- Ahora graficamos la recta.



- Observa que si $x = 0$, entonces, $y = -4$.
- Además, $m = 2$, por lo que por cada unidad que avancemos en la dirección del eje x debemos subir 2 en la dirección del eje y.

Ejemplo 5

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,5)$ con pendiente $m = 2$.

- Aquí usaremos la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.
- Sabemos, para empezar que la pendiente $m = 2$, y que pasa por el punto $A(2,5)$. Sustituimos estos datos en la ecuación:

$$\begin{array}{rcl} y - y_1 & = & m\,(x - x_1) \\ y - 5 & = & 2\,(x - 2) \\ y & = & 2\,x - 4 + 5 \end{array}$$

- Esto resulta ser: $y = 2\,x + 1$.
- Ahora grafica la recta.

Ejemplo 6 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,5)$ con pendiente $m = 2$.

- Aquí usaremos la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.
- Sabemos, para empezar que la pendiente $m = 2$, y que pasa por el punto $A(2,5)$. Sustituimos estos datos en la ecuación:

$$\begin{array}{rcl} y - y_1 & = & m\,(x - x_1) \\ y - 5 & = & 2\,(x - 2) \\ y & = & 2\,x - 4 + 5 \end{array}$$

- Esto resulta ser: $y = 2\,x + 1$.
- Observa que si $x = 0$, entonces $y = 1$.
- Ahora grafica la recta.

Ejemplo 7 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0,-5)$ con pendiente $m = 3$.

- Aquí usaremos la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.
- Sustituimos los datos en la ecuación:

$$\begin{array}{rcl} y - y_1 & = & m\,(x - x_1) \\ y - (-5) & = & 3\,(x - 0) \\ y + 5 & = & 3\,x \\ y & = & 3\,x - 5 \end{array}$$

- Observa que en este caso, si $x = 0$, $y = -5$
- Se te queda como ejercicio graficar la recta.

Ejemplo 8 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(3,4)$.

- Este problema es distinto de los ejemplos que hemos estudiado.
- Para resolverlo, primero intentaremos reducirlo a un problema parecido a alguno de los que ya hemos resuelto.
- Para este fin, primero debemos conocer la pendiente.
- Porque dado un punto por el cual pasa una recta (conocemos dos, tendremos que elegir un punto de entre los dos) y la pendiente de la misma, podremos utilizar la ecuación en su forma punto-pendiente y finalmente obtendremos su ecuación.
- Primero, utilizamos la fórmula para calcular la pendiente de una recta conocidos dos puntos por los que pasa.
- Conocemos dos puntos por los cuales pasa la recta: $A(1,2)$ y $B(3,4)$.
- Con estos datos calculamos su pendiente:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{4-2}{3-1} \\ &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

- Ahora que conocemos la pendiente, podemos utilizar la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente, ya que conocemos ambos datos.
- Nota que podemos usar cualquiera de los puntos que conocemos, puesto que el requisito impuesto es que la recta pase por el punto dado y en este caso, pasa por ambos puntos.
- Sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= 1(x-1) \\ y &= x - 1 + 2 \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

- Con lo que la ecuación buscada es: $y = x + 1$.

Es claro que podemos sustituir en la ecuación el valor de m a partir de las coordenadas de los puntos por los cuales pasa la recta. Así obtenemos la ecuación en su forma dos puntos.

Definición 2

ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU FORMA DOS PUNTOS
La ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

Observa también que la ecuación de la recta en su forma punto pendiente sustituimos el valor de m en función de las coordenadas de los dos puntos por donde pasa:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \quad m \quad (x - x_1) \\ y - y_1 &= \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1) \end{aligned}$$

Ahora, consideremos solamente la definición de pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si suponemos que no concemos más que un punto y dejamos las coordenadas del punto $Q(x_2, y_2)$ como incógnitas, obtenemos la ecuación de la recta en su forma punto pendiente, despejando $y - y_1$:

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{x - x_1} &= m \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \end{aligned}$$

Así que no tendrás que memorizar ninguna de estas fórmulas.

A partir de la definición de pendiente puedes fácilmente deducir las otras dos.

Inclusive, la fórmula de pendiente puedes recordarla a partir de su interpretación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Incremento en } y}{\text{Incremento en } x}$$

Así que es mejor entender la información que nos da la pendiente y así podremos deducir su fórmula y a partir de ésta las demás ecuaciones.

10.1.2 Forma pendiente-ordenada al origen

Si una recta corta el eje de las ordenadas (eje y) en el punto $B(0, b)$, entonces decimos que la ordenada al origen de la recta es b.

Conociendo este punto es muy sencillo encontrar la ecuación de la recta, que es lo que vamos a estudiar en esta sección.

Ejemplo 1 Calcula la ecuación de la recta con pendiente $m = 3$ que corta al eje y en el punto $B(0, 5)$.

- Sabemos que en el eje y los valores de x son iguales a cero, independientemente de la posición.
- A la izquierda del eje y los valores de x son negativos y que a la derecha son positivos.
- Precisamente sobre el eje x no son ni negativos ni positivos: es la frontera entre los positivos y negativos, esto es, la coordenada de x vale cero para cada punto.
- Entonces, la recta pasa por el punto $B(0, 5)$, y tiene pendiente $m = 3$.
- De nuevo sustituimos los valores conocidos en la ecuación de la recta en su forma punto - pendiente.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 5 &= 3(x - 0) \\ y &= 3x + 5 \end{aligned}$$

- Con lo que la ecuación de la recta es: $y = 3x + 5$.

Ejemplo 2 Clcula la ecuación de la recta con pendiente $m = -3$ que corta al eje y en $B(0, 7)$.

- De nuevo, en este caso, por intersectar al eje y en $y = 2$, la recta pasa por el punto $B(0,7)$ y tiene pendiente $m = -3$.

- Utilizamos la ecuación en su forma punto - pendiente.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 7 &= -3(x - 0) \\ y &= -3x + 7 \end{aligned}$$

- Con lo que la ecuación buscada es: $y = -3x + 7$.

A partir de los dos ejemplos anteriores podemos darnos cuenta que en la ecuación $y = m\,x + b$, m es la pendiente de la recta y b es la coordenada del punto de intersección de la recta con el eje y.

Debido a esto a esta forma también se le conoce con el nombre de ecuación en su forma pendiente-ordendada al origen.

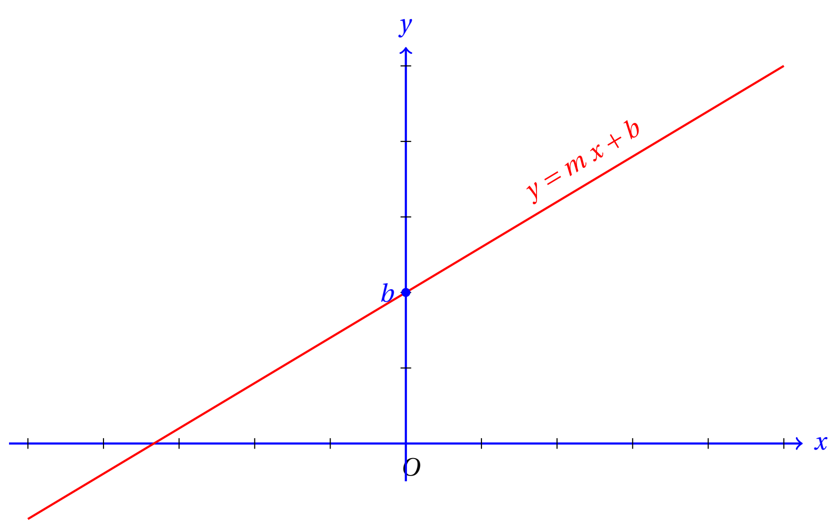
ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU FORMA PENDIENTE-ORDENADA AL ORIGEN

La ecuación de la recta que tiene pendiente m y corta al eje y en el punto $(0, b)$ es:

$$y = m\,x + b$$

Definición 1

Observa que en la ecuación $y = m\,x + b$, cuando $x = 0$ tenemos que $y = b$. Esto nos dice que la recta pasa por el punto $B(0, b)$.



A partir de esta interpretación geométrica del valor de b de la ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada al origen, fácilmente podemos graficar la recta: $y = m\,x + b$.

Para este fin, empezamos dibujando un punto en $(0, b)$. A partir de ese punto y con la interpretación geométrica de la pendiente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Incremento en } y}{\text{Incremento en } x}$$

podemos avanzar m unidades verticalmente por cada unidad que avancemos hacia la derecha. Si m es positivo la recta subirá, si m es negativo la recta bajará y si $m = 0$ tendremos una recta horizontal.

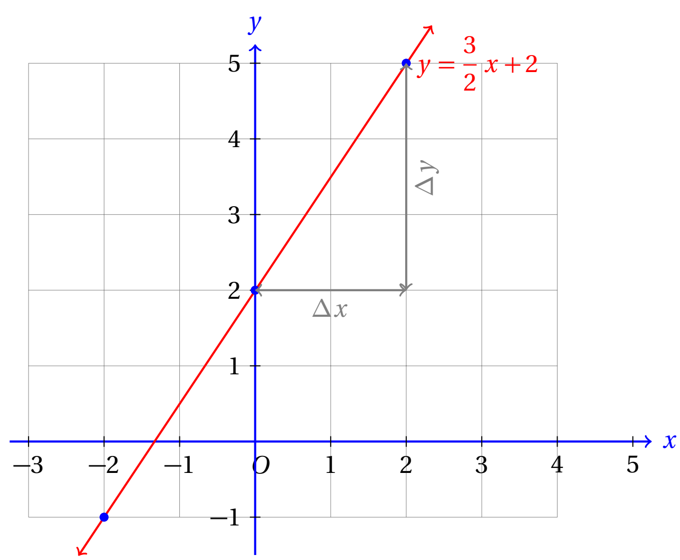
Otra forma de explicar el mismo procedimiento es: «*Avanzamos* Δy *unidades en el sentido del eje* y y Δx *unidades en el sentido del eje* x», así graficamos varios puntos y podremos fácilmente graficar la recta a partir de su ecuación.

Ejemplo 3 Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $3/2$ y que intersecta al eje y en $B(0,2)$. Grafica la recta a partir de su ecuación.

- Empezamos notando que en este caso la pendiente no es un número entero, sino una fracción.
- Para empezar, ya conocemos el valor de b, en este caso $b=2$, porque la recta corta al eje de las ordenadas en $(0,2)$.
- Para encontrar la ecuación de la recta sustituimos los valores en la ecuación:

$$\begin{aligned} y &= m\,x+b \\ y &= \frac{3}{2}\,x+2 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a interpretar la pendiente para graficar la recta de una manera sencilla.
- Sabemos que: $m=\Delta y/\Delta x=3/2$, esto indica que $\Delta y=3$ y que $\Delta x=2$.
- Y eso sugiere que por cada 2 unidades que nos movamos hacia la derecha (sentido positivo del eje x) debemos subir 3 unidades (sentido positivo del eje y).
- Así podemos ubicar varios puntos del plano por donde pasa la recta y a partir de ellos graficarla:



Ejemplo 4 Luis fue a comprar refrescos. Cada refresco costaba \$5.00 pesos y además, había quedado a deber \$12.00 pesos al tendero. Encuentra la ecuación de la recta que modela esta situación.

- En este caso, si Luis compra cero refrescos, entonces debe pagar al tendero lo que había quedado a deber, esto es, \$12.00 pesos.
- Este valor representa la ordenada al origen, es decir, $b=12$.

- Por cada refresco que Luis compre, el importe aumenta en \$5.00
- Este valor representa la pendiente de la recta.
- Entonces, la ecuación de la recta es:
$$y = 5x + 12$$
- Si denotamos por I el importe que Luis debe pagar al tendero y n el número de refrescos que comprará, la ecuación se puede escribir como:
$$I = 5n + 12$$
- Por ejemplo, si compra 6 refrescos, deberá pagar:
$$I = 5(6) + 12 = 30 + 12 = 42 \text{ pesos.}$$
- Ahora grafica la recta en tu cuaderno.

A partir del ejemplo anterior podemos dar una nueva interpretación (física) de la pendiente.

En este caso, Δx representa la cantidad de refrescos que Luis va a comprar y Δy el importe cuando compre Δx refrescos. Entonces, $m = \Delta y / \Delta x$ representa el precio de un refresco.

Nosotros podemos sustituir valores para Δy y Δx que satisfagan las condiciones del ejemplo anterior, pero siempre va a ocurrir que al simplificar la fracción con la que calculamos el valor de m se simplifique a 5, que es el precio de un refresco.

Verifica con algunos ejemplos numéricos que esto es verdad.

Un inversionista desea comprar una parte de un terreno que tenga un metro más del doble de largo que de ancho. Si a es el ancho, ¿cuál es la ecuación que modela esta situación? **Ejemplo 5**

- Si el ancho es a, el largo, será un metro mayor al doble del ancho.
- El doble del ancho lo obtenemos multiplicando el ancho por dos: $2a$
- Sabemos que el largo es un metro mayor a esa cantidad: $L = 2a + 1$
- Esa es la ecuación que modela la situación:
$$L = 2a + 1$$
- Si x representara el ancho del terreno y la variable y representara el largo, la ecuación sería:
$$y = 2x + 1$$
- La cual es muy fácil de graficar.
- Explica con palabras cómo gráficar esta ecuación.

En este último ejemplo la pendiente representa la condición «*el doble de largo que de ancho*». La ordenada al origen corresponde a la condición de que el largo debe ser *un metro* mayor al doble del ancho.

Considera valores de a y calcula los valores del largo del terreno. Observa que primero multiplicas por dos para obtener el doble. La pendiente tiene esa función en la ecuación.

Por otra parte, cuando sumas uno (la ordenada al origen) al doble del ancho, terminas con la condición del problema: «*el largo sea un metro mayor al doble del ancho*».

Reto 1	Transforma la ecuación de la recta de su forma punto-pendiente a la forma pendiente-ordenada al origen.

Ejemplo 6	Se sabe que 0º Centígrados equivalen a 32º Farenheit. Por otra parte, 100º Centígrados equivalen a 212º Farenheit. Encuentra la ecuación que sirve de conversión entre una escala de temperatura y otra.

- Podemos colocar sobre el eje x los grados Centígrados y sobre el eje y los grados Farenheit.
- En ese caso tenemos los dos puntos: $A(0,32)$ y $B(100,212)$.
- La primera coordenada indica la temperatura en grados Centígrados.
- La segunda coordenada indica la temperatura en grados Farenheit.
- Ahora debemos encontrar la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos.
- Empezamos calculando la pendiente de la recta:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{212-32}{100-0}=\frac{180}{100}=\frac{9}{5}$$

- Ahora que conocemos la pendiente de la recta, podemos sustituir este valor con uno de los puntos en la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente y encontrar la ecuación:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y-32 &= \left(\frac{9}{5}\right)(x-0) \\ y &= \frac{9}{5}x+32 \end{aligned}$$

- Como en el eje x están los grados Centígrados, podemos cambiar el nombre de la literal x por C para poder relacionar la variable con la escala centígrada.
- A su vez, en el eje y están los grados Farenheit, por eso es mejor escribir F en lugar de y:

$$F=\frac{9}{5}C+32$$

- Esta ecuación nos ayuda a calcular el valor de F (grados Farenheit) equivalente(s) a C grados Centígrados.
- Observa que si $C=0$, se sigue que $F=32$, concordando con los datos iniciales.
- También, si $C=100$, entonces, $F=900/5+32=180+32=212$.
- Si deseas calcular C a partir de F basta despejar F en términos de C:

$$\begin{aligned} F &= \frac{9}{5}C+32 \\ F-32 &= \frac{9}{5}C \\ \frac{5(F-32)}{9} &= C \end{aligned}$$

- Ahora, si $F = 32$, tenemos que $C = 0$.

- También puedes comprobar que si $F = 212$ se cumple que $C = 100$.

Como puedes ver, podemos aplicar las ecuaciones lineales en muchas situaciones distintas.

Es importante observar que las literales x, y en las aplicaciones tienen un significado físico. Trata de recordar cómo definiste cada variable para no confundir sus significados cuando debas realizar cálculos.

Por ejemplo, en el ejemplo anterior, si no cambiamos las literales por algunas que nos sugirieran qué significan cada una, podemos confundir sus significados y realizar cálculos incorrectos.

10.1.3 Forma simétrica

Ahora vamos a utilizar una forma más de la ecuación de la recta.

La ecuación de la recta que estudiamos en la sección anterior solamente nos daba información acerca de la intersección con el eje y.

Sería mucho mejor tener una forma de la ecuación que nos diera información sobre las intersecciones con los dos ejes y no solamente con uno.

Entonces, en este caso deseamos escribir la ecuación de manera que nos incluya las intersecciones con los ejes.

Recuerda que con dos condiciones nosotros podemos determinar de manera única la ecuación de la recta. Nosotros conocemos dos puntos por donde pasa la recta, que corresponden a las intersecciones de la recta con los ejes: $A(a, 0)$ y $B(0, b)$.

A partir de estas condiciones vamos a encontrar la ecuación de la recta y vamos a tratar de reconocer esa información conocida.

Utilizamos la ecuación de la recta en la forma dos puntos:

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1) \\
y - 0 &= \left(\frac{b - 0}{0 - a}\right)(x - a) \\
y &= \left(-\frac{b}{a}\right)(x - a) \\
a\,y &= -b\,x + a\,b \\
a\,y + b\,x &= a\,b
\end{aligned}$$

Ahora podemos dividir ambos lados de la igualdad entre $a\,b$ y así obtener:

$$\begin{aligned}
\frac{\cancel{a}\,y}{\cancel{a}\,b} + \frac{\cancel{b}\,x}{a\,\cancel{b}} &= \frac{\cancel{a\,b}}{\cancel{a\,b}} \\
\frac{y}{b} + \frac{x}{a} &= 1 \\
\frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1
\end{aligned}$$

Esta es la ecuación de la recta en su forma simétrica.

Definición 1

ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU FORMA SIMÉTRICA

La ecuación de la recta en su forma simétrica es:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

donde $a \neq 0$ es la intersección con el eje de las abscisas (eje x) y $b \neq 0$ es la intersección con el eje de las ordenadas (eje y).

Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la recta que corta al eje x en $x=3$ y al eje y en $y=5$.

- Sabemos que la recta pasa por los puntos $A(3,0)$ y $B(0,5)$.
- En este caso sustituimos los valores en la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{y}{b} &= 1 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{5} &= 1 \end{aligned}$$

- Esta ecuación es muy sencilla de graficar.
- Ubica los puntos $A(3,0)$ y $B(0,5)$ en el plano y traza la recta que pasa por éstos.

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la recta en su forma simétrica que tiene pendiente $3/2$ y que intersecta al eje y en $(0,2)$. Grafica la recta a partir de su ecuación.

- Ya hemos encontrado la ecuación de esta recta en su forma pendiente-ordenada al origen en la página 400.
- Pero ahora vamos a dar más información además de $b=2$.
- Vamos a proceder como hicimos para encontrar la ecuación en la forma simétrica en la introducción de esta sección.
- Utilizamos la ecuación en su forma pendiente-ordenada al origen, y de ahí encontramos la forma simétrica:

$$\begin{aligned} y &= m\,x+b \\ y &= \left(\frac{3}{2}\right)x+2 \\ 2\,y &= 3\,x+4 \\ 2\,y-3\,x &= 4 \end{aligned}$$

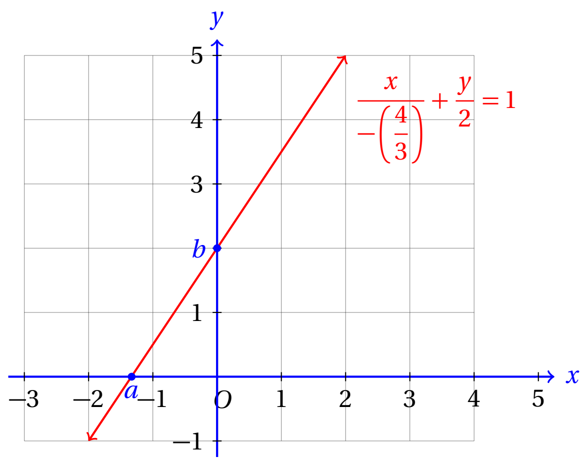
- Ahora dividimos ambos lados de la igualdad entre 4 y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{2}\,y}{\cancel{4}}-\frac{3\,x}{4} &= \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} \\ \frac{y}{2}+\frac{x}{-4/3} &= 1 \end{aligned}$$

- Observa que hemos utilizado el hecho de que:

$$\frac{1}{\left(\dfrac{p}{q}\right)} = \frac{q}{p}$$

- Ahora conocemos la intersección de la recta con el eje x, y ésta es: $a = -4/3$.



- Pudimos obtener esta misma información a partir de la ecuación en su forma pendiente-ordenada al origen.
- Para esto, sustituimos $y = 0$ y despejamos x (¿por qué?)

$$\begin{array}{ccccc} y = \dfrac{3}{2}\,x + 2 & \Rightarrow & 0 = \dfrac{3}{2}\,x + 2 & \Rightarrow \\ -2 = \dfrac{3}{2}\,x & \Rightarrow & -4 = 3\,x & \Rightarrow \\ & \Rightarrow & x = -\dfrac{4}{3} & \end{array}$$

- La gráfica de esta misma ecuación aparece en la sección anterior, en la página antes mencionada.
- Puedes verificar que la pendiente es $m = 3/2$ a partir de la gráfica, igual que $a = -4/3$.

Considerando la pendiente $m = \Delta y/\Delta x$, transforma la ecuación de la recta de su forma pendiente-ordenada al origen a su forma simétrica. **Reto 1**

Transforma la ecuación de la recta $y = 2\,x - 4$ a su forma simétrica. **Ejemplo 3**

- Para hacer la transformación necesitamos conocer los valores de a y b, es decir, las intersecciones de la recta con los ejes.
- De la ecuación, nos damos cuenta que $b = -4$.
- Para encontrar la intersección con el eje x sustituimos $y = 0$ en la ecuación y despejamos x:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 2\,x - 4 \\ 2\,x & = & 4 \\ x & = & 2 \end{array}$$

- Entonces, la intersección con el eje x es $a = 2$.
- Ahora solamente sustituimos los valores en la ecuación en su forma simétrica:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} &= 1 \end{aligned}$$

- La gráfica de esta ecuación se queda como ejercicio.

Ejemplo 4 Encuentra la ecuación de la recta (forma simétrica) que pasa por el punto $P(3,2)$ y tiene pendiente $m = 1/3$.

- Resolvemos este problema en dos fases:
  A: Encontramos la ecuación en su forma punto-pendiente.
  B: Transformamos esta ecuación a la forma simétrica.
- Sabemos que $m = 1/3$ y que pasa por el punto $P(3,2)$.
- Sustituimos estos valores en la ecuación de la recta en forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= \left(\frac{1}{3}\right)(x - 3) \end{aligned}$$

- Multiplicamos ambos lados de la igualdad por 3:

$$\begin{aligned} 3(y-2) &= \cancel{3}\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)(x-3) \\ 3y - 6 &= x - 3 \\ x - 3y &= -3 \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación de la recta, pero en la forma punto-pendiente.
- Empezamos con la fase **B**.
- Dividimos ambos lados de la ecuación entre -3:

$$\begin{aligned} \frac{x}{-3} + \frac{-3y}{-3} &= \frac{-3}{-3} \\ \frac{x}{-3} + \frac{y}{1} &= 1 \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación en su forma simétrica.
- Las intersecciones con los ejes son $A(-3,0)$ y $B(0,1)$.
- Dibuja la gráfica de esa ecuación en tu cuaderno.

Observa que no importa en qué forma se encuentre la ecuación, con cualquiera vas a obtener la misma gráfica.

Por eso decimos que las ecuaciones corresponden al mismo lugar geométrico.

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{3}\right)x+1 \\ x-3\,y &= -3 \\ \frac{x}{-3}+\frac{y}{1} &= 1 \end{aligned}$$

Para verificar que esto es verdad tendrás que transformar la primera ecuación ecuación en la segunda, la segunda en la tercera y la tercera en la primera. Se te queda de tarea verificar que es verdad.

Encuentra la ecuación de la recta (forma simétrica) que pasa por los puntos $P(3,2)$ y $Q(1,6)$. **Ejemplo 5**

- Este problema, como el anterior, lo resolvemos en dos fases:
  A: Encontramos la ecuación en su forma punto-pendiente.
  B: Transformamos esta ecuación a la forma simétrica.
- Empezamos la fase **A**.
- Primero encontramos la pendiente:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-(-3)}{1-(-2)}=\frac{6+3}{1+2}=\frac{9}{3}=3$$

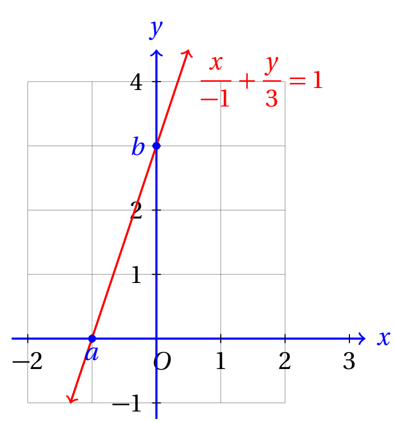
- Ahora sustituimos en la ecuación en la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y-6 &= 3(x-1) \\ y &= 3\,x-3 \\ -3\,x+y &= 3 \end{aligned}$$

- Ahora vamos por la fase **B**.
- Dividimos ambos lados de la ecuación entre 3:

$$\begin{aligned} \frac{-3\,x}{3}+\frac{y}{3} &= \frac{3}{3} \\ \frac{x}{-1}+\frac{y}{3} &= 1 \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación en su forma simétrica.



- Observa que como la recta corta a los ejes en los puntos: $A(-1,0)$ y $B(0,3)$, es muy fácil calcular la pendiente a partir de su gráfica.
- En este caso, $\Delta x = 1$ y $\Delta y = 3$.
- Si sustituimos estos valores en la fórmula para calcular la pendiente obtenemos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$$

En todos los ejemplos que hemos resuelto hemos tenido suerte, porque en ninguno de los casos tuvimos $a = 0$ ó $b = 0$.

En cualquiera de esos casos la forma simétrica de la recta no puede escribirse, dado que no podemos dividir entre cero.

Cuando te pidan que escribas la ecuación de la recta en la forma simétrica y la recta pase por el origen, entonces, la respuesta a esa pregunta es: «*La ecuación de la recta no puede transformarse a la forma simétrica, porque tenemos división entre cero, dado que $a = 0$ y $b = 0$.*»

Un ejemplo de esos casos es la recta $y = x$. Dado que pasa por el origen, $a = 0$ y $b = 0$.

Cuando sustituimos en la ecuación de la recta en la forma simétrica obtenemos:

$$\frac{x}{0} + \frac{y}{0} = 1$$

Pero eso es imposible, porque la división entre cero **no** está definida.

10.1.4 Forma general

La forma general de la ecuación de la recta es la que considera todos los casos de las rectas: horizontales, verticales e inclinadas.

En otros casos no siempre es posible escribir la ecuación de una recta dada.

Por ejemplo, en el caso de la ecuación de la recta en la forma simétrica, en caso de que cualquiera de las intersecciones fuera, bien $a = 0$, bien $b = 0$, la ecuación simétrica no puede escribirse.

En el caso de la ecuación vertical, no puede escribirse ni en forma punto-pendiente, ni en forma pendiente-ordenada al origen.

Esto se debe a que la recta vertical no tiene definida la pendiente. (¿Por qué?)

Así que surge la necesidad de estudiar una clase más de forma de la recta.

Considera la ecuación de la recta en su forma simétrica:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Si multiplicamos ambos lados por ab obtenemos:

$$\begin{aligned} ab \cdot \left(\frac{x}{a}\right) + ab \cdot \left(\frac{y}{b}\right) &= ab \\ bx + ay &= ab \\ bx + ay - ab &= 0 \end{aligned}$$

Ahora que hemos transformado la ecuación para evitarnos las fracciones, podemos cambiar los nombres de los coeficientes y escribir:

$$Ax + By + C = 0$$

Esta es la ecuación de la recta en su forma general.

ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU FORMA GENERAL
La ecuación de la recta en su forma general es:

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

donde $A, B, C \in \mathbb{R}$*, y los coeficientes* A, B *no pueden ser cero simultánemente.*

Definición 1

Podemos encontrar la ecuación de cualquier recta del plano en su forma general. De ahí viene el adjetivo «*general*».

Hallar la ecuación (forma general) de la recta que pasa por los puntos $A(7,1)$ y $B(3,8)$.

Ejemplo 1

- Primero encontraremos la pendiente de la recta.
- Después utilizaremos la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.
- **Pendiente de la recta:**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-1}{3-7} = \frac{7}{-4}$$

- Ahora sustituimos los datos conocidos en la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\
y - 7 &= -\frac{7}{4}(x-1) \\
4(y-7) &= -7(x-1) \\
4\,y - 28 &= -7\,x + 7 \\
7\,x + 4\,y - 28 - 7 &= 0 \\
7\,x + 4\,y - 35 &= 0
\end{aligned}$$

- En este caso no nos conviene despejar y, porque eso implicaría tener coeficientes fraccionarios.

Observa que en este caso hemos dejado la ecuación de la recta en la forma $A\,x + B\,y + C = 0$. En este caso particular, $A = 7$, $B = 4$ y $C = -35$.

Transforma la ecuación de la recta de su forma punto-pendiente a la forma general usando $m = \Delta y / \Delta x$.

Reto 1

Encuentra la ecuación en forma general de la recta que tiene pendiente $m = 3$ y pasa por el punto $P(-1,3)$.

Ejemplo 2

- Empezamos sustituyendo los valores en la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\
y - 3 &= 3(x - (-1)) \\
y - 3 &= 3\,x + 3 \\
-3\,x + y - 6 &= 0 \\
3\,x - y + 6 &= 0
\end{aligned}$$

- Se sugiere que el coeficiente de x sea positivo. Por eso se multiplicó la ecuación por -1 al final.

Reto 2	Transforma la ecuación de la recta en su forma general a la forma punto-ordenada al origen.

Ejemplo 3

Transforma la ecuación de la recta en forma simétrica:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{7}=1$$

a la forma general.

- Es muy sencillo hacer la conversión: multiplicamos por el mínimo común múltiplo de los denominadores y después expresamos la ecuación en la forma general:

$$\begin{aligned} 21\left(\frac{x}{3}\right)+21\left(\frac{y}{7}\right) &= 21\\ 7x+3y-21 &= 0 \end{aligned}$$

- Grafica la ecuación. Para eso es mejor basarse en la forma simétrica que en la general.

Reto 3	Transforma la ecuación en su forma general a la forma simétrica.

Ejemplo 4

Encuentra la ecuación en su forma general de la recta que pasa por el punto $P(5,4)$ y es paralela a la recta: $3x+2y-5=0$.

- Ya conocemos un punto por donde pasa la recta.
- Nos falta conocer la pendiente.
- Como ambas rectas son paralelas, la pendiente de la recta que buscamos es igual a la pendiente de la recta cuya ecuación conocemos.
- Para calcular la pendiente de las rectas, vamos a expresar la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned} 3x+2y-5 &= 0\\ 2y &= -3x+5\\ y &= -\frac{3}{2}x+\frac{5}{2} \end{aligned}$$

- Ahora sabemos que la pendiente de la recta es: $m=-3/2$.
- Sustituimos los datos en la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1)\\ y-4 &= -\left(\frac{3}{2}\right)(x-5)\\ 2(y-4) &= -3x+15\\ 2y-8 &= -3x+15\\ 3x+2y-23 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora se queda como ejercicio que transformes esta ecuación a la forma simétrica y la grafiques.

En este ejemplo hemos utilizado la condición de paralelismo entre dos rectas:

$$\text{Si } \ell_1 \parallel \ell_2 \qquad \text{entonces,} \qquad m_1 = m_2$$

Al tratar de resolver un problema debes reconocer qué parte de la teoría te ayuda a resolverlo.

El siguiente ejemplo requerirá que recuerdes la condición de perpendicularidad entre dos rectas.

Ejemplo 5

Encuentra la ecuación (forma general) de la recta que es perpendicular a la recta $5x - 3y + 21 = 0$ y que pasa por el punto $P(7, -1)$.

- Sabemos que las rectas son perpendiculares, entonces sus pendientes son recíproco de signo cambiado una de la otra.
- Primero encontramos la pendiente de la recta cuya ecuación conocemos.
- Para eso basta despejar y, así obtenemos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned} 5x - 3y + 21 &= 0 \\ 5x + 21 &= 3y \\ \frac{5}{3}x + 7 &= y \end{aligned}$$

- Entonces, la pendiente de esta recta es $m = 5/3$.
- Encontramos la pendiente de la recta cuya ecuación deseamos calcular con la condición de perpendicularidad entre dos rectas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \qquad \Rightarrow \qquad m_2 = -\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)} = -\frac{3}{5}$$

- Ahora que conocemos su pendiente un punto por el cual pasa, podemos calcular su ecuación:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 7 &= -\frac{3}{5}(x - (-1)) \\ 5(y - 7) &= -3(x + 1) \\ 5y - 35 &= -3x - 3 \\ 3x + 5y - 32 &= 0 \end{aligned}$$

- Esa es la ecuación que necesitabamos calcular.

Supón que deseas encontrar la pendiente de una recta perpendicular al eje x. ¿Qué información arroja la condición de perpendicularidad entre dos rectas?

Observa que la pendiente del eje x es cero. (¿Por qué?) Cuando aplicamos la condición de perpendicularidad tenemos una división entre cero. Esto nos indica que la pendiente de una recta vertical no está definida.

Debes tener cuidado y observar esos casos antes de empezar con los cálculos.

10.1.5 Forma normal

Todavía nos falta una última forma de la ecuación de la recta que nos ayudará a estudiar el último tema de esta unidad.

Definición 1

Ecuación de la recta en su forma normal

La ecuación de la recta en su forma normal es:

$$\frac{A\,x+B\,y+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

donde $A,B,C\in\mathbb{R}$ y los coeficientes A,B no pueden ser cero simultáneamente.

Para obtener esta ecuación basta dividir ambos lados de la ecuación de la recta en su forma general entre $\sqrt{A^2+B^2}$.

Ejemplo 1

Encuentra la ecuación en forma normal de la recta: $12\,x-5\,y+1=0$.

- En este ejemplo necesitamos convertir la ecuación de la recta en forma general a la forma normal.
- Para eso basta calcular el valor del denominador: $\sqrt{A^2+B^2}$ y dividir ambos lados de la ecuación (en su forma general) por ese valor.

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{(12)^2+(-5)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$$

- Entonces, la ecuación simétrica la obtenemos dividiendo entre 13:

$$\frac{12}{13}\,x-\frac{5}{13}\,y+\frac{1}{13}=0$$

En este primer ejemplo obtuvimos un valor entero para $\sqrt{A^2+B^2}$, pero eso no siempre ocurrirá.

La mayoría de las veces encontraremos raíces de números que no se podrán simplificar.

En esos casos es mejor dejar indicada la raíz y no escribir decimales. Es más fácil de entender la ecuación mientras menos decimales contenga y es más fácil de escribir la ecuación cada vez.

El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos.

Ejemplo 2

Encuentra la ecuación (forma normal) de la recta que tiene pendiente $m=-4$ y que pasa por el punto $P(1,3)$.

- Empezamos calculando la ecuación en forma punto-pendiente, así obtenemos su forma general y finalmente calculamos la ecuación en la forma normal.
- **Fase A:** Ecuación en forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1)\\ y-3 &= -4(x-1)\\ y-3 &= -4\,x+4\\ 4\,x+y+1 &= 0 \end{aligned}$$

- **Fase B:** Convertimos a la forma normal.

- Calculamos el valor de $\sqrt{A^2+B^2}$:

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$$

- Dividimos ambos lados de la ecuación en forma general entre $\sqrt{17}$ y así obtenemos la ecuación en la forma normal:

$$\frac{4}{\sqrt{17}}\,x+\frac{1}{\sqrt{17}}\,y+\frac{1}{\sqrt{17}}=0$$

- Esta es la ecuación que deseabamos calcular.

Calcula la ecuación (forma normal) de la recta que pasa por los puntos $P(5,1)$ y $Q(1,5)$. **Ejemplo 3**

- Primero debemos calcular la pendiente de la recta, después utilizar la forma punto-pendiente y finalmente convertir a la forma normal.

- **Fase A:** Encontramos la pendiente de la recta:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-1}{1-5}=\frac{4}{-4}=-1$$

- **Fase B:** Sustituimos en la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente:

$$\begin{array}{rcl} y-y_1 & = & m\,(x-x_1) \\ y-1 & = & (-1)(x-5) \\ y-1 & = & -x+5 \\ x+y-6 & = & 0 \end{array}$$

- **Fase C:** Convertimos a la forma normal.

- Primero calculamos el valor del denominador:

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

- Finalmente dividimos la ecuación de la recta en su forma general entre $\sqrt{2}$ para convertirla a la forma normal:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,x+\frac{1}{\sqrt{2}}\,y-\frac{6}{\sqrt{2}}=0$$

- Y terminamos.

Calcula la ecuación de la recta que es paralela a la recta $3\,x-y+12=0$ y que pasa por el punto $P(-1,1)$. **Ejemplo 4**

- Dado que las rectas son paralelas, sus pendientes son iguales.

- Para conocer la pendiente de la recta cuya ecuación conocemos, despejamos y:

$$y=3\,x+12$$

- Entonces, $m_1=3$ y $b=12$.

- Ahora vamos a sustituir $m = 3$ y $P(-1, 1)$ en la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= 3(x - (-1)) \\ y - 1 &= 3x + 1 \\ -3x + y - 2 &= 0 \\ 3x - y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a convertirla a la forma normal.
- Calculamos el valor del denominador:

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

- Ahora dividimos la ecuación en la forma general entre $\sqrt{10}$ para obtener la forma normal:

$$\frac{3}{\sqrt{10}}x - \frac{1}{\sqrt{10}}y + \frac{2}{\sqrt{10}} = 0$$

- Esta es la ecuación de la recta en su forma normal.

Ejemplo 5 Calcula la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $x + 2y - 2 = 0$ y que pasa por el punto $P(2, -1)$.

- Sabemos que las rectas son perpendiculares, por eso podemos usar la condición de perpendicularidad para encontrar la pendiente de la recta cuya ecuación queremos encontrar.
- Primero calculamos la pendiente de la recta que conocemos, para eso despejamos y:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2 &= 0 \\ x - 2 &= -2y \\ -\frac{1}{2}x + 1 &= y \end{aligned}$$

- Entonces, $m_1 = -1/2$ y $b = 1$.
- Ahora encontramos la pendiente de la recta perpendicular a ésta con la condición de perpendicularidad:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$$

- Ahora sustituimos los datos conocidos en la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= 2(x - (-1)) \\ y - 2 &= 2x + 2 \\ -2x + y - 4 &= 0 \\ 2x - y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

- Y finalmente, la vamos a convertir a la forma normal.

- Calculamos el valor del denominador:

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

- Ahora dividimos ambos lados de la ecuación en forma general entre $\sqrt{5}$ y terminamos:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\,x-\frac{1}{\sqrt{5}}\,y+\frac{4}{\sqrt{5}}=0$$

Esta forma de la recta nos ayuda a calcular la distancia de un punto $P(x_1, y_1)$ hasta una recta cuando concemos su ecuación: $A\,x+B\,y+C=0$, que es lo que estudiaremos en el siguiente y último tema de esta unidad.

10.1.6 Distancia entre un punto y una recta

Frecuentemente en geometría nos encontramos con el problema de calcular la distancia desde un punto a una recta.

Definición 1

Distancia de un punto a una recta

La fórmula para calcular la mínima distancia medida desde el punto $P(x_1, y_1)$ hasta la recta $\ell:\ A\,x+B\,y+C=0$, es:

$$D_{P\ell}=\frac{|A\,x_1+B\,y_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Obviamente, suponemos que el punto en cuestión no está sobre la recta, porque en ese caso, la distancia buscada es cero.

Observa que si el punto $P(x_1, y_1)$ está sobre la recta, entonces satisface su ecuación y como su ecuación, tanto en forma general como en forma normal, están igualadas a cero, al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la recta en forma normal (que corresponde a fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta) obtenemos cero:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

Ejemplo 1

Calcula la distancia desde la recta $5\,x-12\,y-10=0$ hasta el punto $P(4,3)$.

- Sustituimos los datos conocidos en la fórmula:

$$\begin{aligned} D &= \frac{|A\,x_1+B\,y_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\ &= \frac{|5(4)-12(3)-10|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{|20-36-10|}{\sqrt{25+144}}\\ &= \frac{|26|}{\sqrt{169}}=\frac{26}{13}=2 \end{aligned}$$

- Entonces, desde la recta $5\,x-12\,y-10=0$ hasta el punto $P(4,3)$ hay 2 unidades de distancia.

Ejemplo 2

¿A qué distancia pasa la recta $3\,x+4\,y+15=0$ del origen?

- Este problema es equivalente a la siguiente solicitud:

Calcula la distancia desde la recta $3x + 4y + 15 = 0$ hasta el punto $P(0,0)$. **Comentario**

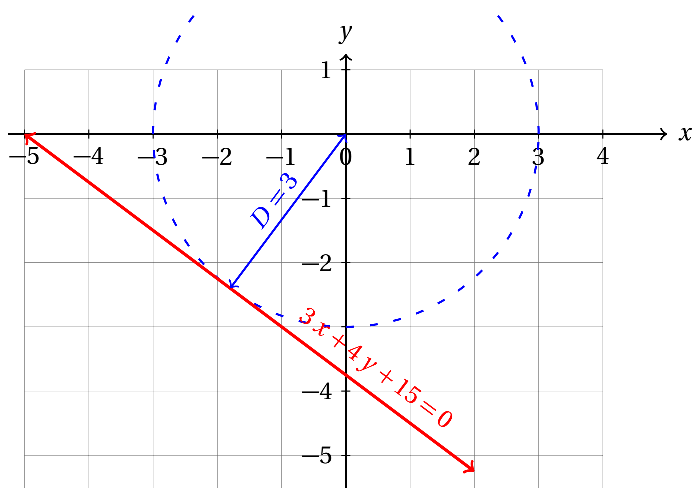
- Ahora que conocemos los datos, basta sustituir en la fórmula de distancia de un punto a una recta y realizar las operaciones que quedan indicadas:

$$\begin{aligned} D &= \frac{|A\,x_1 + B\,y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|3(0) - 4(0) + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|0 - 0 + 15|}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{|15|}{5} = 3 \end{aligned}$$

- Entonces, la recta pasa a 3 unidades del origen.
- Para graficar la recta podemos transformarla a la forma simétrica:

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 15 &= 0 \\ 3x + 4y &= -15 \\ \frac{3x}{-15} + \frac{4y}{-15} &= \frac{-15}{-15} \\ \frac{x}{-5} + \frac{y}{-15/4} &= 1 \end{aligned}$$

- Ahora podemos graficar la recta y mostrar que la distancia al origen es de 3 unidades:



La fórmula para encontrar la distancia de un punto a una recta tiene muchas aplicaciones, sobre todo en problemas de lugar geométrico.

En la siguiente unidad vamos a encontrar el lugar geométrico del punto $P(x, y)$ que se mueve de tal manera que su distancia a una recta es igual a la distancia a otro punto $F(h, k)$ que no se encuentra sobre la recta.

Los problemas que podemos resolver con esta fórmula son muy diversos.

Ejemplo 3

Las rectas $\ell_1: 3x + 4y - 20 = 0$, y $\ell_2: 3x + 4y + 20 = 0$ son paralelas. Encuentra la distancia que hay entre ellas.

- Nosotros no tenemos una fórmula para calcular la distancia entre dos rectas, pero podemos transformar este problema en uno que sí podamos resolver.

- Nosotros ya sabemos cómo encontrar la distancia de un punto a una recta.

- Así que vamos a encontrar un punto que esté sobre cualquiera de las rectas y de ahí vamos a calcular la distancia del punto a la otra recta.

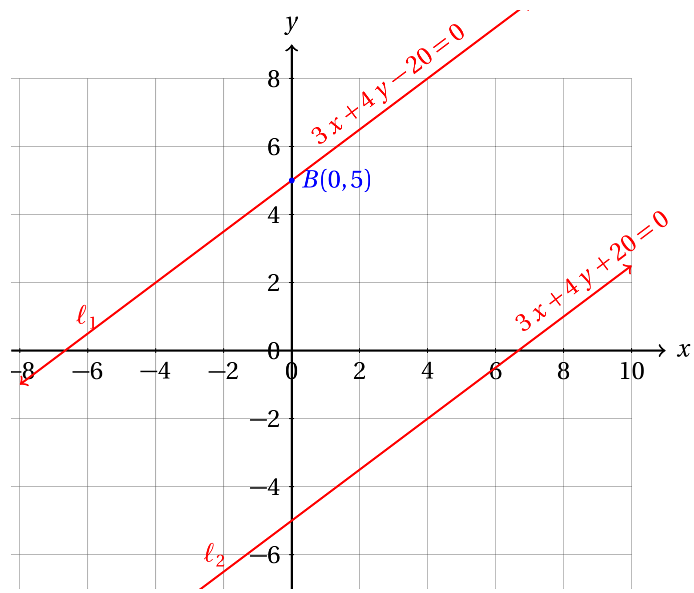
- Podemos encontrar, por ejemplo, la intersección de la recta ℓ_1 con el eje y sustituyendo $x = 0$:

$$3(0) + 4y - 20 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{20}{4} = 5$$

- Esto nos indica que la recta corta al eje y en el punto $B(0,5)$.

- Igualmente, podemos encontrar el punto de intersección con el eje x, por ejemplo, de la recta ℓ_2 y calcular su distancia a la recta ℓ_1.

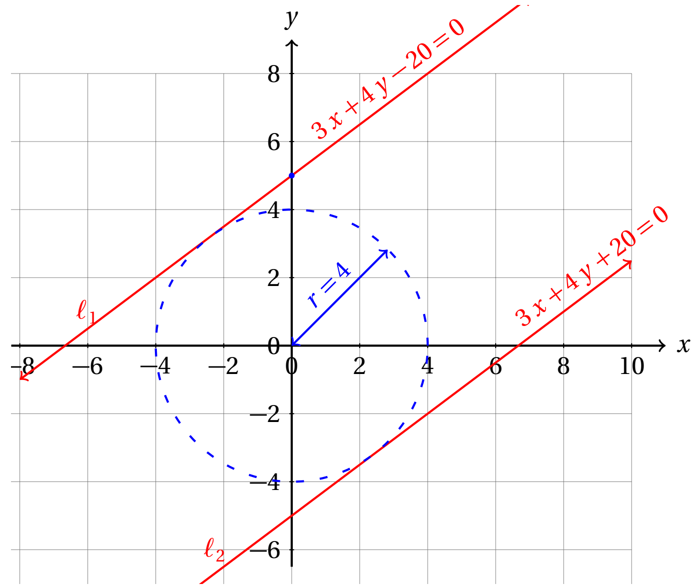
- En ambos casos obtendremos el mismo resultado porque la distancia de ℓ_1 a ℓ_2 es la misma que de la recta ℓ_2 a la recta ℓ_1.



- Ahora podemos encontrar la distancia del punto $B(0,5)$ a la recta ℓ_2:

$$\begin{aligned} D &= \frac{|A\,x_1 + B\,y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|3(0) + 4(5) + 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|20 + 20|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|40|}{\sqrt{25}} = \frac{40}{5} = 8 \end{aligned}$$

- Entonces, las rectas se encuentran alejadas una de otra a 8 unidades de distancia.



Un ejemplo de aplicación se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos $A(1,3)$, $B(-3,1)$ y $C(2,-2)$.

- La fórmula para calcular el área de un triángulo es base × altura entre dos.
- Podemos calcular la longitud de la base del triángulo con la fórmula de distancia entre dos puntos.
- La altura la calculamos con la fórmula de distancia de un punto a una recta.
- Pero primero debemos calcular la ecuación de la base del triángulo que elijamos.
- Elegiremos la base $\overline{BC}$.
- La longitud de este lado es:

$$\begin{aligned}
|\overline{BC}| &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\
&= \sqrt{(2-(-3))^2+(-2-1)^2} \\
&= \sqrt{(2+3)^2+(-3)^2} \\
&= \sqrt{25+9} = \sqrt{34}
\end{aligned}$$

- Ahora vamos a calcular la altura del triángulo...
- Primero encontramos la ecuación de la recta en forma general que pasa por los puntos B y C (porque esos puntos elegimos para la base).
- Calculamos la pendiente de esa recta:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2-1}{2-(-3)} = -\frac{3}{5}$$

- Ahora sustituimos la pendiente y un punto para encontrar la ecuación de la recta:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m\,(x - x_1)\\
y - (-3) &= -\left(\frac{3}{5}\right)(x-1)\\
5(y-1) &= -3(x-(-3))\\
5\,y - 5 &= -3\,x - 9\\
3\,x + 5\,y + 4 &= 0
\end{aligned}
$$

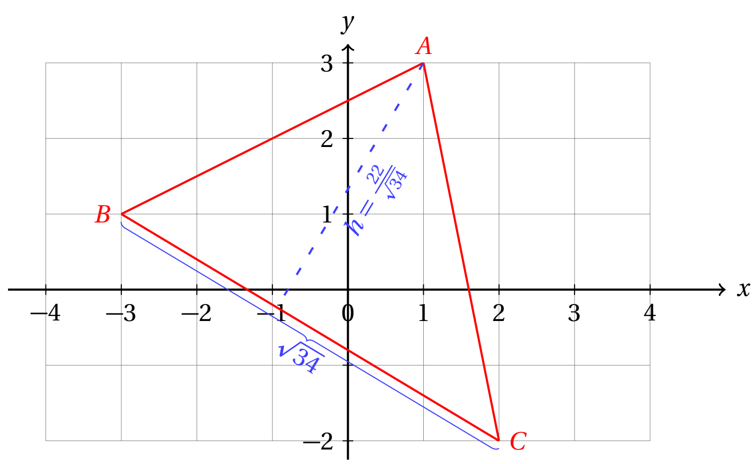
- Ahora que conocemos la ecuación de la base, podemos calcular la distancia de la base al vértice opuesto, que es el punto $A(1,3)$:

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{|A\,x_1 + B\,y_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\
&= \frac{|3(1)+5(3)+4|}{\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{|3+15+4|}{\sqrt{9+25}} = \frac{22}{\sqrt{34}}
\end{aligned}
$$

- Ahora sustituimos los valores de las longitudes de la base y la altura en la fórmula para encontrar el área del triángulo:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}\\
&= \frac{\left(\cancel{\sqrt{34}}\right)\times\left(\dfrac{22}{\cancel{\sqrt{34}}}\right)}{2}\\
&= \frac{22}{2} = 11
\end{aligned}
$$

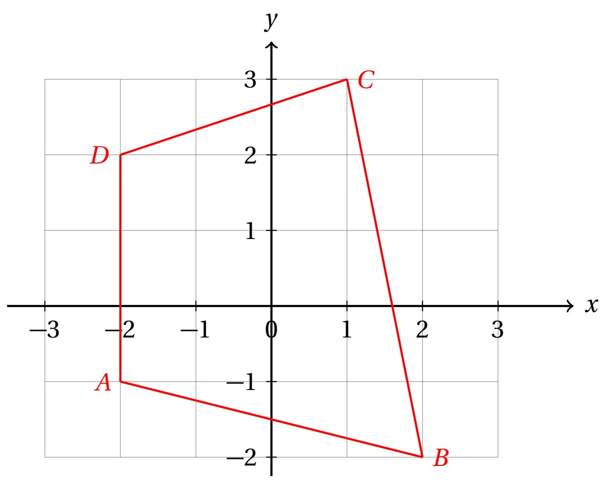
- Es decir, el área del triángulo es de 11 unidades cuadradas.



- Se te queda como ejercicio verificar que el área de este triángulo es 11 unidades cuadradas utilizando triángulos envolventes para formar un rectángulo alrededor del mismo.

Encuentra el área del cuadrilátero que tiene sus vértices en los puntos $A(-2,-1)$, $B(2,-2)$, $C(1,3)$ y $D(-2,2)$.	**Ejemplo 5**

- Para resolver este problema, vamos a reducirlo a un problema que ya sabemos resolver.
- Vamos a encontrar la ecuación de una de las diagonales del cuadrilátero para formar dos triángulos internos.
- Vamos a calcular la longitud de esa diagonal para que sirva de base a los dos triángulos.
- Después calculamos las alturas de los triángulos con la fórmula de distancia de un punto a una recta.
- Conociendo la base y las alturas de los triángulos, podremos calcular el área de cada triángulo.
- Finalmente calculamos el área del cuadrilátero sumando las áreas de los triángulos.
- Empezamos dibujando el cuadrilátero.



- Vamos a calcular la longitud de la diagonal $\overline{AC}$ usando la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos:

$$\begin{aligned}
|\overline{AC}| &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\
&= \sqrt{(3-(-1))^2+(1-(-2))^2} = \sqrt{(4)^2+(3)^2}\\
&= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5
\end{aligned}$$

- Ahora conocemos la longitud de la base de los triángulos.
- Vamos a calcular la ecuación de la recta ℓ que pasa por los puntos A y C.
- Primero encontramos su pendiente:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4}{3}$$

- Ahora calculamos la ecuación con la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned}
y-y_1 &= m\,(x-x_1)\\
y-3 &= \frac{4}{3}(x-1)\\
3(y-3) &= 4(x-1)\\
3\,y-9 &= 4\,x-4\\
-4\,x+3\,y-5 &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ell:\quad 4\,x-3\,y+5=0
\end{aligned}$$

- Ahora calculamos la altura del triángulo $\triangle ACD$ usando la fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta:

$$\begin{aligned} D_{D\ell} &= \frac{|A\,x_1 + B\,y_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ &= \frac{|4(-2) - 3(2) + 5|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{|-8-6+5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

- Ahora puedo calcular el área de este triángulo:

$$A_{\triangle ACD} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\cancel{5} \times \left(\frac{9}{\cancel{5}}\right)}{2} = \frac{9}{2}$$

- Ahora calculamos el área del triángulo $\triangle ACB$.
- Empezamos calculando su altura:

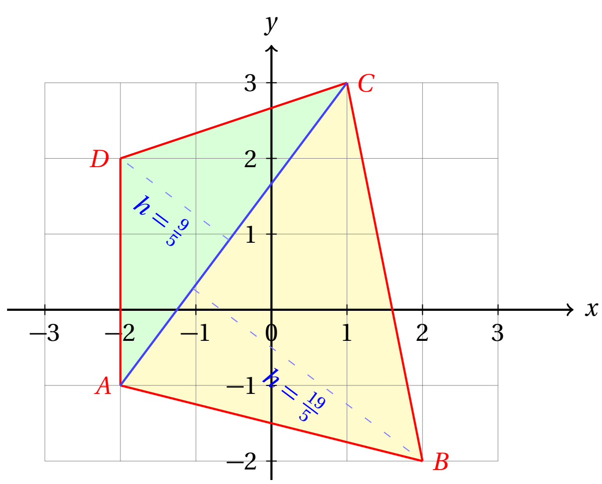
$$\begin{aligned} D_{B\ell} &= \frac{|A\,x_1 + B\,y_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ &= \frac{|4(2) - 3(-2) + 5|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{|8+6+5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{19}{5} \end{aligned}$$

- Y el área de este triángulo es:

$$A_{\triangle ACB} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\cancel{5} \times \left(\frac{19}{\cancel{5}}\right)}{2} = \frac{19}{2}$$

- Finalmente, como ya sabemos que el área del cuadrilátero es igual a la suma de las áreas de los dos triángulos, sumamos esas áreas:

$$A_{ABCD} = \frac{19}{2} + \frac{9}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ unidades cuadradas.}$$



- Verifica que este cálculo es correcto usando triángulos envolventes.

10.2 Ec. rectas notables en un triángulo

Como recordarás del curso de geometría plana (segundo semestre), las rectas notables de un triángulo son:

Medianas: Una mediana es la recta que pasa por el punto medio de un lado del triángulo y el vértice opuesto.

Alturas: Una altura es la recta que es perpendicular a un lado y pasa por el vértice opuesto.

Mediatrices: Una mediatriz es la recta que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular al mismo.

Bisectrices: Una bisectriz es la recta que divide a un ángulo en dos partes iguales.

En esta sección encontraremos las ecuaciones de las rectas notables de triángulos.

De manera analítica verificaremos algunas cosas que ya estudiamos en geometría plana.

2. Medianas

Como ya se dió la definición de mediana, vamos directamente a un ejemplo.

El triángulo $\triangle ABC$ tiene sus vértices en los puntos $A(-3,-2)$, $B(3,0)$ y $C(-1,2)$. Encuentra la ecuación de la mediana que pasa por el punto medio del lado $\overline{AB}$. **Ejemplo 6**

- Empezamos calculando las coordenadas del punto medio del lado $\overline{AB}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1+x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{-3+3}{2} \\ \bar{x} &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1+y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{-2+0}{2} \\ \bar{y} &= -1 \end{aligned}$$

- Ahora sabemos que esa mediana pasa por los puntos $M(0,-1)$ y el vértice opuesto al lado $\overline{AB}$, es decir, por el punto $C(-1,2)$.
- Ya tenemos dos puntos, podemos encontrar la ecuación de la recta.
- Calculamos la pendiente de la mediana:

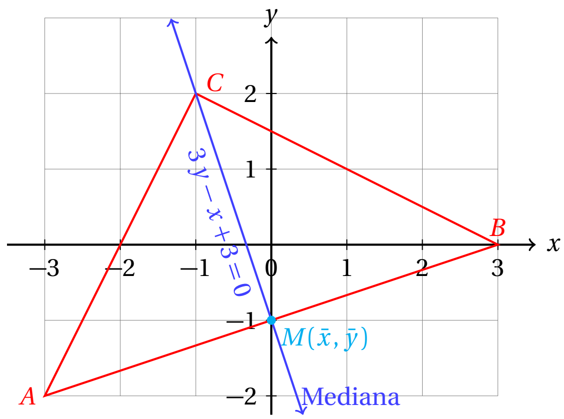
$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0+2}{3+3} = \frac{1}{3}$$

- Ahora encontramos la ecuación de la recta usando la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y-(-1) &= \left(\frac{1}{3}\right)(x-0) \\ y+1 &= \frac{1}{3}x \\ 3(y+1) &= x \\ 3y+3-x &= 0 \end{aligned}$$

- Entonces, la ecuación de esa mediana es: $x-3y-3=0$.

- La siguiente figura muestra la situación del problema:



Reto 1 Simplemente observando la figura del ejemplo anterior y sin utilizar álgebra, encuentra la ecuación de la mediana que pasa por el punto medio del lado $\overline{AC}$.

Podemos generalizar este problema un poco más si en lugar de encontrar la ecuación de una mediatriz solamente, nos avocamos a calcular las ecuaciones de las tres mediatrices del triángulo.

Podemos generalizar todavía más este problema si nos decidimos calcular la mediatriz de un triángulo que pasa por el punto medio de un lado dadas las coordenadas de sus vértices: $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ y $C(x_c, y_c)$.

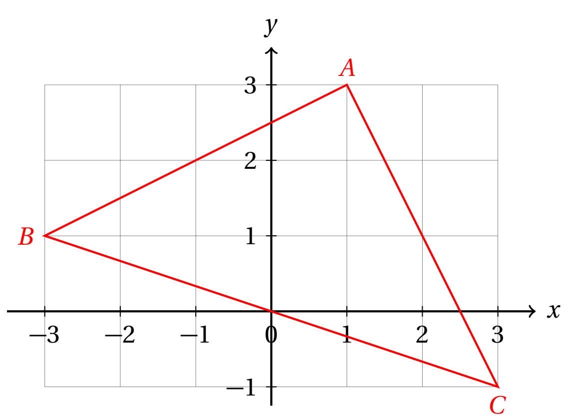
Siempre que tengas que calcular una ecuación, particularmente en estos problemas, se sugiere que siempre dibujes primero un gráfico que ilustre la situación.

Así tendrás acceso a información que no es evidente del texto del problema.

La gráfica siempre te ayudará de guia para tener orden en tus procedimientos y cálculos.

Ejemplo 7 Calcula las ecuaciones de las tres medianas del triángulo que tiene sus vértices en los puntos $A(1,3)$, $B(-3,1)$ y $C(3,-1)$.

- Vamos a dibujar un gráfico para ordenar ideas:

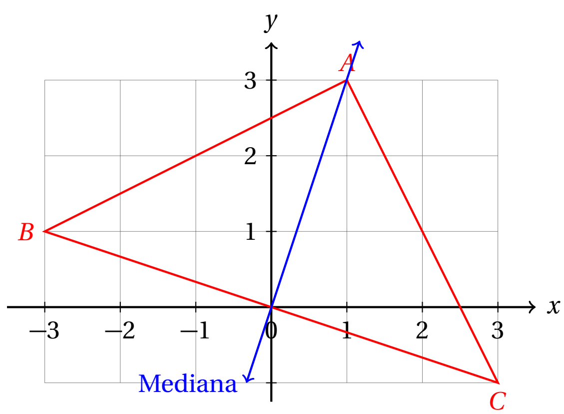


- Para tener un orden, primero vamos a calcular la mediana que pasa por el vértice A, después la mediana que pasa por el punto B y finalmente la que pasa por el punto C.

- **Mediana que pasa por $A(1,3)$**
- Calculamos las coordenadas del punto medio del lado $\overline{BC}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1+x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{-3+3}{2} \\ \bar{x} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1+y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{1-1}{2} \\ \bar{y} &= 0 \end{aligned}$$

- El punto medio del lado $\overline{BC}$ es el origen del sistema de coordenadas.



- Ahora encontramos la pendiente de la mediana que pasa por los puntos $M_{BC}(0,0)$ y $A(1,3)$:

$$m = \frac{3-0}{1-0} = 3$$

- Ahora sustituimos los datos conocidos en la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y-0 &= 3(x-0) \\ y &= 3x \end{aligned}$$

- Entonces, la ecuación de la mediana que pasa por el punto medio del lado $\overline{BC}$ y por el vértice $A(1,3)$ es:

$$3x - y = 0$$

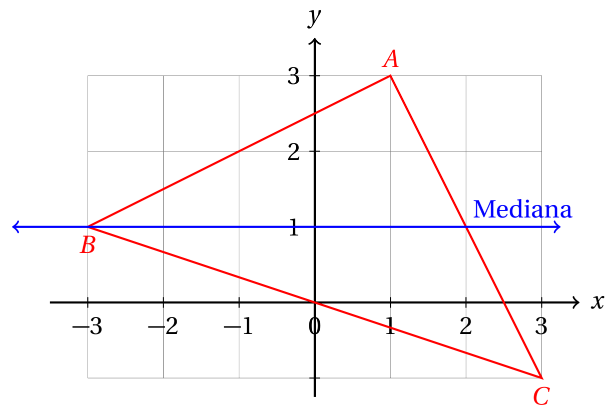
- **Mediana que pasa por $B(-3,1)$**
- Calculamos el punto medio del lado $\overline{AC}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1+x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{1+3}{2} \\ \bar{x} &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1+y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{3-1}{2} \\ \bar{y} &= 1 \end{aligned}$$

- El punto medio del segmento es: $M_{AC}(2,1)$.
- Calculamos la pendiente de la mediana que pasa por los puntos: $M_{AC}(2,1)$ y $B(-3,1)$

$$m = \frac{1-1}{-3-2} = 0$$

- La pendiente de esta recta es cero.
- Esto nos indica que la recta es horizontal.



- Calculamos la ecuación con la ecuación en su forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= 0(x - (-3)) \\ y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación de la mediana.

- **Mediana que pasa por** $C(3,-1)$
- Calculamos el punto medio del lado $\overline{AB}$:

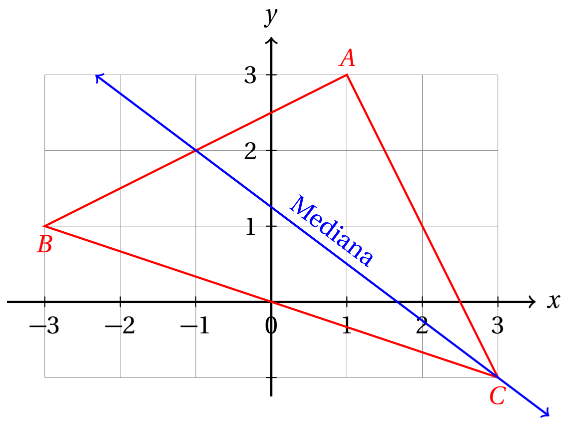
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{1-3}{2} \\ \bar{x} &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{3+1}{2} \\ \bar{y} &= 2 \end{aligned}$$

- Es decir, $M_{AB}(-1,2)$.
- Ahora calculamos la pendiente de la mediana, sabiendo que pasa por los puntos $M_{AB}(-1,2)$ y $C(3,-1)$:

$$m = \frac{-1-2}{3-(-1)} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

- Ahora calculamos la ecuación de la mediana usando los datos que ya conocemos:

$$\begin{aligned} y - (-1) &= \left(-\frac{3}{4}\right)(x-3) \\ 4(y+1) &= -3(x-3) \\ 4y + 4 &= -3x + 9 \\ 3x + 4y - 5 &= 0 \end{aligned}$$



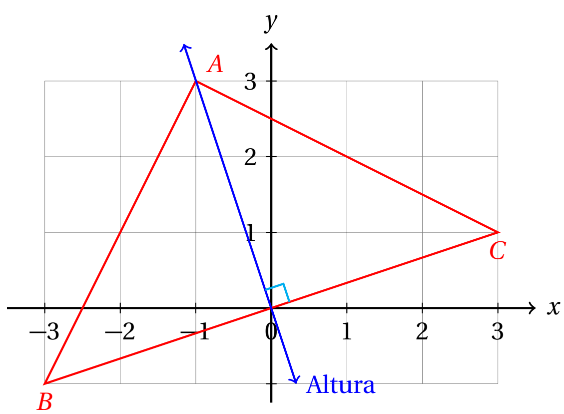
Verifica que las tres medianas del triángulo del ejemplo anterior se cortan en un solo punto. **Reto 2**

3. ALTURAS

Debes recordar que una altura es la recta que es perpendicular a un lado del triángulo y que pasa por el vértice opuesto al lado considerado.

Un triángulo tiene sus vértices en los puntos $A(-1,3)$, $B(-3,-1)$ y $C(3,1)$. Calcula la ecuación de la altura del triángulo que pasa por el vértice A. **Ejemplo 8**

- Dado que la altura es perpendicular a la base, tenemos que encontrar la pendiente de la base y podremos entonces calcular la pendiente de la altura con la condición de perpendicularidad.



- En este caso, las base es el lado $\overline{BC}$.
- Calculamos su pendiente:

$$m_{BC} = \frac{1-(-1)}{3-(-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- La pendiente de la altura es igual al recíproco de signo cambiado de la pendiente del lado $\overline{BC}$:

$$m_{\perp BC} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} = -3$$

- Ahora podemos calcular la ecuación de la recta, porque sabemos que pasa por el punto $A(-1,3)$ y tiene pendiente $m=3$.

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1)\\ y-3 &= -3(x-(-1))\\ y-3 &= -3x-3\\ 3x+y &= 0 \end{aligned}$$

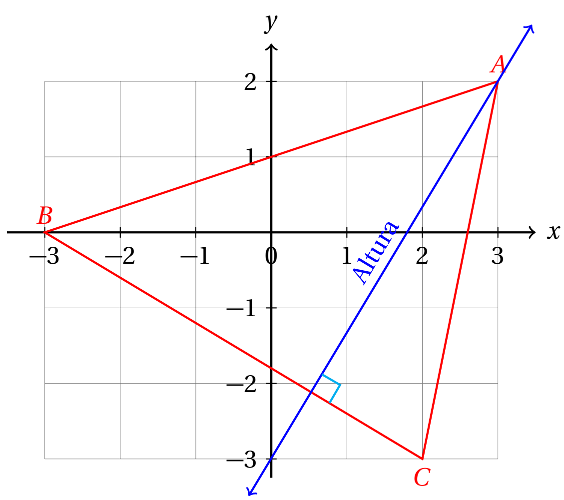
Ahora vamos a calcular las ecuaciones de las tres alturas de un triángulo.

Ejemplo 9 Un triángulo tiene sus vértices en los puntos $A(3,2)$, $B(-3,0)$ y $C(2,-3)$. Calcula las ecuaciones de cada una de sus alturas.

- Iniciamos calculando en el orden alfabético.

- Primero calculamos la ecuación de la altura que pasa por el punto $A(3,2)$ y es perpendicular al lado $\overline{BC}$.

- **Altura que pasa por el punto** $A(3,2)$



- Calculamos la pendiente del lado $\overline{BC}$

$$m_{BC}=\frac{-3-0}{2-(-3)}=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$$

- La pendiente de la altura es el recíproco de signo cambiado, porque es perpendicular al lado $\overline{BC}$:

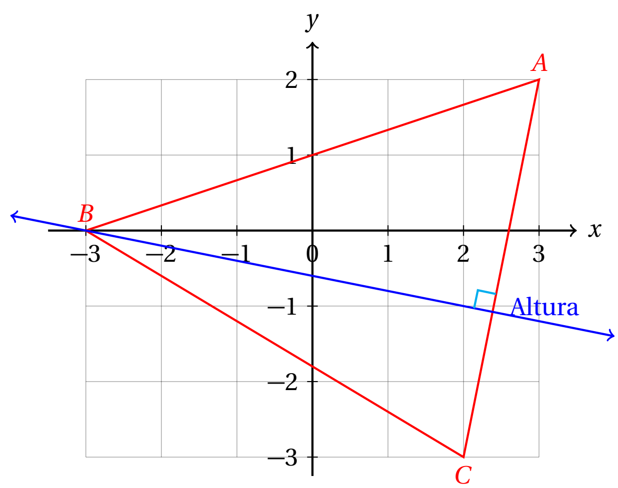
$$m_{h_A}=-\frac{1}{m_{BC}}=-\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{5}{3}$$

- Ahora podemos calcular la ecuación de esa altura, porque ya conocemos su pendiente y un punto por el cual pasa:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= \left(\frac{5}{3}\right)(x - 3) \\ 3(y - 2) &= 5(x - 3) \\ 3y - 6 &= 5x - 15 \\ -5x + 3y + 9 &= 0 \end{aligned}$$

- Entonces, la ecuación de la altura es: $5x - 3y - 9 = 0$.
- Vamos con el siguiente caso.

- **Altura que pasa por el punto** $B(-3, 0)$



- Calculamos la pendiente del lado AC:

$$m_{AC} = \frac{-3-2}{2-3} = \frac{-5}{-1} = 5$$

- La pendiente de esta altura es:

$$m_{h_B} = -\frac{1}{m_{AC}} = -\frac{1}{5}$$

- Y la ecuación de esta altura es:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 0 &= -\frac{1}{5}(x - (-3)) \\ 5y &= -x - 3 \\ x + 5y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

- Vamos con el último caso

- **Altura que pasa por el punto $C(2,-3)$**
- Calculamos la pendiente del lado $\overline{AB}$:

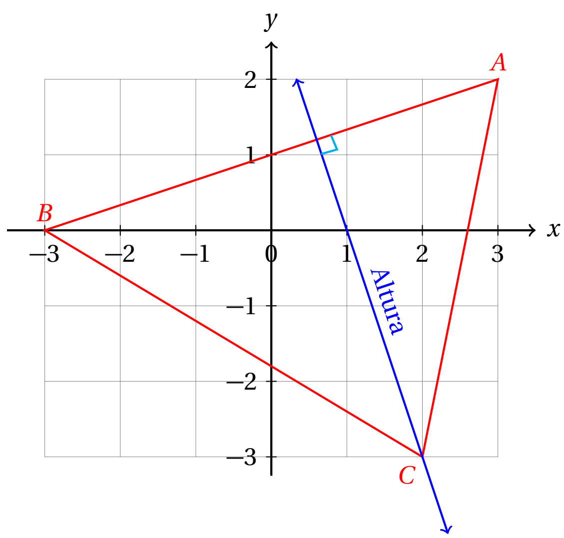
$$m_{AB} = \frac{2-0}{3-(-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- Ahora podemos conocer la pendiente de esta altura:

$$m_{h_C} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} = -3$$

- Finalmente, calculamos la ecuación de esta altura:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y-(-3) &= -3(x-2) \\ y+3 &= -3x+6 \\ 3x+y-3 &= 0 \end{aligned}$$



4. MEDIATRICES

Ya sabemos que la mediatriz de un segmento es la recta que pasa por su punto medio y además es perpendicular al mismo.

Ejemplo 10 Un triángulo tiene sus vértices en los puntos $A(0,-3)$, $B(3,2)$ y $C(-1,1)$. Encuentra la mediatriz del lado $\overline{AB}$.

- Sabemos que la mediatriz pasa por el punto medio del lado $\overline{AB}$.
- Por eso necesitamos conocer la pendiente de ese lado:

$$m_{AB} = \frac{2-(-3)}{3-0} = \frac{5}{3}$$

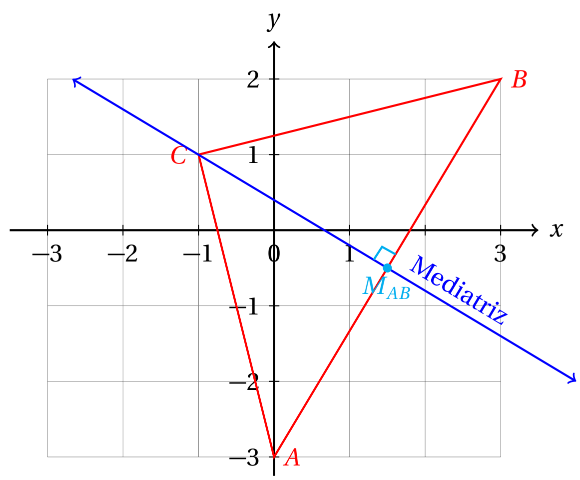
- La pendiente de la mediatriz, por ser perpendicular al lado $\overline{AB}$ es:

$$m_{\perp AB} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)} = -\frac{3}{5}$$

- Ya conocemos la pendiente de la mediatriz, pero necesitamos conocer, además, un punto por el cual pase.

- Ese punto es el punto medio del lado $\overline{AB}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{0+3}{2} \\ \bar{x} &= \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{-3+2}{2} \\ \bar{y} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



- Ahora podemos calcular la ecuación de esta altura:

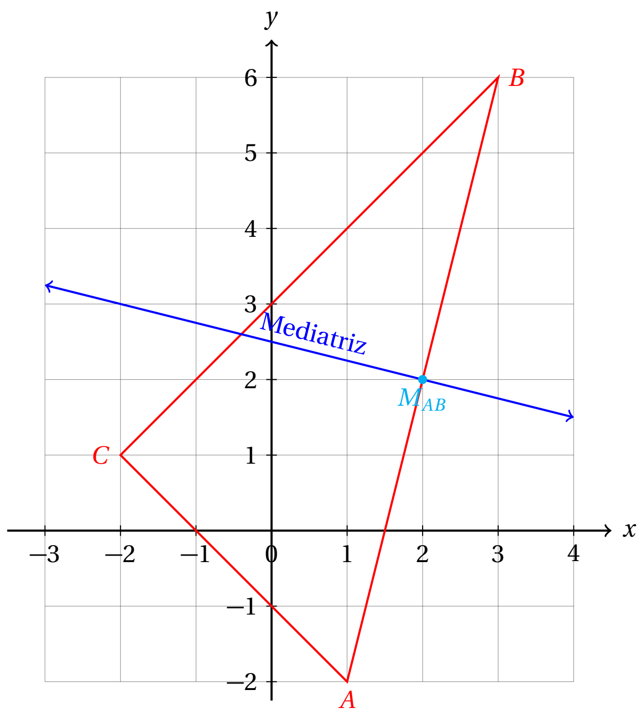
$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - \frac{1}{2} &= \left(-\frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ 5\left(y - \frac{1}{2}\right) &= -3,\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ \\ 5\,y - \frac{5}{2} &= -3\,x + \frac{9}{2} \\ 3\,x + 5\,y - 7 &= 0 \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación de la mediatriz del lado $\overline{AB}$.

Un triángulo tiene sus vértices en los puntos $A(1,-2)$, $B(3,6)$ y $C(-2,1)$. Encuentra las ecuaciones de las mediatrices de todos sus lados. **Ejemplo 11**

- De nuevo, iniciamos en orden alfabético.

- **Mediatriz del lado $\overline{AB}$**



- Calculamos la pendiente del lado $\overline{AB}$:

$$m = \frac{6-(-2)}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$$

- La pendiente de la mediatriz la calculamos con la condición de perpendicularidad:

$$m_{\perp AB} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{4}$$

- Conocemos una condición. (La pendiente de la mediatriz)

- Falta la segunda: un punto por donde debe pasar la mediatriz.

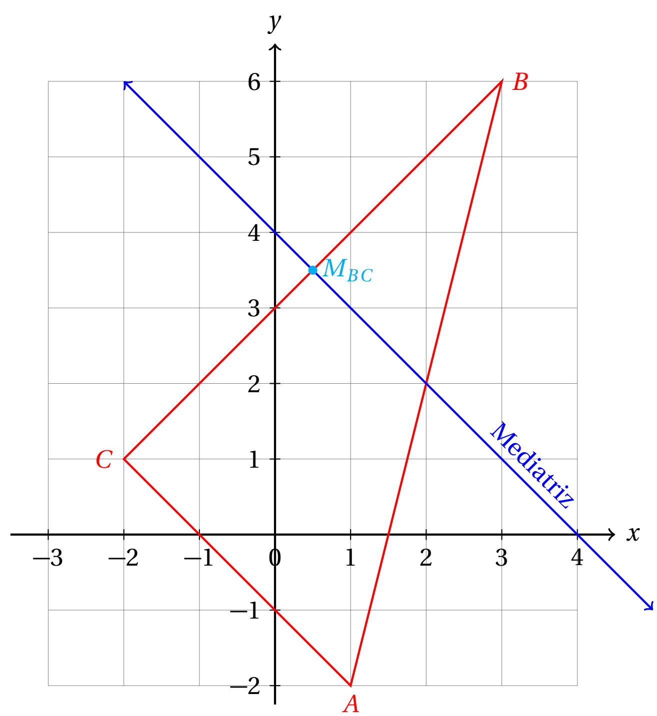
- Calculamos el punto medio de ese mismo lado:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1+x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{1+3}{2} \\ \bar{x} &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1+y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{-2+6}{2} \\ \bar{y} &= 2 \end{aligned}$$

- Ahora calculamos la ecuación de la recta con la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= \left(-\frac{1}{4}\right)(x - 2) \\ 4(y - 2) &= -(x - 2) \\ 4y - 8 &= -x + 2 \\ x + 4y - 10 &= 0 \end{aligned}$$

- **Mediatriz del lado $\overline{BC}$**



- Encontramos el valor de la pendiente del lado $\overline{BC}$:

$$m = \frac{1-6}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

- La pendiente de la mediatriz de este lado debe ser -1.

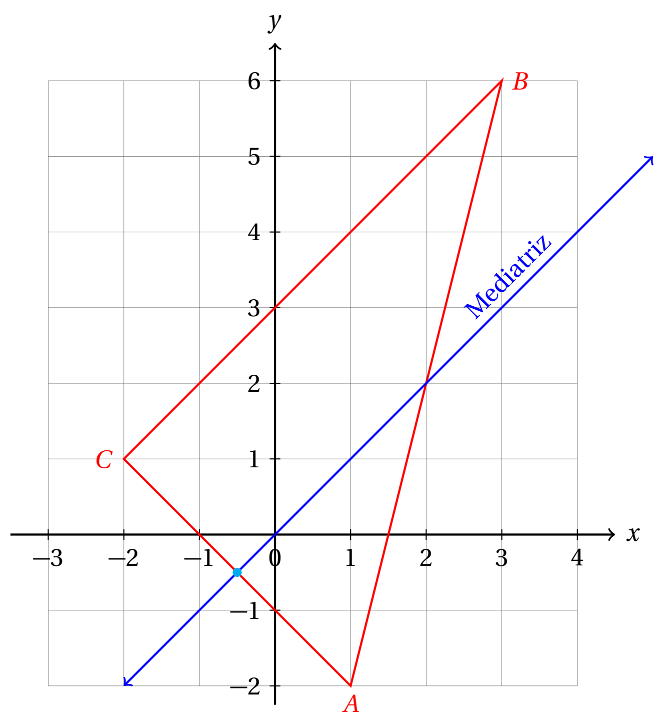
- Ahora calculamos las coordenadas del punto medio de ese lado.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{3-2}{2} \\ \bar{x} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \bar{y} &= \frac{6+1}{2} \\ \bar{y} &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

- Ahora podemos calcular la ecuación de la mediatriz de ese lado:

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= m\,(x - x_1)\\
y - \frac{7}{2} &= (-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\\
y - \frac{7}{2} &= -x + \frac{1}{2}\\
2\,y - 7 &= -2\,x + 1\\
2\,x + 2\,y - 8 &= 0\\
x + y - 4 &= 0
\end{aligned}$$

- **Mediatriz del lado $\overline{AC}$**



- Empezamos calculando la pendiente de este lado:

$$m = \frac{1-(-2)}{-2-1} = \frac{3}{-3} = -1$$

- La pendiente de la mediatriz de este lado es: 1
- Ahora calculamos el punto medio de este lado:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2} & \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2}{2}\\
\bar{x} &= \frac{-2+1}{2} & \bar{y} &= \frac{-2+1}{2}\\
\bar{x} &= -\frac{1}{2} & \bar{y} &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- Finalmente, calculamos la ecuación de la mediatriz con los datos que acabamos de encontrar:

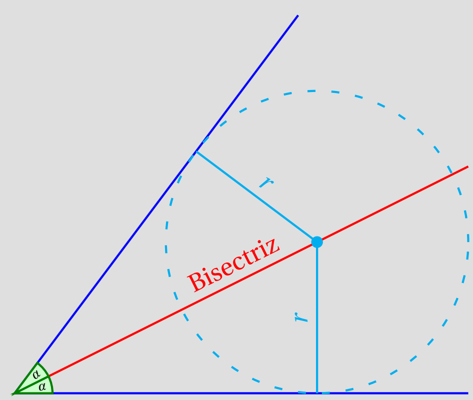
$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - \left(-\frac{1}{2}\right) &= (1)\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\
y + \frac{1}{2} &= x + \frac{1}{2} \\
y &= x
\end{aligned}
$$

Verifica que las tres mediatrices del triángulo del ejemplo anterior se cortan en un solo punto.	**Reto 3**

5. BISECTRICES

Una bisectriz es la recta que divide a un ángulo en dos partes iguales. Podemos decir que la bisectriz es el eje de simetría del ángulo. Vamos a encontrar bisectrices de los ángulos de triángulos. Para eso, primero tenemos que recordar la siguiente propiedad de la bisectriz de un ángulo:

Cada punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo:



También vamos a necesitar la siguiente propiedad del valor absoluto:

$$|x| = a \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases}$$

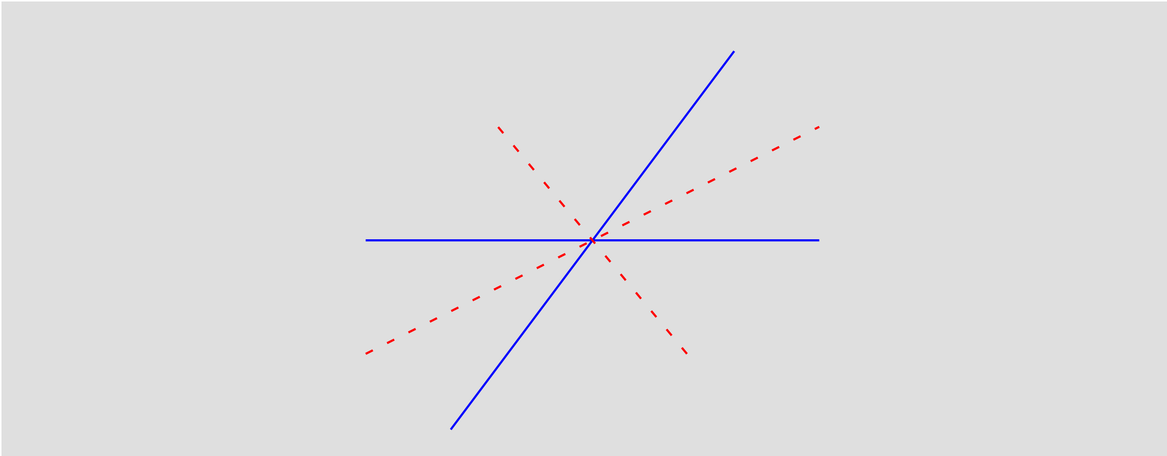
Para verificar que esto se cumple, puedes dar valores al número a y sustituir en la propiedad.

Por ejemplo, supongamos que $a = 5$. Entonces, $|x| = 5$ se cumple para $x = 5$ y para $x = -5$, porque $|5| = 5$ y también $|-5| = 5$.

Vamos a utilizar esta propiedad en la fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta. En esta fórmula está incluida la función valor absoluto (en el numerador).

Entonces, tendremos dos soluciones, una cuando el argumento de esa función sea positivo y otra cuando el argumento sea negativo.

Y esto tiene sentido geométricamente, porque para dos rectas que se cortan, podemos encontrar dos bisectrices:

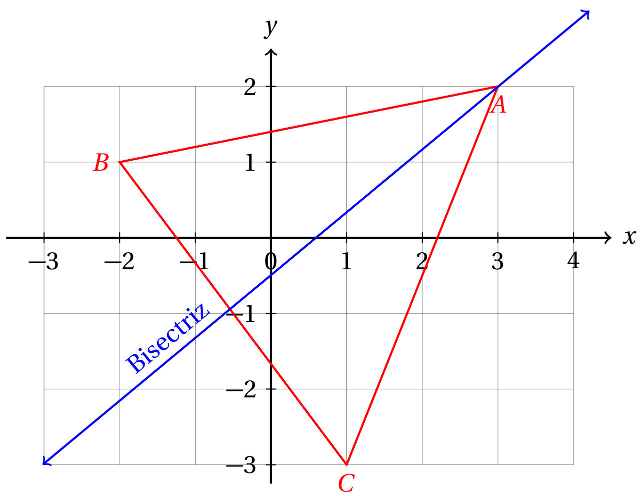


Nosotros solamente nos preocuparemos en que la bisectriz realmente esté dentro del triángulo. Para esto, vamos a necesitar graficar la ecuación de la bisectriz que hayamos obtenido de nuestros cálculos y verificar que es así.

Otra forma de verificar consiste en calcular la distancia a un punto y ver gráficamente que la medida tiene sentido con respecto a la bisectriz que calculamos y que no tendría sentido con respecto a la otra bisectriz.

Ejemplo 12 Calcula la ecuación de la bisectriz que pasa por el vértice A del triángulo que tiene sus vértices en los puntos $A(3,2)$, $B(-2,1)$ y $C(1,-3)$

- Empezamos graficando el triángulo y vemos de qué lados equidistan los puntos de esa bisectriz:



- De la figura es evidente que la bisectriz equidista de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
- Entonces, primero debemos encontrar las ecuaciones de esos lados del triángulo.

- **Ecuación del lado $\overline{AB}$**
- Primero calculamos su pendiente:

$$m_{AB} = \frac{2-1}{3+2} = \frac{1}{5}$$

- Ahora podemos calcular su ecuación:

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1)\\
y - 2 &= \left(\frac{1}{5}\right)(x-3)\\
5(y-2) &= x - 3\\
5y - 10 &= x - 3\\
x - 5y + 7 &= 0
\end{aligned}$$

- Ya encontramos la ecuación del lado $\overline{AB}$.

- **Ecuación del lado $\overline{AC}$**
- Calculamos su pendiente:

$$m_{AC} = \frac{-3-2}{1-3} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

- Ahora calculamos su ecuación:

$$\begin{aligned}
y - 2 &= \left(\frac{5}{2}\right)(x-3)\\
2(y-2) &= 5(x-3)\\
2y - 4 &= 5x - 15\\
5x - 2y - 11 &= 0
\end{aligned}$$

- **Ecuación de la bisectriz**
- Sabemos que todo punto $P(x, y)$ sobre la bisectriz, equidista de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
- Algebraicamente, esto se representa como:

$$\frac{|5x - 2y - 11|}{\sqrt{25+4}} = \frac{|x - 5y + 7|}{\sqrt{1+25}}$$

- Vamos a resolver esta ecuación.
- Observa que tenemos dos valores absolutos.
- **Caso I**
- Primero vamos a considerar los argumentos de ambos valores absolutos positivos.

$$\begin{aligned}
\frac{5x - 2y - 11}{\sqrt{29}} &= \frac{x - 5y + 7}{\sqrt{26}}\\
\sqrt{26}(5x - 2y - 11) &= \sqrt{29}(x - 5y + 7)\\
5\sqrt{26}\,x - 2\sqrt{26}\,y - 11\sqrt{26} &= \sqrt{29}\,x - 5\sqrt{29}\,y + 7\sqrt{29}
\end{aligned}$$

- Ahora podemos simplificar esta ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\left(5\sqrt{26} - \sqrt{29}\right)x + \left(5\sqrt{29} - 2\sqrt{26}\right)y - \left(11\sqrt{26} + 7\sqrt{29}\right) &= 0\\
20.1099\,x + 16.7278\,y - 93.7854 &= 0
\end{aligned}$$

- Ahora debemos verificar que esta ecuación es la de la mediatriz que corta al ángulo interno del triángulo.
- Para eso, despejamos y y obtenemos:

$$y=\frac{-20.1099\,x+93.7854}{16.7278}=-1.2\,x+5.6$$

- En esta ecuación la pendiente es negativa, lo que nos indica que la recta es decreciente.
- Es decir, cuando incrementamos en x hay una disminución en y.
- Pero la gráfica de la bisectriz es creciente, por lo que tenemos que ir al siguiente caso.

- **Caso II**
- Ahora vamos a intentar resolver con un argumento de la función valor absoluto positivo y el otro negativo.

$$\begin{aligned}
\frac{-(5\,x-2\,y-11)}{\sqrt{29}} &= \frac{x-5\,y+7}{\sqrt{26}}\\
\frac{-5\,x+2\,y+11}{\sqrt{29}} &= \frac{x-5\,y+7}{\sqrt{26}}\\
\sqrt{26}\left(-5\,x+2\,y+11\right) &= \sqrt{29}\left(x-5\,y+7\right)\\
-5\sqrt{26}\,x+2\sqrt{26}\,y+11\sqrt{26} &= \sqrt{29}\,x-5\sqrt{29}\,y+7\sqrt{29}
\end{aligned}$$

- Simplificando, obtenemos:

$$\begin{aligned}
-\left(5\sqrt{26}+\sqrt{29}\right)x+\left(2\sqrt{26}+5\sqrt{29}\right)y+\left(11\sqrt{26}-7\sqrt{29}\right) &= 0\\
-30.8803\,x+37.1239\,y+18.3931 &= 0
\end{aligned}$$

- Al despejar y para conocer la pendiente y ordenada al origen de esta ecuación obtenemos:

$$y=\frac{30.8803\,x-18.3931}{37.1239}=0.8318\,x-0.4955$$

- Esta es la ecuación de la mediatriz del ángulo $\angle A$.

En cualquier ejercicio, siempre bastará con probar los dos casos. Pues en estos dos casos están contenidos los 4 posibles casos de la igualdad:

$$\begin{aligned}
\frac{|A_1\,x+B_1\,y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} &= \frac{|A_2\,x+B_2\,y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\\
\frac{|\ell_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} &= \frac{|\ell_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}
\end{aligned}$$

Los cuatro casos posibles consisten en que el argumento de las funciones valor absoluto sean, bien positivo, bien negativo.

Ejercicios 10.2 A partir de los puntos dados, calcula la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados y exprésala en cada una de las formas que se indica.

1) $P(-8,2)$ y $Q(6,8)$.

F. Punto-pendiente: $y-2=\frac{3}{7}(x+8)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\frac{3}{7}x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{-\frac{38}{3}}+\frac{y}{\frac{38}{7}}=1$

F. General: $3x-7y+38=0$

F. Normal: $\frac{3x}{\sqrt{58}}-\frac{7y}{\sqrt{58}}+\frac{38}{\sqrt{58}}=0$

2) $P(1,3)$ y $Q(2,-1)$.

F. Punto-pendiente: $y-3=-4(x-1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-4x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{7}{4}}+\frac{y}{\frac{7}{1}}=1$

F. General: $-4x-1y+7=0$

F. Normal: $\frac{-4x}{\sqrt{17}}-\frac{1y}{\sqrt{17}}+\frac{7}{\sqrt{17}}=0$

3) $P(-9,7)$ y $Q(8,-1)$.

F. Punto-pendiente: $y-7=-\frac{8}{17}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\frac{8}{17}x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{47}{8}}+\frac{y}{\frac{47}{17}}=1$

F. General: $-8x-17y+47=0$

F. Normal: $\frac{-8x}{\sqrt{353}}-\frac{17y}{\sqrt{353}}+\frac{47}{\sqrt{353}}=0$

4) $P(-9,6)$ y $Q(8,3)$.

F. Punto-pendiente: $y-6=-\frac{3}{17}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\frac{3}{17}x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{75}{3}}+\frac{y}{\frac{75}{17}}=1$

F. General: $-3x-17y+75=0$

F. Normal: $\frac{-3x}{\sqrt{298}}-\frac{17y}{\sqrt{298}}+\frac{75}{\sqrt{298}}=0$

5) $P(-4,4)$ y $Q(9,-8)$.

F. Punto-pendiente: $y-4=-\dfrac{12}{13}(x+4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{12}{13}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\dfrac{4}{12}}+\dfrac{y}{\dfrac{4}{13}}=1$

F. General: $-12x-13y+4=0$

F. Normal: $\dfrac{-12x}{\sqrt{313}}-\dfrac{13y}{\sqrt{313}}+\dfrac{4}{\sqrt{313}}=0$

6) $P(-7,2)$ y $Q(9,-8)$.

F. Punto-pendiente: $y-2=-\dfrac{5}{8}(x+7)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{5}{8}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\dfrac{19}{5}}+\dfrac{y}{-\dfrac{19}{8}}=1$

F. General: $-5x-8y-19=0$

F. Normal: $\dfrac{-5x}{\sqrt{89}}-\dfrac{8y}{\sqrt{89}}-\dfrac{19}{\sqrt{89}}=0$

7) $P(-3,5)$ y $Q(2,-7)$.

F. Punto-pendiente: $y-5=-\dfrac{12}{5}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{12}{5}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\dfrac{11}{12}}+\dfrac{y}{-\dfrac{11}{5}}=1$

F. General: $-12x-5y-11=0$

F. Normal: $\dfrac{-12x}{\sqrt{169}}-\dfrac{5y}{\sqrt{169}}-\dfrac{11}{\sqrt{169}}=0$

8) $P(3,8)$ y $Q(5,4)$.

F. Punto-pendiente: $y-8=-2(x-3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-2x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\dfrac{14}{2}}+\dfrac{y}{\dfrac{14}{1}}=1$

F. General: $-2x-1y+14=0$

F. Normal: $\dfrac{-2x}{\sqrt{5}}-\dfrac{1y}{\sqrt{5}}+\dfrac{14}{\sqrt{5}}=0$

9) $P(5,7)$ y $Q(7,1)$.

F. Punto-pendiente: $y-7=-3(x-5)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-3x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{22}{3}} + \dfrac{y}{\frac{22}{1}} = 1$

F. General: $-3\,x - 1\,y + 22 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-3\,x}{\sqrt{10}} - \dfrac{1\,y}{\sqrt{10}} + \dfrac{22}{\sqrt{10}} = 0$

10) $P(-9,1)$ y $Q(9,-7)$.

F. Punto-pendiente: $y - 1 = -\dfrac{4}{9}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{4}{9}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{27}{4}} + \dfrac{y}{-\frac{27}{9}} = 1$

F. General: $-4\,x - 9\,y - 27 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-4\,x}{\sqrt{97}} - \dfrac{9\,y}{\sqrt{97}} - \dfrac{27}{\sqrt{97}} = 0$

11) $P(-9,2)$ y $Q(9,-6)$.

F. Punto-pendiente: $y - 2 = -\dfrac{4}{9}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{4}{9}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{18}{4}} + \dfrac{y}{-\frac{18}{9}} = 1$

F. General: $-4\,x - 9\,y - 18 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-4\,x}{\sqrt{97}} - \dfrac{9\,y}{\sqrt{97}} - \dfrac{18}{\sqrt{97}} = 0$

12) $P(-9,4)$ y $Q(5,-1)$.

F. Punto-pendiente: $y - 4 = -\dfrac{5}{14}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{5}{14}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{11}{5}} + \dfrac{y}{\frac{11}{14}} = 1$

F. General: $-5\,x - 14\,y + 11 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-5\,x}{\sqrt{221}} - \dfrac{14\,y}{\sqrt{221}} + \dfrac{11}{\sqrt{221}} = 0$

13) $P(-9,7)$ y $Q(7,9)$.

F. Punto-pendiente: $y - 7 = \dfrac{1}{8}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = \dfrac{1}{8}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{65}{1}} + \dfrac{y}{\frac{65}{8}} = 1$

F. General: $1\,x - 8\,y + 65 = 0$

F. Normal: $\dfrac{1\,x}{\sqrt{65}} - \dfrac{8\,y}{\sqrt{65}} + \dfrac{65}{\sqrt{65}} = 0$

14) $P(8,2)$ y $Q(2,-4)$.

F. Punto-pendiente: $y - 2 = 1\,(x - 8)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = 1\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{18}{3}} + \dfrac{y}{-\frac{18}{3}} = 1$

F. General: $-3\,x + 3\,y + 18 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-3\,x}{\sqrt{18}} + \dfrac{3\,y}{\sqrt{18}} + \dfrac{18}{\sqrt{18}} = 0$

15) $P(4,9)$ y $Q(8,-5)$.

F. Punto-pendiente: $y - 9 = -\dfrac{7}{2}\,(x - 4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{7}{2}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{46}{7}} + \dfrac{y}{\frac{46}{2}} = 1$

F. General: $-7\,x - 2\,y + 46 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-7\,x}{\sqrt{53}} - \dfrac{2\,y}{\sqrt{53}} + \dfrac{46}{\sqrt{53}} = 0$

16) $P(-9,4)$ y $Q(9,-8)$.

F. Punto-pendiente: $y - 4 = -\dfrac{6}{9}\,(x + 9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{6}{9}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{18}{6}} + \dfrac{y}{-\frac{18}{9}} = 1$

F. General: $-6\,x - 9\,y - 18 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-6\,x}{\sqrt{117}} - \dfrac{9\,y}{\sqrt{117}} - \dfrac{18}{\sqrt{117}} = 0$

17) $P(-9,6)$ y $Q(3,8)$.

F. Punto-pendiente: $y - 6 = \dfrac{1}{6}\,(x + 9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = \dfrac{1}{6}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{45}{1}} + \dfrac{y}{\frac{45}{6}} = 1$

F. General: $1\,x - 6\,y + 45 = 0$

F. Normal: $\dfrac{1\,x}{\sqrt{37}} - \dfrac{6\,y}{\sqrt{37}} + \dfrac{45}{\sqrt{37}} = 0$

18) $P(-3,2)$ y $Q(7,-7)$.

F. Punto-pendiente: $y-2=-\frac{9}{10}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\frac{9}{10}x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{-\frac{7}{9}}+\frac{y}{-\frac{7}{10}}=1$

F. General: $-9x-10y-7=0$

F. Normal: $\frac{-9x}{\sqrt{181}}-\frac{10y}{\sqrt{181}}-\frac{7}{\sqrt{181}}=0$

19) $P(-8,5)$ y $Q(1,-9)$.

F. Punto-pendiente: $y-5=-\frac{14}{9}(x+8)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\frac{14}{9}x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{-\frac{67}{14}}+\frac{y}{-\frac{67}{9}}=1$

F. General: $-14x-9y-67=0$

F. Normal: $\frac{-14x}{\sqrt{277}}-\frac{9y}{\sqrt{277}}-\frac{67}{\sqrt{277}}=0$

20) $P(2,6)$ y $Q(1,-3)$.

F. Punto-pendiente: $y-6=9(x-2)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=9x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{12}{9}}+\frac{y}{-\frac{12}{1}}=1$

F. General: $-9x+1y+12=0$

F. Normal: $\frac{-9x}{\sqrt{82}}+\frac{1y}{\sqrt{82}}+\frac{12}{\sqrt{82}}=0$

21) $P(-2,7)$ y $Q(2,-3)$.

F. Punto-pendiente: $y-7=-\frac{5}{2}(x+2)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\frac{5}{2}x-2$

F. Simétrica: $\frac{x}{\frac{4}{5}}+\frac{y}{\frac{4}{2}}=1$

F. General: $-5x-2y+4=0$

F. Normal: $\frac{-5x}{\sqrt{29}}-\frac{2y}{\sqrt{29}}+\frac{4}{\sqrt{29}}=0$

22) $P(-5,8)$ y $Q(4,2)$.

F. Punto-pendiente: $y-8=-\frac{6}{9}(x+5)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\frac{6}{9}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{42}{6}} + \dfrac{y}{\frac{42}{9}} = 1$

F. General: $-6\,x - 9\,y + 42 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-6\,x}{\sqrt{117}} - \dfrac{9\,y}{\sqrt{117}} + \dfrac{42}{\sqrt{117}} = 0$

23) $P(6,3)$ y $Q(7,-2)$.

F. Punto-pendiente: $y - 3 = -5(x - 6)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -5\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{33}{5}} + \dfrac{y}{\frac{33}{1}} = 1$

F. General: $-5\,x - 1\,y + 33 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-5\,x}{\sqrt{26}} - \dfrac{1\,y}{\sqrt{26}} + \dfrac{33}{\sqrt{26}} = 0$

24) $P(-1,8)$ y $Q(8,-9)$.

F. Punto-pendiente: $y - 8 = -\dfrac{17}{9}(x + 1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{17}{9}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{55}{17}} + \dfrac{y}{\frac{55}{9}} = 1$

F. General: $-17\,x - 9\,y + 55 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-17\,x}{\sqrt{370}} - \dfrac{9\,y}{\sqrt{370}} + \dfrac{55}{\sqrt{370}} = 0$

25) $P(4,3)$ y $Q(7,5)$.

F. Punto-pendiente: $y - 3 = \dfrac{2}{3}(x - 4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = \dfrac{2}{3}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{1}{2}} + \dfrac{y}{\frac{1}{3}} = 1$

F. General: $2\,x - 3\,y + 1 = 0$

F. Normal: $\dfrac{2\,x}{\sqrt{13}} - \dfrac{3\,y}{\sqrt{13}} + \dfrac{1}{\sqrt{13}} = 0$

26) $P(4,7)$ y $Q(9,6)$.

F. Punto-pendiente: $y - 7 = -\dfrac{1}{5}(x - 4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{1}{5}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{39}{1}} + \dfrac{y}{\frac{39}{5}} = 1$

F. General: $-1\,x - 5\,y + 39 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-1\,x}{\sqrt{26}} - \dfrac{5\,y}{\sqrt{26}} + \dfrac{39}{\sqrt{26}} = 0$

27) $P(-4,7)$ y $Q(7,-3)$.

F. Punto-pendiente: $y-7 = -\dfrac{10}{11}(x+4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\dfrac{10}{11}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{37}{10}} + \dfrac{y}{\frac{37}{11}} = 1$

F. General: $-10\,x - 11\,y + 37 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-10\,x}{\sqrt{221}} - \dfrac{11\,y}{\sqrt{221}} + \dfrac{37}{\sqrt{221}} = 0$

28) $P(-9,6)$ y $Q(5,7)$.

F. Punto-pendiente: $y-6 = \dfrac{1}{14}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = \dfrac{1}{14}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{93}{1}} + \dfrac{y}{\frac{93}{14}} = 1$

F. General: $1\,x - 14\,y + 93 = 0$

F. Normal: $\dfrac{1\,x}{\sqrt{197}} - \dfrac{14\,y}{\sqrt{197}} + \dfrac{93}{\sqrt{197}} = 0$

29) $P(9,3)$ y $Q(3,-5)$.

F. Punto-pendiente: $y-3 = \dfrac{4}{3}(x-9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = \dfrac{4}{3}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{27}{4}} + \dfrac{y}{-\frac{27}{3}} = 1$

F. General: $-4\,x + 3\,y + 27 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-4\,x}{\sqrt{25}} + \dfrac{3\,y}{\sqrt{25}} + \dfrac{27}{\sqrt{25}} = 0$

30) $P(8,3)$ y $Q(1,-2)$.

F. Punto-pendiente: $y-3 = \dfrac{5}{7}(x-8)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = \dfrac{5}{7}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{19}{5}} + \dfrac{y}{-\frac{19}{7}} = 1$

F. General: $-5\,x + 7\,y + 19 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-5\,x}{\sqrt{74}} + \dfrac{7\,y}{\sqrt{74}} + \dfrac{19}{\sqrt{74}} = 0$

31) $P(-3,1)$ y $Q(4,3)$.

F. Punto-pendiente: $y-1=\dfrac{2}{7}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{2}{7}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\frac{13}{2}}+\dfrac{y}{\frac{13}{7}}=1$

F. General: $2x-7y+13=0$

F. Normal: $\dfrac{2x}{\sqrt{53}}-\dfrac{7y}{\sqrt{53}}+\dfrac{13}{\sqrt{53}}=0$

32) $P(-9,6)$ y $Q(8,1)$.

F. Punto-pendiente: $y-6=-\dfrac{5}{17}(x+9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{5}{17}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{57}{5}}+\dfrac{y}{\frac{57}{17}}=1$

F. General: $-5x-17y+57=0$

F. Normal: $\dfrac{-5x}{\sqrt{314}}-\dfrac{17y}{\sqrt{314}}+\dfrac{57}{\sqrt{314}}=0$

33) $P(1,1)$ y $Q(5,-1)$.

F. Punto-pendiente: $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{1}{2}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{3}{1}}+\dfrac{y}{\frac{3}{2}}=1$

F. General: $-1x-2y+3=0$

F. Normal: $\dfrac{-1x}{\sqrt{5}}-\dfrac{2y}{\sqrt{5}}+\dfrac{3}{\sqrt{5}}=0$

34) $P(4,6)$ y $Q(2,-8)$.

F. Punto-pendiente: $y-6=7(x-4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=7x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\frac{22}{7}}+\dfrac{y}{-\frac{22}{1}}=1$

F. General: $-7x+1y+22=0$

F. Normal: $\dfrac{-7x}{\sqrt{50}}+\dfrac{1y}{\sqrt{50}}+\dfrac{22}{\sqrt{50}}=0$

35) $P(1,6)$ y $Q(8,9)$.

F. Punto-pendiente: $y-6=\dfrac{3}{7}(x-1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = \frac{3}{7}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\dfrac{39}{3}} + \dfrac{y}{\dfrac{39}{7}} = 1$

F. General: $3\,x - 7\,y + 39 = 0$

F. Normal: $\dfrac{3\,x}{\sqrt{58}} - \dfrac{7\,y}{\sqrt{58}} + \dfrac{39}{\sqrt{58}} = 0$

36) $P(-8,9)$ y $Q(8,-7)$.

F. Punto-pendiente: $y - 9 = -1\,(x + 8)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -1\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\dfrac{1}{1}} + \dfrac{y}{\dfrac{1}{1}} = 1$

F. General: $-1\,x - 1\,y + 1 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-1\,x}{\sqrt{2}} - \dfrac{1\,y}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$

37) $P(4,9)$ y $Q(9,-7)$.

F. Punto-pendiente: $y - 9 = -\frac{16}{5}\,(x - 4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\frac{16}{5}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\dfrac{109}{16}} + \dfrac{y}{\dfrac{109}{5}} = 1$

F. General: $-16\,x - 5\,y + 109 = 0$

F. Normal: $\dfrac{-16\,x}{\sqrt{281}} - \dfrac{5\,y}{\sqrt{281}} + \dfrac{109}{\sqrt{281}} = 0$

38) $P(-6,1)$ y $Q(3,6)$.

F. Punto-pendiente: $y - 1 = \frac{5}{9}\,(x + 6)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = \frac{5}{9}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{-\dfrac{39}{5}} + \dfrac{y}{\dfrac{39}{9}} = 1$

F. General: $5\,x - 9\,y + 39 = 0$

F. Normal: $\dfrac{5\,x}{\sqrt{106}} - \dfrac{9\,y}{\sqrt{106}} + \dfrac{39}{\sqrt{106}} = 0$

39) $P(-3,5)$ y $Q(9,-9)$.

F. Punto-pendiente: $y - 5 = -\frac{7}{6}\,(x + 3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y = -\frac{7}{6}\,x - 2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\dfrac{9}{7}} + \dfrac{y}{\dfrac{9}{6}} = 1$

F. General: $-7\,x-6\,y+9=0$

F. Normal: $\dfrac{-7\,x}{\sqrt{85}}-\dfrac{6\,y}{\sqrt{85}}+\dfrac{9}{\sqrt{85}}=0$

40) $P(-3,9)$ y $Q(5,-8)$.

F. Punto-pendiente: $y-9=-\dfrac{17}{8}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{17}{8}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\dfrac{21}{17}}+\dfrac{y}{\dfrac{21}{8}}=1$

F. General: $-17\,x-8\,y+21=0$

F. Normal: $\dfrac{-17\,x}{\sqrt{353}}-\dfrac{8\,y}{\sqrt{353}}+\dfrac{21}{\sqrt{353}}=0$

41) $P(9,1)$ y $Q(4,-2)$.

F. Punto-pendiente: $y-1=\dfrac{3}{5}(x-9)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{3}{5}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\dfrac{22}{3}}+\dfrac{y}{-\dfrac{22}{5}}=1$

F. General: $-3\,x+5\,y+22=0$

F. Normal: $\dfrac{-3\,x}{\sqrt{34}}+\dfrac{5\,y}{\sqrt{34}}+\dfrac{22}{\sqrt{34}}=0$

42) $P(-3,5)$ y $Q(2,-1)$.

F. Punto-pendiente: $y-5=-\dfrac{6}{5}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{6}{5}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\dfrac{7}{6}}+\dfrac{y}{\dfrac{7}{5}}=1$

F. General: $-6\,x-5\,y+7=0$

F. Normal: $\dfrac{-6\,x}{\sqrt{61}}-\dfrac{5\,y}{\sqrt{61}}+\dfrac{7}{\sqrt{61}}=0$

43) $P(5,9)$ y $Q(6,8)$.

F. Punto-pendiente: $y-9=-1(x-5)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-1\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\dfrac{14}{1}}+\dfrac{y}{\dfrac{14}{1}}=1$

F. General: $-1\,x-1\,y+14=0$

F. Normal: $\dfrac{-1\,x}{\sqrt{2}}-\dfrac{1\,y}{\sqrt{2}}+\dfrac{14}{\sqrt{2}}=0$

44) $P(2,3)$ y $Q(3,-8)$.

F. Punto-pendiente: $y-3=-11\,(x-2)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-11\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\dfrac{25}{11}}+\dfrac{y}{\dfrac{25}{1}}=1$

F. General: $-11\,x-1\,y+25=0$

F. Normal: $\dfrac{-11\,x}{\sqrt{122}}-\dfrac{1\,y}{\sqrt{122}}+\dfrac{25}{\sqrt{122}}=0$

45) $P(-4,6)$ y $Q(3,4)$.

F. Punto-pendiente: $y-6=-\dfrac{2}{7}(x+4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{2}{7}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\dfrac{34}{2}}+\dfrac{y}{\dfrac{34}{7}}=1$

F. General: $-2\,x-7\,y+34=0$

F. Normal: $\dfrac{-2\,x}{\sqrt{53}}-\dfrac{7\,y}{\sqrt{53}}+\dfrac{34}{\sqrt{53}}=0$

46) $P(-2,5)$ y $Q(9,-5)$.

F. Punto-pendiente: $y-5=-\dfrac{10}{11}(x+2)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{10}{11}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\dfrac{35}{10}}+\dfrac{y}{\dfrac{35}{11}}=1$

F. General: $-10\,x-11\,y+35=0$

F. Normal: $\dfrac{-10\,x}{\sqrt{221}}-\dfrac{11\,y}{\sqrt{221}}+\dfrac{35}{\sqrt{221}}=0$

47) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(-1,9)$, y es paralela a la recta: $-5\,x+9\,y-2=0$.

F. Punto-pendiente: $y+9=\dfrac{5}{9}(x-1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{5}{9}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{-86}{-5}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{-86}{9}\right)}$

F. General: $-5\,x+9\,y-86=0$

F. Normal: $\dfrac{-5}{\sqrt{106}}\,x+\dfrac{9}{\sqrt{106}}\,y-\dfrac{86}{\sqrt{106}}=0$

48) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(-4,8)$, y es paralela a la recta: $-8\,x-7\,y-7=0$.

F. Punto-pendiente: $y+8=\dfrac{8}{-7}(x-4)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{8}{-7}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{3}{-1}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{24}{-7}\right)}$

F. General: $-8x-7y+24=0$

F. Normal: $\dfrac{-8}{\sqrt{113}}x-\dfrac{7}{\sqrt{113}}y+\dfrac{24}{\sqrt{113}}=0$

49) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(2,9)$, y es perpendicular a la recta: $8x-6y-4=0$.

F. Punto-pendiente: $y+9=-\dfrac{3}{4}(x+2)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{3}{4}x-24$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{14}{-1}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{21}{-2}\right)}$

F. General: $-6x-8y+84=0$

F. Normal: $\dfrac{-6}{\sqrt{100}}x-\dfrac{8}{\sqrt{100}}y+\dfrac{84}{\sqrt{100}}=0$

50) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(6,2)$, y es paralela a la recta: $4x-5y-3=0$.

F. Punto-pendiente: $y+2=-\dfrac{4}{-5}(x+6)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{4}{-5}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{-7}{2}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{-14}{-5}\right)}$

F. General: $4x-5y-14=0$

F. Normal: $\dfrac{4}{\sqrt{41}}x-\dfrac{5}{\sqrt{41}}y-\dfrac{14}{\sqrt{41}}=0$

51) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(3,3)$, y es perpendicular a la recta: $-3x-8y-1=0$.

F. Punto-pendiente: $y+3=\dfrac{8}{3}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{8}{3}x-24$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{15}{-8}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{5}{1}\right)}$

F. General: $-8x+3y+15=0$

F. Normal: $\dfrac{-8}{\sqrt{73}}x+\dfrac{3}{\sqrt{73}}y+\dfrac{15}{\sqrt{73}}=0$

52) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(-3,9)$, y es perpendicular a la recta: $8x-2y-8=0$.

F. Punto-pendiente: $y+9=-\dfrac{1}{4}(x-3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{1}{4}x+25$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{33}{-1}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{33}{-4}\right)}$

F. General: $-2x-8y+66=0$

F. Normal: $\dfrac{-2}{\sqrt{68}}x-\dfrac{8}{\sqrt{68}}y+\dfrac{66}{\sqrt{68}}=0$

53) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(2,9)$, y es paralela a la recta: $-8x-6y+1=0$.

F. Punto-pendiente: $y+9=\dfrac{4}{-3}(x+2)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{4}{-3}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{35}{-4}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{35}{-3}\right)}$

F. General: $-8x-6y+70=0$

F. Normal: $\dfrac{-8}{\sqrt{100}}x-\dfrac{6}{\sqrt{100}}y+\dfrac{70}{\sqrt{100}}=0$

54) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(3,2)$, y es paralela a la recta: $-3x+8y-4=0$.

F. Punto-pendiente: $y+2=\dfrac{3}{8}(x+3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{3}{8}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{-7}{-3}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{-7}{8}\right)}$

F. General: $-3x+8y-7=0$

F. Normal: $\dfrac{-3}{\sqrt{73}}x+\dfrac{8}{\sqrt{73}}y-\dfrac{7}{\sqrt{73}}=0$

55) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(1,8)$, y es perpendicular a la recta: $8x-6y-8=0$.

F. Punto-pendiente: $y+8=-\dfrac{3}{4}(x+1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{3}{4}x+25$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{35}{-3}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{35}{-4}\right)}$

F. General: $-6x-8y+70=0$

F. Normal: $\dfrac{-6}{\sqrt{100}}x-\dfrac{8}{\sqrt{100}}y+\dfrac{70}{\sqrt{100}}=0$

56) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(1,8)$, y es paralela a la recta: $-9x-2y-1=0$.

F. Punto-pendiente: $y+8=\dfrac{9}{-2}(x+1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{9}{-2}x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{25}{-9}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{25}{-2}\right)}$

F. General: $-9\,x-2\,y+25=0$

F. Normal: $\dfrac{-9}{\sqrt{85}}\,x-\dfrac{2}{\sqrt{85}}\,y+\dfrac{25}{\sqrt{85}}=0$

57) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(8,4)$, y es paralela a la recta: $6\,x-4\,y+8=0$.

F. Punto-pendiente: $y+4=-\dfrac{3}{-2}(x+8)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{3}{-2}\,x-2$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{-16}{3}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{-8}{-1}\right)}$

F. General: $6\,x-4\,y-32=0$

F. Normal: $\dfrac{6}{\sqrt{52}}\,x-\dfrac{4}{\sqrt{52}}\,y-\dfrac{32}{\sqrt{52}}=0$

58) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(-3,2)$, y es perpendicular a la recta: $-5\,x-2\,y-5=0$.

F. Punto-pendiente: $y+2=\dfrac{2}{5}(x-3)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{2}{5}\,x+25$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{-8}{-1}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{-16}{5}\right)}$

F. General: $-2\,x+5\,y-16=0$

F. Normal: $\dfrac{-2}{\sqrt{29}}\,x+\dfrac{5}{\sqrt{29}}\,y-\dfrac{16}{\sqrt{29}}=0$

59) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(-1,3)$, y es perpendicular a la recta: $4\,x+9\,y+5=0$.

F. Punto-pendiente: $y+3=\dfrac{9}{4}(x-1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=\dfrac{9}{4}\,x+25$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{7}{3}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{21}{-4}\right)}$

F. General: $9\,x-4\,y+21=0$

F. Normal: $\dfrac{9}{\sqrt{97}}\,x-\dfrac{4}{\sqrt{97}}\,y+\dfrac{21}{\sqrt{97}}=0$

60) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto: $P(1,6)$, y es paralela a la recta: $8\,x+5\,y-5=0$.

F. Punto-pendiente: $y+6=-\dfrac{8}{5}(x+1)$

F. Pendiente-ordenada a origen: $y=-\dfrac{8}{5}\,x-79$

F. Simétrica: $\dfrac{x}{\left(\dfrac{-19}{4}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{-38}{5}\right)}$

F. General: $8\,x+5\,y-38=0$

F. Normal: $\dfrac{8}{\sqrt{89}}\,x+\dfrac{5}{\sqrt{89}}\,y-\dfrac{38}{\sqrt{89}}=0$

Formulario

Unidad Diez

Ec. Recta F. Punto-pendiente: La recta pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ con pendiente m:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Ec. Recta F. Dos puntos: La recta pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

Ec. Recta F. Pendiente-ordenada al origen: La recta tiene pendiente m y corta al eje y en el punto $B(0, b)$:

$$y = m\,x + b$$

Ec. Recta F. Simétrica: Las intersecciones con los ejes son $A(a, 0)$ y $B(0, b)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ec. Recta F. General: La ecuación de cualquier recta se puede escribir con:

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

donde A y B no son simultáneamente cero.

Ec. Recta F. Normal: Útil para calcular la distancia de un punto a una recta:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Distancia de un punto a una recta: La distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $\ell:\ A\,x + B\,y + C = 0$, es:

$$D_{P\ell} = \frac{A\,x_1 + B\,y_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Capítulo 11

La circunferencia

Por aprender...

Por qué es importante...

En la naturaleza, cuando lanzas una piedra en el agua, las ondas viajan en formas de circunferencias, además, las circunferencias tienen amplias aplicaciones: discos, bocinas, llantas, rodamientos (baleros), etc., por eso la circunferencia representa el modelo de muchas situaciones que estudiremos en semestres posteriores.

11.1 CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA

En la sección *Lugares Geométricos* se muestra cómo caracterizar una circunferencia geométricamente, a través de la solución de un ejemplo.

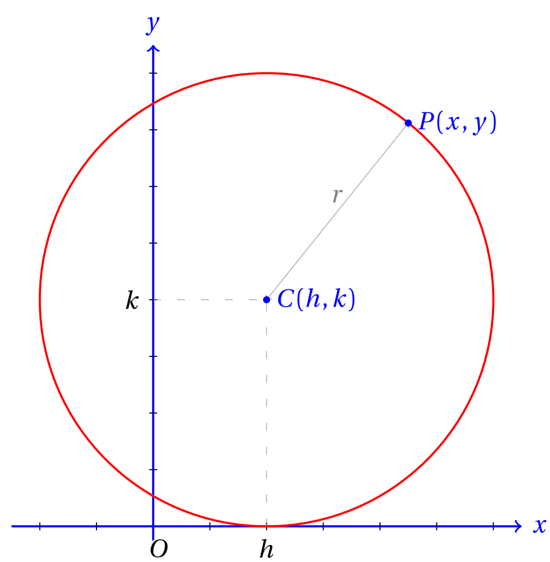
En esta sección vamos a resolver el mismo problema para el caso más general y vamos a detallar un poco más esa solución.

Un punto $P(x,y)$ se mueve de tal manera que su distancia al punto $C(h,k)$ siempre es igual a r unidades. Encuentra la ecuación de este lugar geométrico. **Ejemplo 13**

- La distancia desde el punto $P(x,y)$ hasta el punto $C(h,k)$ siempre es r.
- Utilizamos la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos.

$$\begin{aligned} \overline{PC} = r &= \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} \\ r^2 &= (x-h)^2+(y-k)^2 \\ r^2 &= x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 \\ 0 &= x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2 \end{aligned}$$

- Esta ecuación corresponde a una circunferencia de radio r y centro en el punto $C(h,k)$.



Entonces, la ecuación:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

corresponde a una circunferencia de radio r con centro en el punto $C(h,k)$.

Esta misma ecuación puede desarrollarse y obtenemos:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

la cual podemos reescribir como:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

donde $D = -2\,h$, $E = -2\,k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$.

Esta forma de escribir la ecuación de la recta nos permitirá resolver más problemas aún.

El caso particular más sencillo para esta ecuación se obtiene cuando el centro de la circunferencia está en el origen de coordenadas.

Entonces, $C(h,k)$ es $C(0,0)$ y la ecuación de la circunferencia se reduce a:

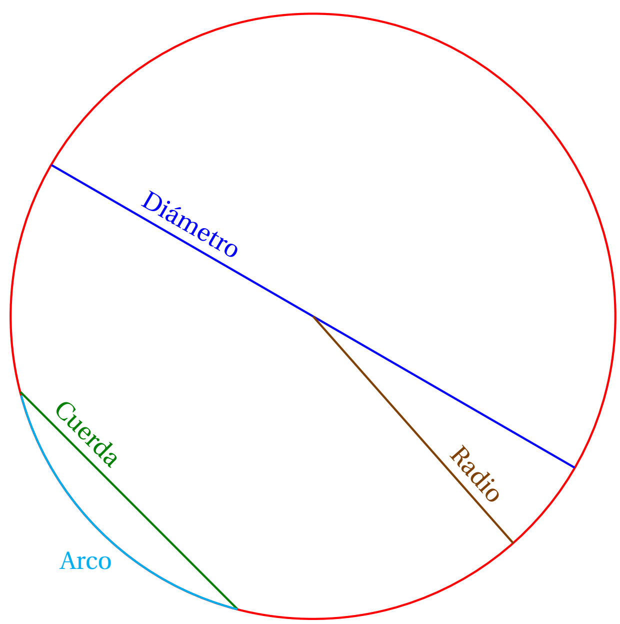
$$\begin{aligned}(x-0)^2+(y-0)^2 &= r^2\\ x^2+y^2 &= r^2\end{aligned}$$

Esta es la ecuación que vamos a estudiar para iniciar el estudio de la circunferencia.

6. Elementos de la circunferencia

Ahora vamos a definir algunos elementos que son importantes para el estudio de la circunferencia.

En la siguiente figura se muestran los elementos de la circunferencia.



A continuación se dan las definiciones de cada uno de los elementos mostrados en la figura anterior.

Definición 2

Radio

El radio de una circunferencia es el segmento de recta que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera sobre ésta.

Definición 3

Cuerda

Es un segmento de recta que une dos puntos cualesquiera que pertenecen a la circunferencia.

Definición 4

Diámetro

Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Todo diámetro de una circunferencia es el eje de simetría de la misma. El diámetro es la mayor cuerda que se puede trazar a una circunferencia.

ARCO
Es una parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de la misma que se llaman extremos del arco.
Definición 5

CÍRCULO
Es la superficie plana limitada por una circunferencia.
Definición 6

El círculo es el área encerrada por la circunferencia. Desde el punto de vista algebraico corresponde a todos los puntos que satisfacen la desigualdad:

$$(x-h)^2+(y-k)^2<r^2$$

Es decir, el círculo son todos los puntos internos a la circunferencia.

TANGENTE
Es una recta que toca a la circunferencia en uno de sus puntos. El punto donde toca a la circunferencia se llama punto de tangencia.
Una tangente siempre es perpendicular al radio que va desde el punto de tangencia hasta el centro de la circunferencia.
Definición 7

SECANTE
Una recta secante a una circunferencia es una recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
Definición 8

Es muy fácil observar que una recta toca a una circunferencia en dos puntos cuando su distancia al centro de la circunferencia es menor al radio, en un solo punto cuando su distancia es igual al radio, o en ningún punto cuando su distancia al centro de la circunferencia es mayor al radio.

PUNTO INTERNO
Un punto es interno o interior a una circunferencia cuando su distancia al centro de la misma es menor al radio.
Definición 9

PUNTO EXTERNO
Un punto es externo o exterior a una circunferencia cuando su distancia al centro de la misma es mayor al radio.
Definición 10

11.2 Ecuación ordinaria de la circunferencia

En esta sección estudiatemos la ecuación de la circunferencia en la forma ordinaria.

Cuando hablemos de la forma ordinaria de una cónica, generalmente nos referiremos a un problema sencillo.

11.2.1 Circunferencia con centro en el origen

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL ORIGEN
La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Definición 1

La ecuación $x^2 + y^2 = 36$ corresponde a una circunferencia con radio 6 con centro en el origen. ¿Cuáles de los siguientes puntos son internos a la circunferencia?

✓ $A(0,0)$ ✓ $D(3,3)$ ✓ $G(6,6)$
✓ $B(1,1)$ ✓ $E(4,4)$
✓ $C(2,2)$ ✓ $F(5,5)$

Ejemplo 1

- Necesitamos calcular la distancia desde el origen a cada uno de los puntos A, B, C, D, E, F, G.
- Sabemos que el radio de la circunferencia mide 6 unidades.
- Para empezar, la distancia desde un punto a sí mismo es cero, por eso, el punto A es interno a la circunferencia.
- Pues para que fuera externo se requiriera que la distancia desde el origen hasta él fuera mayor a 6, que es el radio de la circunferencia.
- Ahora calculamos la distancia desde el origen al punto B:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

- Para probar que $\sqrt{2} < 6$ elevamos al cuadrado ambos lados de la desigualdad y obtenemos otra desigualdad válida.
- Ahora estudiamos el caso del punto C:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

- De nuevo, el punto es interno, porque $\sqrt{8} < 6 \qquad \Rightarrow \qquad 8 < 36$
- Ahora estudiamos el caso del punto D:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(3-0)^2 + (3-0)^2} \\ &= \sqrt{18} \end{aligned}$$

- De nuevo, el punto es interno, porque $\sqrt{18} < 6 \qquad \Rightarrow \qquad 18 < 36$
- Ahora estudiamos el caso del punto E:

$$\begin{array}{rcl} |\overline{OB}| & = & \sqrt{(4-0)^2+(4-0)^2} \\ & = & \sqrt{32} \end{array}$$

- De nuevo, el punto es interno, porque $\sqrt{32} < 6 \qquad \Rightarrow \qquad 32 < 36$
- Ahora estudiamos el caso del punto F:

$$\begin{array}{rcl} |\overline{OB}| & = & \sqrt{(5-0)^2+(5-0)^2} \\ & = & \sqrt{50} \end{array}$$

- De nuevo, el punto es externo, porque $\sqrt{50} > 6 \qquad \Rightarrow \qquad 50 > 36.$
- Finalmente, el caso del punto G:

$$\begin{array}{rcl} |\overline{OB}| & = & \sqrt{(6-0)^2+(6-0)^2} \\ & = & \sqrt{8} \end{array}$$

- De nuevo, el punto es externo, porque $\sqrt{72} > 6 \qquad \Rightarrow \qquad 72 > 36$
- Realiza una gráfica para verificar que esto es verdad.

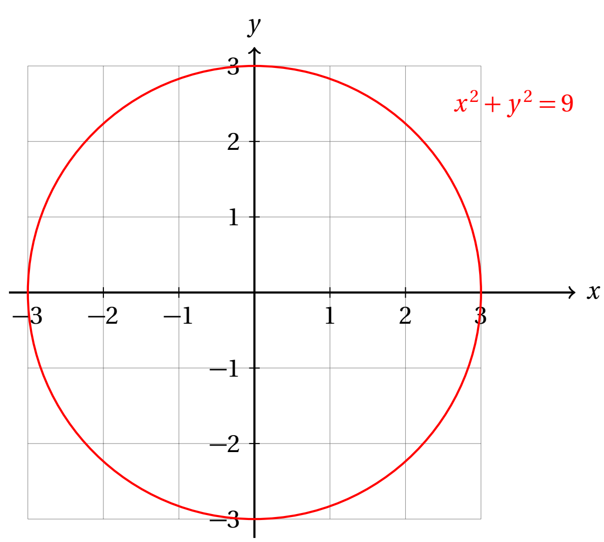
Ejemplo 2 Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio $r = 3$ cm.

- Sabemos que el centro está en el origen, por eso la ecuación tiene la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- Ahora solamente falta sustituir el valor de r en la ecuación para terminar con nuestro problema:

$$\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & r^2 \\ x^2+y^2 & = & (3)^2 \\ x^2+y^2 & = & 9 \end{array}$$



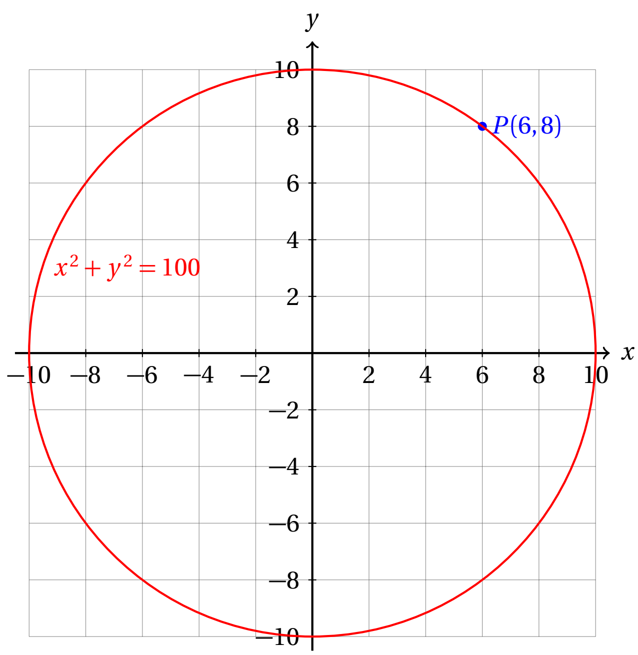
Este ejemplo sirvió solamente para introducir la idea de la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.

Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen y pasa por el punto $P(6,8)$. **Ejemplo 3**

- Ya sabemos que la circunferencia tiene su centro en el origen, además que pasa por el punto $P(6,8)$.
- Para calcular su radio, basta encontrar la distancia del origen al punto P:

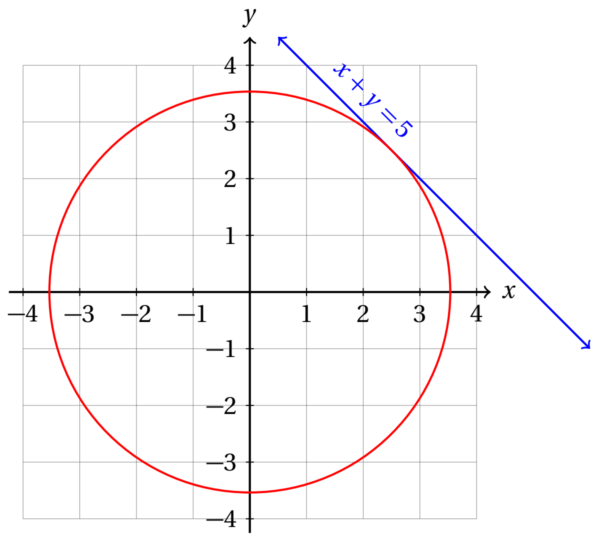
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(6-0)^2+(8-0)^2} \\ &= \sqrt{36+64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

- Esto nos indica que el radio de la circunferencia es $r=10$.
- Entonces, la ecuación buscada es: $x^2+y^2=100$.
- La siguiente gráfica muestra a esta circunferencia:



Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen y es tangente a la recta $x+y=5$. **Ejemplo 4**

- Para resolver el problema es una buena idea empezar dibujando la situación en un plano cartesiano:



- Para encontrar la ecuación de la circunferencia debemos conocer el valor de r.
- Pero r es la distancia del origen a la recta $x + y - 5 = 0$.
- Es decir, necesitamos encontrar la distancia desde el origen a esa recta.
- Para eso utilizamos la fórmula de distancia de un punto a una recta:

$$\begin{aligned} r &= \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ &= \frac{|(1)(0)+(1)(0)-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Lo cual implica que $r^2 = 25/2 = 12.5$
- Y la ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 = \dfrac{25}{2}$.

Ejemplo 5 Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos: $(4,-3)$ y $(-4,3)$. Encuentra la ecuación de la circunferencia.

- En este caso no conocemos ni el centro de la circunferencia ni su radio.
- Para conocer su centro, basta calcular las coordenadas del punto medio del diámetro.

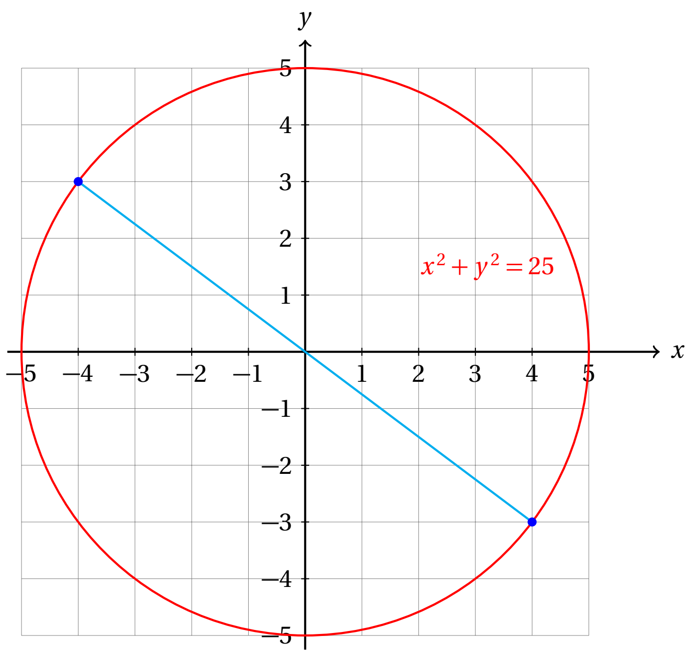
$$x_C = \frac{4-4}{2} = 0 \qquad\qquad y_C = \frac{-3+3}{2} = 0$$

- Esto nos indica que la circunferencia está en el origen.
- Ahora necesitamos calcular el radio de la circunferencia.
  - ✓ Podemos calcular la distancia desde el centro a cualquiera de los extremos del diámetro.
  - ✓ Igual, podemos calcular la longitud del diámetro y calculamos después su mitad.

- Calculamos la distancia desde el centro de la circunferencia a cualquiera de los extremos del diámetro:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(4-0)^2+(-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} \end{aligned}$$

- Entonces, $r=5$, y la ecuación de la circunferencia es: $x^2+y^2=25$.



Recuerda que elaborar una figura o gráfica para empezar a resolver un problema te ayuda a ordenar las ideas.

Generalmente será fácil resolver problemas de geometría analítica si empiezas dibujando en un sistema de coordenadas la información que el problema te provee. Inclusive este truco te ayuda a entender mejor el problema.

Así que la sugerencia es: en cada problema de geometría analítica empieza siempre la solución dibujando la información en un sistema de coordenadas.

11.2.2 Centro fuera del origen

Ya conoces la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen.

Si trasladamos el centro de la circunferencia h unidades a la derecha y k unidades hacia arriba, obtenemos una circunferencia que está fuera del origen.

En este caso obtenemos la circunferencia que obtuvimos en la sección *Caracterización geométrica y elementos de la circunferencia*.

Definición 1

Ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen

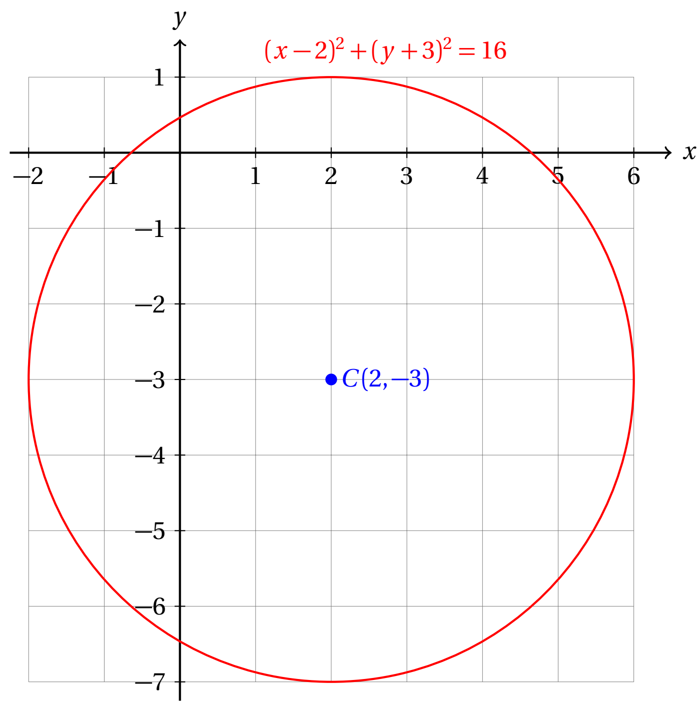
La ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(h,k)$ y radio r es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Ejemplo 1 Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(2,-3)$ y radio $r=4$.

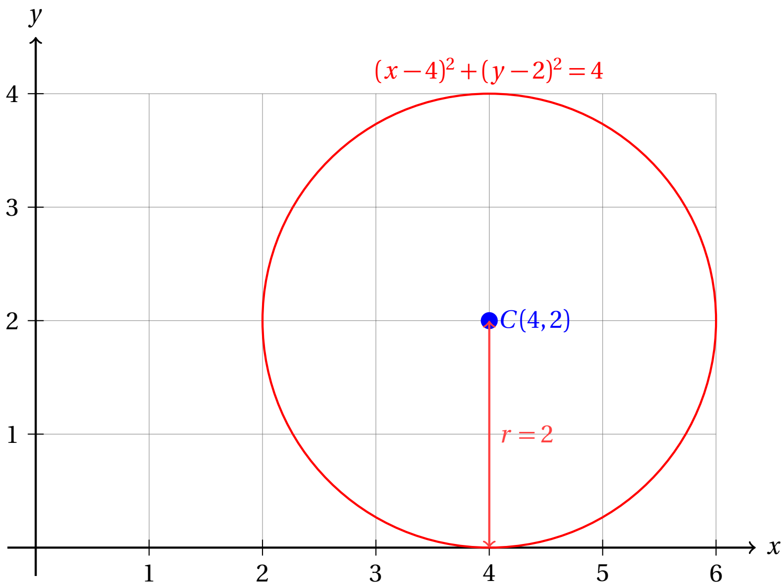
- Ya sabemos que el centro es $C(2,-3)$ y el radio es 4.
- Solamente debemos sustituir los datos en la fórmula:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=(4)^2$$
$$(x-2)^2+(y+3)^2=16$$



Ejemplo 2 Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(4,2)$ y es tangente al eje x.

- En este caso sabemos que la circunferencia es tangente al eje x.
- Esta información nos ayudará a calcular el radio de la circunferencia.
- Empezamos dibujando la situación:



- Del dibujo se deduce que el radio de la circunferencia es 2.

- Ahora que conocemos dónde está el centro y la medida del radio de la circunferencia, podemos calcular su ecuación:

$$\begin{aligned}(x-4)^2+(y-2)^2&=(2)^2\\(x-4)^2+(y-2)^2&=4\end{aligned}$$

Observa cómo la figura indica de inmediato la medida del radio. En este caso sencillo, también es posible darse cuenta imaginándose la figura. Pero eso no siempre ocurrirá.

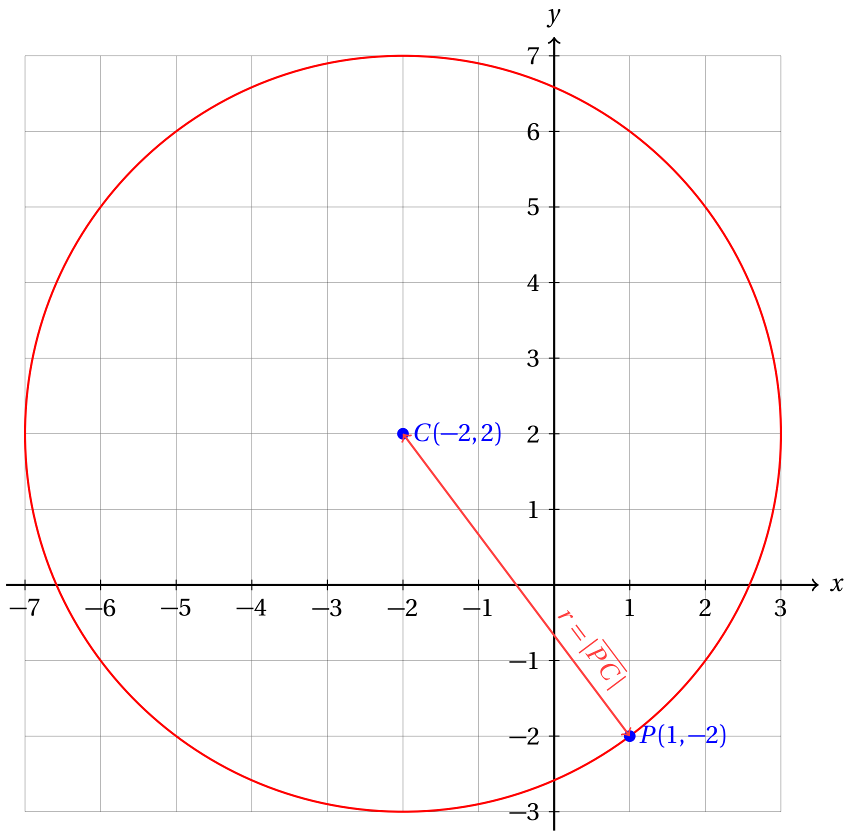
En otros problemas te verás obligado a realizar la figura para poder encontrar cómo están relacionados los datos contenidos en el texto del problema.

En algunos casos tendremos que utilizar fórmulas que ya conoces, principalmente las que estudiamos en la primera unidad del curso. El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos.

Ejemplo 3

Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(-2,2)$ y que pasa por el punto $P(1,1)$

- Empezamos dibujando la situación en un sistema de ejes coordenados:



- Ahora vemos que el radio de la circunferencia es la distancia desde el centro de la circunferencia $C(-2,2)$ hasta el punto $P(1,-2)$.
- Vamos a calcular esta distancia usando la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(1-(-2))^2+(-2-2)^2} \\ &= \sqrt{(1+2)^2+(-4)^2} \\ &= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

- Ahora podemos calcular la ecuación de la circunferencia:

$$\begin{aligned} (x-(-2))^2+(y-2)^2 &= (5)^2 \\ (x+2)^2+(y-2)^2 &= 25 \end{aligned}$$

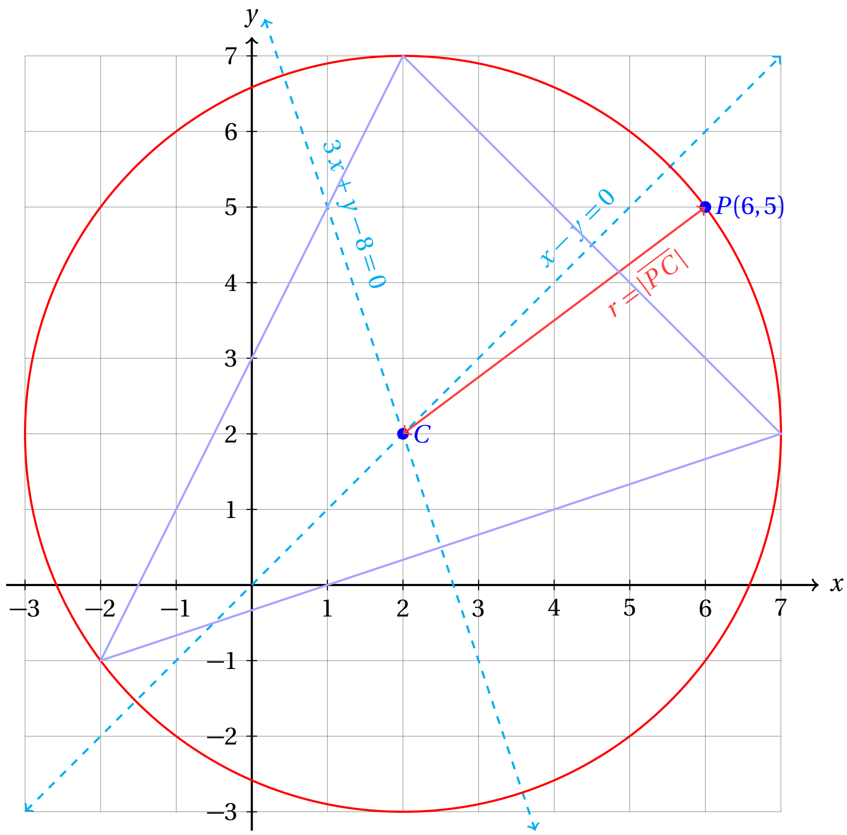
- Esta es la ecuación buscada.

En otros problemas nos encontraremos con la necsidad de aplicar conocimientos de semestres anteriores.

Ejemplo 4 Encuentra la ecuación de la circunferencia circunscrita a un triángulo, sabiendo que dos de sus mediatrices son las rectas $\ell_1: 3x+y-8=0$ y $\ell_2: x-y=0$, y pasa por el punto $P(6,5)$.

- De nuevo, es mejor empezar dibujando la situación.

- Pero debemos primero graficar las rectas.
- La mediatriz ℓ_2 $x - y = 0$ es muy sencilla de graficar.
- La mediatriz ℓ_1: $3x + y - 8 = 0$ pasa por los puntos $A(1,5)$ y $B(3,-1)$



- Debemos calcular el punto donde se intersectan las dos mediatrices del triángulo.
- Para eso debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales formado por sus ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

- Al sumar ambas ecuaciones obtenemos: $4x = 8$, que implica $x = 2$.
- Pero ya sabemos por la mediatriz ℓ_2 que $y = x = 2$.
- Entonces, el centro de la circunferencia es $C(2,2)$.
- Ahora solamente falta calcular su radio.
- Sabemos que la circunferencia pasa por el punto $P(6,5)$.
- El radio es la distancia entre los puntos $C(2,2)$ y $P(6,5)$.

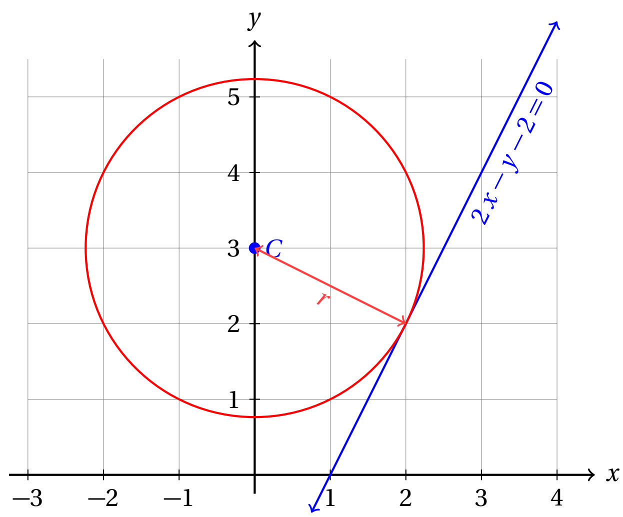
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(6-2)^2 + (5-2)^2} \\ &= \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

- Ahora que conocemos el radio y el centro de la circunferencia, podemos calcular su ecuación:

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y-2)^2 &= (5)^2\\(x-2)^2+(y-2)^2 &= 25\end{aligned}$$

Ejemplo 5 Calcula la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $2x-y-2=0$, y que tiene su centro en el punto $C(0,3)$.

- Dibujamos la situación en un sistema de coordenadas:



- De la figura vemos que el radio de la circunferencia es igual a la distancia desde la recta $2x-y-2=0$ hasta el punto $C(0,3)$.
- Vamos a utilizar la fórmula de distancia de un punto a una recta para calcular la longitud del radio:

$$\begin{aligned}r &= \frac{|A\,x_0+B\,y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\&= \frac{|2(0)-1(3)-2|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}\\&= \frac{|-5|}{\sqrt{4+1}}\\&= \frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}\end{aligned}$$

- Entonces, el radio mide $\sqrt{5}$ unidades.
- Ahora podemos calcular la ecuación de la circunferencia:

$$\begin{aligned}(x-0)^2+(y-2)^2 &= \left(\sqrt{5}\right)^2\\x^2+(y-2)^2 &= 5\end{aligned}$$

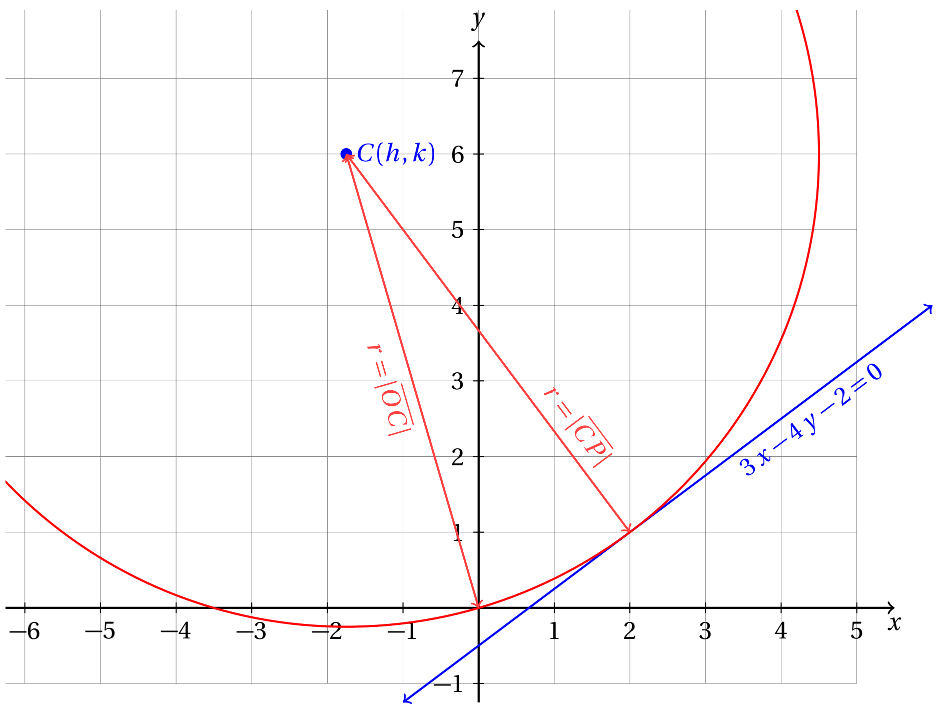
Cuando encuentres un problema que no te da mucha información, es posible resolverlo si trabajas con orden y vas encontrarndo sugerencias conforme avanzas en su solución.

Algunas veces encontrarás un sistema de ecuaciones lineales, en otros casos encontrarás una ecuación cuadrática, pero siempre (al menos en este curso), encontrarás suficiente información para resolver el problema.

Pero recuerda, es importante hacer un dibujo para reconocer toda la información contenida en el texto de problema, porque muchas veces estará «*escondida*», es decir, no estará escrita explícitamente, sino que deberás darte cuenta por la situación geométrica.

Encuentra la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $3x - 4y = 2$ en el punto $P(2,1)$ y que pasa por el origen. **Ejemplo 6**

- En este caso necesitamos calcular primero las coordenadas del centro $C(h,k)$ de la circunferencia.
- Para esto emezamos dibujando la situación en un sistema de coordenadas:



- De la figura se hace evidente que: $r = |\overline{OC}| = |\overline{CP}|$.
- Así que de esa condición podemos obtener una ecuación:

$$\begin{aligned}
r = |\overline{OC}| &= |\overline{CP}| \\
\sqrt{(h-0)^2 + (k-0)^2} &= \sqrt{(h-2)^2 + (k-1)^2} \\
(h-0)^2 + (k-0)^2 &= (h-2)^2 + (k-1)^2 \\
\cancel{h^2} + \cancel{k^2} &= \cancel{h^2} - 4h + 4 + \cancel{k^2} - 2k + 1 \\
4h + 2k &= 5
\end{aligned}$$

- Ahora debemos recordar que el radio de una circunferencia siempre es perpendicular a la tangente a la circunferencia que lo corta.

- Como el radio $\overline{CP}$ es perpendicular a la recta $3x - 4y = 2$, sus pendientes cumplen con:

$$m_{CP} = -\frac{1}{m_\ell}$$

- Podemos conocer la pendiente de la recta tangente escribiéndola en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$3x - 4y = 2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

- Esto nos indica que la pendiente de la recta es: $m_\ell = 3/4$.

- Entonces, la pendiente del radio es:

$$m_{CP} = -\frac{1}{m_\ell} = -\frac{4}{3}$$

- Pero, a partir de la fórmula de pendiente podemos calcularla también:

$$m_{CP} = \frac{h-2}{k-1} = -\frac{4}{3}$$

- De aquí obtenemos la otra ecuación:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{k-1}{h-2} = -\dfrac{4}{3} & \Rightarrow & 3(k-1) = -4(h-2) \\ 3k - 3 = -4h + 8 & \Rightarrow & 4h + 3k = 11 \end{array}$$

- Ahora obtuvimos un sistema de ecuaciones lineales en h, k el cual podemos resolver para conocer las coordenadas del centro de la circunferencia:

$$\begin{array}{rcl} 4h + 2k & = & 5 \\ 4h + 3k & = & 11 \end{array}$$

- Primero multiplicamos la primera ecuación por -1, sumamos las ecuaciones y obtenemos:

$$\begin{array}{r} -\cancel{4h} - 2k = -5 \\ \cancel{4h} + 3k = 11 \\ \hline k = 6 \end{array}$$

- Ahora podemos conocer el valor de h sustituyendo el valor de k en cualquiera de las ecuaciones:

$$4h + 2(6) = 5 \qquad \Rightarrow \qquad 4h = 5 - 12 \qquad \Rightarrow \qquad h = -\frac{7}{4} = -1.75$$

- Entonces, el centro de la circunferencia está en: $C(-1.75, 6)$.

- Para poder calcular la ecuación de la circunferencia nos falta conocer el radio.

- Vamos a calcularlo usando la fórmula de distancia entre dos puntos.

- El más fácil de usar es el origen:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(6-0)^2+(-7/4-0)^2} = \sqrt{(6)^2+\left(-\frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{36+\frac{49}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{576}{16}+\frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{625}{16}} = \frac{25}{4} = 6.25 \end{aligned}$$

- Finalmente, la ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x+\frac{7}{4}\right)^2+(y-6)^2=\left(\frac{25}{4}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \left(x+\frac{7}{4}\right)^2+(y-6)^2=\frac{625}{16}$$

- Con esto terminamos.

11.3 Ecuación general de la circunferencia

Hasta aquí hemos calculado la ecuación de la circunferencia dejándola como la suma de binomios al cuadrado igualada a una constante positiva.

Ahora vamos a ir un paso más ayá. Vamos a desarrollar los binomios y vamos a escribir la ecuación igualada a cero.

Definición 2

Ecuación general de la circunferencia

La ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2+y^2+D\,x+E\,y+F=0$$

donde los coeficientes D,E,F son números reales.

11.3.1 Conversión de forma ordinaria a forma general

Siempre que calculabamos la ecuación de una circunferencia nos quedábamos con la forma ordinaria.

Ahora vamos a empezar a convertir de la forma ordinaria a la forma general.

Ejemplo 1

Escribe la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen en la forma general.

- Ya sabemos que la forma ordinaria es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

- Lo único que debemos hacer es desarrollar los binomios y simplificar:

$$\begin{aligned}
(x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2\\
x^2-2\,h\,x+h^2+y^2-2\,k\,y+k^2-r^2 &= 0\\
x^2+y^2-2\,h\,x-2\,k\,y+h^2+k^2-r^2 &= 0
\end{aligned}$$

- Entonces, si conocemos el centro del la circunferencia $C(h,k)$ y su radio r, podemos fácilmente convertir de la forma ordinaria a la forma general usando las siguiente definiciones: $D=-2\,h$, $E=-2\,k$, y $F=h^2+k^2-r^2$.

En primer semestre estudiamos el desarrollo del binomio al cuadrado.

Si no recuerdas el procedimiento es una buena idea recordarlo estudiando extra-clase.

Ejemplo 2

Transforma la ecuación de la circunferencia $(x-9)^2+(y-1)^2=25$ a la forma general.

- Desarrollamos los binomios al cuadrado y simplificamos:

$$\begin{aligned}
(x-9)^2+(y-1)^2 &= 25\\
x^2-18\,x+81+y^2-2\,y+1-25 &= 0\\
x^2+y^2-18\,x-2\,y+81+1-25 &= 0\\
x^2+y^2-18\,x-2\,y+57 &= 0
\end{aligned}$$

- Ahora verifica que obtenemos el mismo resultado sustituyendo los valores de h, k y r en las fórmulas para transformar la ecuación de la circunferencia.

Ejemplo 3 Calcula la ecuación en forma general de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(7,2)$ y es tangente a la recta: $3x - y + 5 = 0$.

- En este caso, no podemos conocer inmediatamente la ecuación de la circunferencia en forma ordinaria, porque no conocemos el valor de r.
- Primero vamos a calcular r, después vamos a calcular la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria y finalmente la vamos a transformar a la forma general.
- La medida del radio es igual a la distancia del punto $C(7,2)$ a la recta: $3x - y + 5 = 0$.

$$r = \frac{|3(7) - (2) + 5|}{\sqrt{(3)^2 + (-1)^2}} = \frac{|21 - 2 + 5|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|24|}{\sqrt{10}}$$

- Ahora que conocemos el valor de r podemos calcular la ecuación en forma ordinaria:

$$(x-7)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{24}{\sqrt{10}}\right) \qquad \Rightarrow \qquad (x-7)^2 + (y-2)^2 = \frac{576}{10}$$

- Y finalmente vamos a transformarla a la forma general:

$$\begin{aligned} (x-7)^2 + (y-2)^2 &= \frac{576}{10} \\ x^2 - 14x + 49 + y^2 - 4y + 4 - \frac{576}{10} &= 0 \\ x^2 + y^2 - 14x - 4y + 49 + 4 - 57.6 &= 0 \end{aligned}$$

- La ecuación que queríamos calcular es:

$$x^2 + y^2 - 14x - 4y - 4.6 = 0$$

Ejemplo 4 En la sección *Ecuaciones de las rectas notables del triángulo* encontramos las mediatrices del triángulo que tiene sus vértices en los puntos $A(1,-2)$, $B(3,6)$ y $C(-2,1)$. El punto donde se cortan estas mediatrices es el centro de la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo. Encuentra la ecuación de esa circunferencia en su forma general.

- Las ecuaciones de las mediatrices de los lados de ese triángulo son las siguientes:

$$\begin{aligned} x + 4y - 10 &= 0 \\ x + y - 4 &= 0 \\ y &= x \end{aligned}$$

- Para encontrar el punto donde se cortan sustituimos $y = x$ en cualquiera de las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 4y - 10 &= 0 \\ x + 4x - 10 &= 0 \\ 5x &= 10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

- Y ya sabemos que: $y = x = 2$.
- Entonces, el centro de la circunferencia está en el punto $C(2,2)$.
- Ahora calculamos la longitud del radio con la fórmula de distancia entre dos puntos.
- Sabemos que la circunferencia pasa por los tres vértices del triángulo.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(2-1)^2+(2-(-2))^2} \\ &= \sqrt{(1)^2+(4))^2} \\ &= \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

- Ahora calculamos la ecuación en forma ordinaria y la transformamos a la forma general:

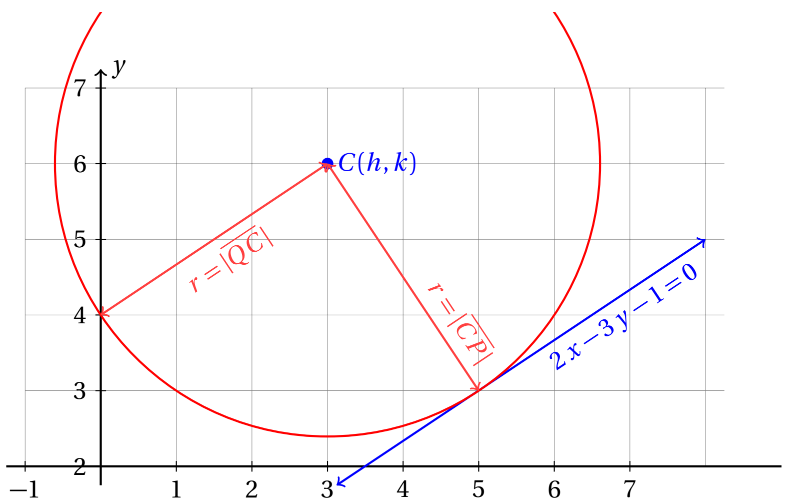
$$\begin{aligned} (x-2)^2+(y-2)^2 &= \left(\sqrt{17}\right)^2 \\ x^2-4x+4+y^2-4y+4 &= 17 \\ x^2+y^2-4x-4y-9 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora grafica el triángulo, sus tres mediatrices y la circunferencia en un plano cartesiano en tu cuaderno.
- Puedes basarte en la solución del ejemplo de la página 431.

Calcula la ecuación de la circunferencia en su forma general que pasa por el punto $Q(0,4)$ y que es tangente a la recta: $2x-3y-1=0$ en el punto $P(5,3)$.

Ejemplo 5

- Vamos a dibujar la situación antes de iniciar con las ecuaciones.



- Sabemos que $r = |\overline{CP}| = |\overline{CQ}|$.
- Algebraicamente tenemos:

$$\begin{aligned} |\overline{CQ}| &= |\overline{CP}| \\ \sqrt{(h-0)^2+(k-4)^2} &= \sqrt{(h-5)^2+(k-3)^2} \\ (h-0)^2+(k-4)^2 &= (h-5)^2+(k-3)^2 \\ h^2+k^2-8k+16 &= h^2-10h+25+k^2-6k+9 \\ 10h-2k &= 18 \end{aligned}$$

- Por otra parte, podemos conocer la pendiente de la recta tangente expresando su ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 1 &= 0 \\ 2x - 1 &= 3y \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} &= y \end{aligned}$$

- Entonces, $m_{\ell} = \frac{2}{3}$.
- Como el radio $\overline{CP}$ es perpendicular a esta recta, tenemos que:

$$m_{CP} = -\frac{1}{m_{\ell}} = -\frac{3}{2}$$

- Pero también podemos calcular la pendiente a partir de la fórmula de dos puntos:

$$\begin{aligned} m_{CP} = \frac{k-3}{h-5} &= -\frac{3}{2} \\ 2(k-3) &= -3(h-5) \\ 2k - 6 &= -3h + 15 \\ 3h + 2k &= 21 \end{aligned}$$

- Ahora podemos calcular las coordenadas del centro de la circunferencia resolviendo el siguiente S.E.L.:

$$\begin{cases} 10h - 2k = 18 \\ 3h + 2k = 21 \end{cases}$$

- Al sumar ambas ecuaciones obtenemos: $13h = 39$, que implica $h = 3$.
- Para calcular el valor de k sustituimos el valor de h en cualquiera de las ecuaciones del S.E.L.:

$$\begin{aligned} 10h - 2k &= 18 \\ 10(3) - 18 &= 2k \\ \frac{30-18}{2} &= k = \frac{12}{2} = 6 \end{aligned}$$

- Entonces, las coordenadas del centro de la circunferencia son: $h = 3$, y $k = 6$.
- Ahora calulamos la longitud del radio:

$$r = \sqrt{(3-0)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

- Y la ecuación de la circunferencia es:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-6)^2 &= 13 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 &= 13 \\ x^2 + y^2 - 6x - 12y + 32 &= 0 \end{aligned}$$

11.3.2 Conversión de la forma general a la forma ordinaria

Ahora que ya conocemos las formas ordinaria y general de la ecuación de la circunferencia y que ya hemos hecho conversiones de la forma ordinaria a la forma general, vamos a estudiar el proceso inverso: convertir la ecuación de una circunferencia de su forma general a la forma ordinaria.

Para la conversión de la forma ordinaria a la forma general necesitamos desarrollar los binomios que quedaron indicados en la ecuación.

En la conversión de la forma general a la forma ordinaria vamos a requerir factorizar completando cuadrados para expresar un trinomio en la forma de un binomio al cuadrado.

Ejemplo 1

Convierte la ecuación de la circunferencia

$$x^2+y^2-8x-10y+25=0$$

a la forma ordinaria.

- Empezamos ordenando los términos.
- Escribiremos primero los que contienen a la literal x y al final los términos que contienen la literal y:
$$x^2-8x+y^2-10y=-25$$
- Ahora vamos a completar cuadrados.
- Para esto, observa que: $x^2-8x+16=(x-4)^2$.
- Para darte cuenta de esto fijate en el coeficiente del término que tiene la literal con exponente 1.
- En este caso, -8 es tal coeficiente.
- Sacamos la mitad de este número y obtenemos -4.
- Entonces, $(x-4)^2$ servirá para completar el cuadrado.
- Para completar el cuadrado vamos a sumar en ambos lados de la igualdad 16:
$$\begin{aligned} \left[x^2-8x+16\right]+y^2-10y &= -25+16 \\ (x-4)^2+y^2-10y &= -9 \end{aligned}$$
- Ahora vamos a factorizar la parte de y.
- La mitad de -10 es -5, así que probamos con $(y-5)^2=y^2-10y+25$
$$\begin{aligned} (x-4)^2+\left[y^2-10y+25\right] &= -9+25 \\ (x-4)^2+(y-5)^2 &= 16 \end{aligned}$$
- Esta es la ecuación de la circunferencia en forma ordinaria.
- para verificar que el cálculo es correcto, puedes hacer la conversión a la forma general.
- Debes obtener la ecuación con la que iniciamos.

Fácilmente podemos encontrar el centro y el radio de una circunferencia cuando está en su forma ordinaria.

Debido a esto, cuando encontremos ecuaciones de circunferencias en su forma general nos conviene convertirlas a la forma ordinaria para graficarlas.

Ejemplo 2

Calcula el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2+y^2+4x-6y+9=0$$

- Vamos a empezar convirtiendo la ecuación a su forma ordinaria.
- Completamos cuadrados usando los términos que contienen a x.
- Así que vamos a sumar 4 en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned}\left[x^2+4x\right]+y^2-6y &= -9\\ \left[x^2+4x+4\right]+y^2-6y &= -9+4\\ (x+2)^2+y^2-6y &= -5\end{aligned}$$

- Ahora vamos a completar cuadrados con los términos que contienen a y.
- Para esto, sumamos 9 en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned}(x+2)^2+\left[y^2-6y+9\right] &= -5+9\\ (x+2)^2+(y-3)^2 &= 4\end{aligned}$$

- Ahora podemos ver que $2=-h$, que implica $h=-2$.
- También, $-3=-k$, por lo que $k=3$.
- Además, $r^2=4$, es decir, $r=2$.
- Entonces, el centro está en $C(-2,3)$ y el radio de la circunferencia es $r=2$.
- Se te queda como ejercicio graficar la circunferencia en tu cuaderno.

Ejemplo 3

Calcula el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2+y^2+2x+4y-11=0$$

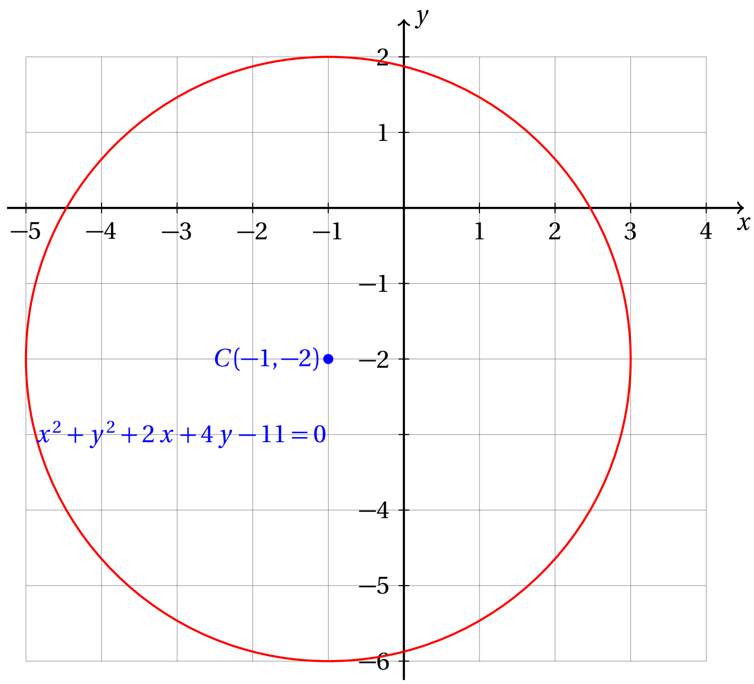
- Empezamos ordenando los términos:

$$\begin{aligned}x^2+y^2+2x+4y-11 &= 0\\ x^2+2x+y^2+4y &= 11\end{aligned}$$

- Ahora sumamos en ambos lados 1 y 4 para poder completar los cuadrados:

$$\begin{aligned}x^2+2x+1+y^2+4y+4 &= 11+1+4\\ (x+1)^2+(y+2)^2 &= 16\end{aligned}$$

- De la ecuación vemos que $-h = 1 \Rightarrow h = -1$, y que $-k = 2 \Rightarrow k = -2$.
- Entonces, el centro de la circunferencia es el punto $C(h,k) = C(-1,-2)$.
- Por otra parte, de la ecuación vemos también que $r^2 = 16$.
- Esto implica que el radio de la circunferencia es: $r = 4$.
- Enseguida está la gráfica de esta circunferencia:



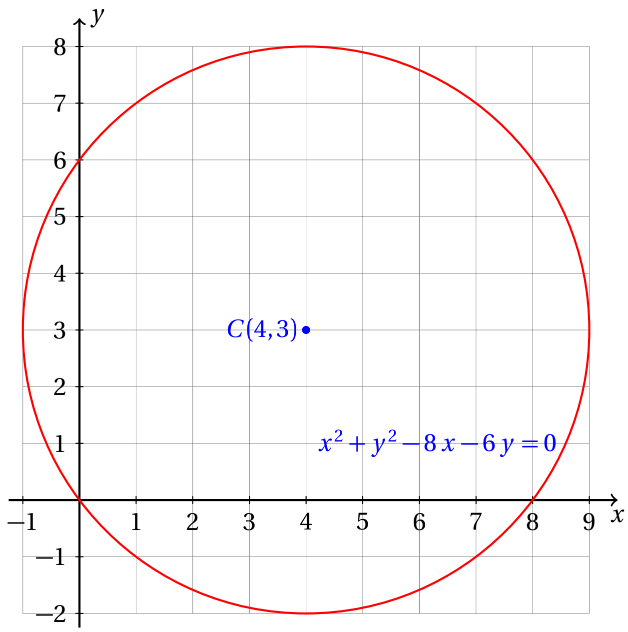
Encuentra el máximo valor que puede tener la variable y para satisfacer la ecuación: **Ejemplo 4**

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$$

- Para encontrar el máximo valor que puede tener la variable y vamos a expresar la ecuación en la forma ordinaria.
- Para eso,completamos cuadrados:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x - 6y &= 0 \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 &= 16 + 9 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 &= 25 \end{aligned}$$

- De la ecuación fácilmente podemos saber el centro y el radio de la circunferencia:
- Centro: $C(h,k) = C(4,3)$. Radio: $r = \sqrt{25} = 5$
- Ahora podemos graficar y de la gráfica ver el máximo valor que puede tener y para satisfacer la ecuación:



- El máximo valor que puede tomar la variable y está sobre la circunferencia, exactamente encima del centro, es decir, $y = 8$.

Una vez que sabiamos que se trataba de una circunferencia podíamos conocer el máximo valor que puede tomar la variable y. Para esto, bastaba reconocer que el máximo valor para y está exactamente a 5 unidades (que es lo que mide el radio) arriba del centro de la circunferencia.

Para el centro de la circunferencia $y = k = 3$. Al sumar 5 a este valor obtenemos el resultado.

Ejemplo 5

Calcula las coordenadas del centro y el radio de la circuferencia:

$$9\,x^2 + 9\,y^2 - 49 = 0$$

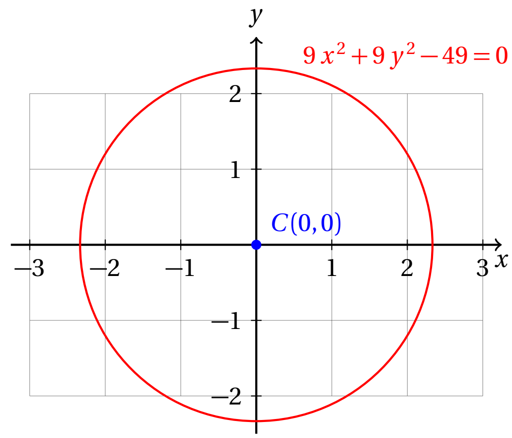
- En este caso no se require completar cuadrados, lo que tenemos que hacer es expresar la ecuación en la forma ordinaria:

- Empezamos sumadno en ambos lados de la igualdad 49 y después dividimos entre 9:

$$\begin{aligned} \frac{9\,x^2 + 9\,y^2}{9} &= \frac{49}{9} \\ x^2 + y^2 &= \left(\frac{7}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

- Ahora vemos que el centro de la circunferencia es el origen del sistema de coordenadas y el radio es $7/3$.

- La gráfica muestra este hecho:



Además del método de completar cuadrados podemos utilizar las fórmulas:

$$\begin{aligned} D &= -2\,h \\ E &= -2\,k \\ F &= h^2+k^2-r^2 \end{aligned}$$

que encontramos a partir de:

$$\begin{aligned} (x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2 \\ x^2-2\,h\,x+h^2+y^2-2\,k\,y+k^2-r^2 &= 0 \\ x^2+y^2-2\,h\,x-2\,k\,y+h^2+k^2-r^2 &= 0 \\ x^2+y^2+D\,x+E\,y+F &= 0 \end{aligned}$$

Para que veas que esto es verdad vamos a resolver un ejemplo más utlizando estas fórmulas.

Ejemplo 6

Convierte a la forma ordinaria la ecuación de la circunferencia:

$$x^2+y^2-10\,x-4\,y-7=0$$

- De acuerdo a la ecuación:

  $$x^2+y^2+D\,x+E\,y+F=0$$

  tenemos que: $D=-10$, $E=-4$ y $F=-7$.

- Por las fórmulas

  $$\begin{aligned} D &= -2\,h \\ E &= -2\,k \\ F &= h^2+k^2-r^2 \end{aligned}$$

  podemos encontrar inmediatamente h, k y r sustituyendo los valores conocidos y despejando la incógnita en cada caso:

  $$\begin{aligned} -10 &= -2\,h && \Rightarrow && h=5 \\ -4 &= -2\,k && \Rightarrow && k=2 \\ -7 &= h^2+k^2-r^2 \\ -7 &= (5)^2+(2)^2-r^2 \\ r^2 &= 25+4+7=36 && \Rightarrow && r=6 \end{aligned}$$

- Entonces, la ecuación de la recta en la forma ordinaria es:

$$(x-5)^2+(y-2)^2=36$$

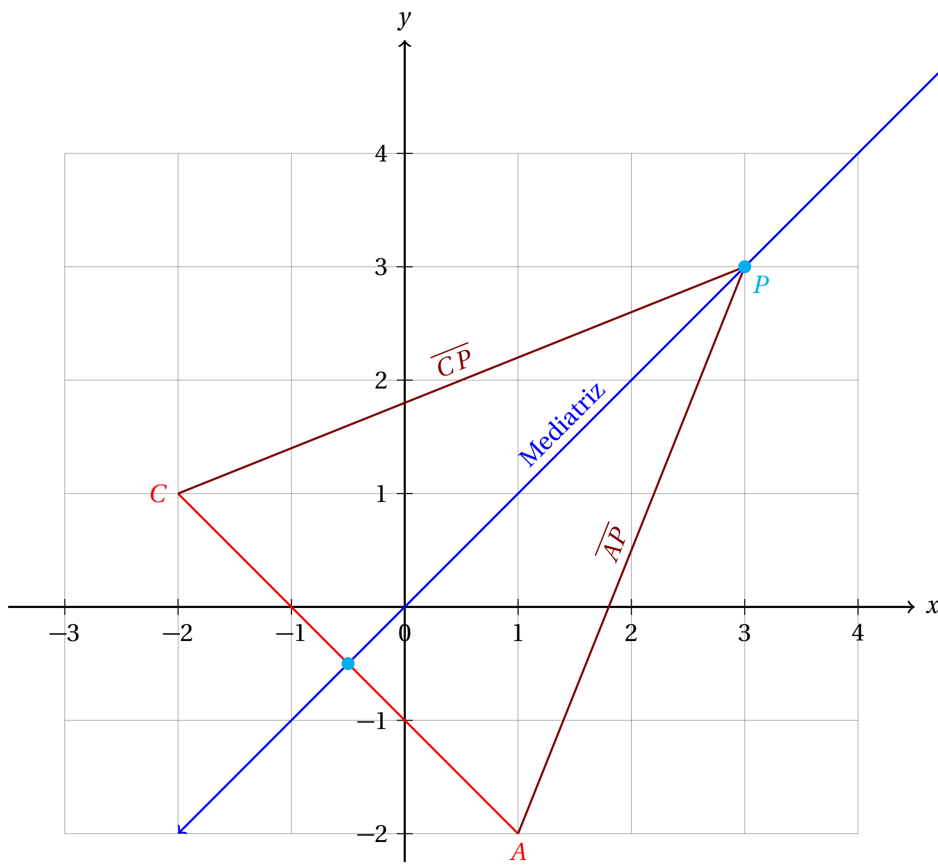
11.4 Circunferencia que pasa por tres puntos

En la sección *Ecuaciones de las rectas notables del triángulo* calculamos el punto donde se intersectan las tres mediatrices de los lados de un triángulo.

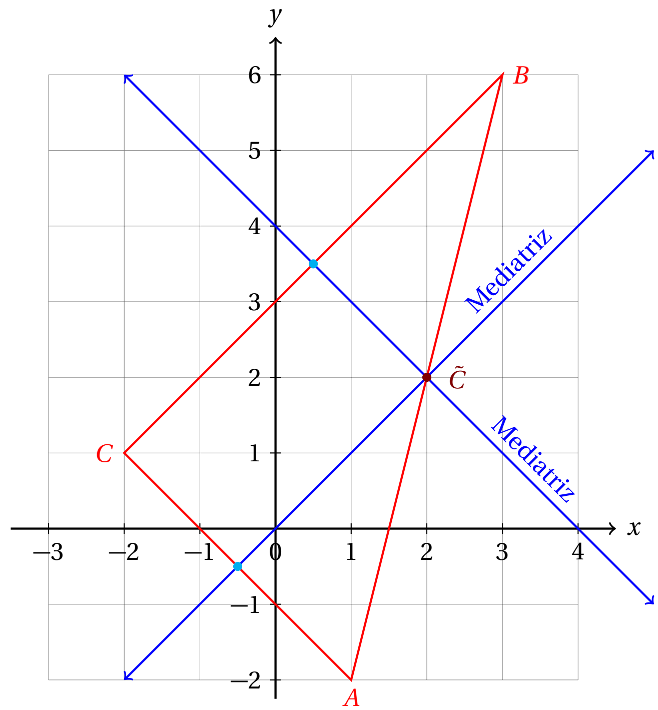
Este punto, llamado circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

11.4.1 Condiciones analíticas y geométricas

Observa que cualquier punto P que pertenece a la mediatriz de un segmento está a la misma distancia de los extremos del segmento sobre la cual se le construyó:



Si dibujamos un triángulo y trazamos las mediatrices de dos de sus lados, el punto donde se intersectan está a la misma distancia de los tres vértices.



- ✓ El punto $\tilde{C}$ es el punto donde se intersectan las dos mediatrices trazadas.

- ✓ Por pertenecer a la mediatriz del lado $\overline{AC}$ está a la misma distancia del vértice A como del vértice C. Es decir $|\overline{A\tilde{C}}| = |\overline{C\tilde{C}}|$.

- ✓ De manera semejante, por pertenecer a la mediatriz del lado $\overline{BC}$, está a la misma distancia del vértice B como del vértice C. Matemáticamente esto se denota por: $|\overline{B\tilde{C}}| = |\overline{C\tilde{C}}|$.

- ✓ Pero ya se había dicho que $|\overline{A\tilde{C}}| = |\overline{C\tilde{C}}|$. Entonces

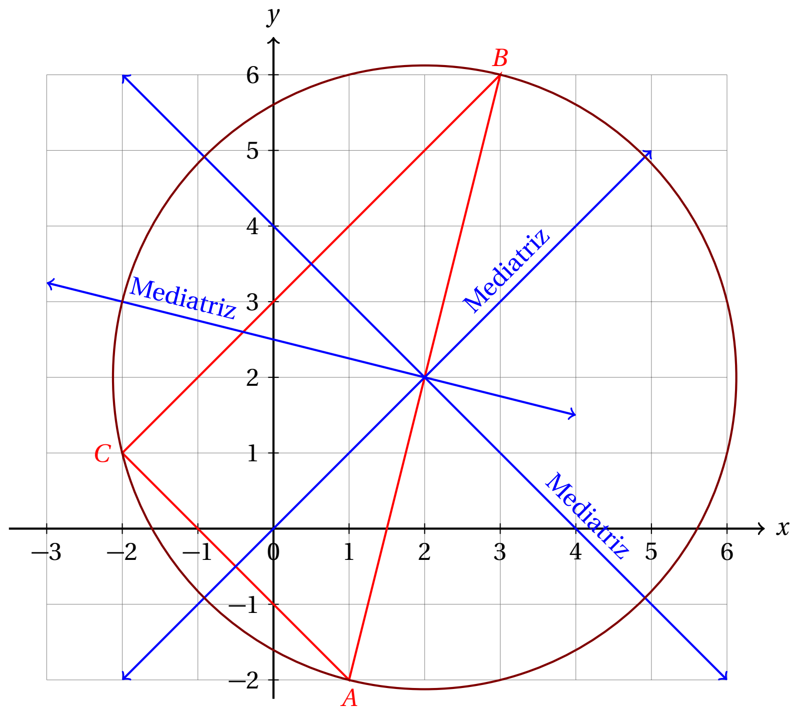
$$|\overline{A\tilde{C}}| = |\overline{B\tilde{C}}| = |\overline{C\tilde{C}}|$$

- ✓ Esto obliga a la mediatriz del lado $\overline{AB}$ a pasar por el punto $\tilde{C}$, porque está a la misma distancia de los vértices A y B.

- ✓ En conclusión, el punto donde se intersectan las tres mediatrices está a la misma distancia de los tres vértices.

Esto nos ayuda porque si dibujamos una circunferencia con centro en el circuncentro del triángulo, y radio igual a la distancia del circuncentro a cualquiera de los vértices del triángulo, la circunferencia pasará por los tres vértices.

El triángulo queda inscrito a la circunferencia y decimos que la circunferencia está circunscrita al triángulo. Por esta razón el punto donde se intesectan las tres mediatrices de un triángulo se llama circuncentro.



Esto nos sugiere que para calcular la ecuación de una circunferencia circunscrita a un triángulo dados los vértices del mismo encontremos las ecuaciones de dos de sus mediatrices, después el punto donde se intersectan. Este punto será el centro de la circunferencia. Para calcular el radio podemos calcular la distancia del cincuncentro a cualquiera de los vértices del triángulo y entonces podremos calcular la ecuación de la circunferencia.

Sin embargo hay otro método más sencillo. Como la ecuación de la circunferencia en su forma general es:

$$x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

donde: $D = -2\,h$, $E = -2\,k$, y $F = h^2 + k^2 - r^2$.

Como sabemos que la circunferencia debe pasar por los tres vértices, podemos sustituir sus coordenadas en la ecuación y así obtendremos tres ecuaciones, una por cada vértice y al resolver ese sistema de ecuaciones lineales encontraremos las incógnitas, que son D, E y F.

Una vez que conozcamos los valores de estas incógnitas podremos calcular los valores que nos interesan: h, k y r.

7. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DADOS TRES PUNTOS

Supongamos que queremos calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ y $C(x_c, y_c)$. Al sustituir en la ecuación de la circunferencia en su forma general obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
x_a\,D + y_a\,E + F &= -(x_a^2 + y_a^2)\\
x_b\,D + y_b\,E + F &= -(x_b^2 + y_b^2)\\
x_c\,D + y_c\,E + F &= -(x_c^2 + y_c^2)
\end{aligned}$$

Al resolver este S.E.L. encontramos los valores de D, E y F. Usando las definiciones: $D = -2\,h$, $E = -2\,k$, y $F = h^2 + k^2 - r^2$ podemos calcular los valores que nos interesan.

Ejemplo 1 Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: $P(-2,3)$, $Q(-2,-3)$ y $R(6,-1)$.

- Vamos a sustituir los valores de las coordenadas de cada punto en la ecuación de la circunferencia en la forma general.
- Así por cada punto obtendremos una ecuación.
- Ecuación para el punto P:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+Dx+Ey+F &= 0\\ (-2)^2+(3)^2-2D+3E+F &= 0\\ 4+9-2D+3E+F &= 0\\ -2D+3E+F &= -13 \end{aligned}$$

- De manera semejante obtenemos la ecuación que le corresponde a Q:

$$\begin{aligned} (-2)^2+(-3)^2-2D-3E+F &= 0\\ 4+9-2D-3E+F &= 0\\ -2D-3E+F &= -13 \end{aligned}$$

- Y finalmente para el punto R:

$$\begin{aligned} (6)^2+(-1)^2+6D-E+F &= 0\\ 36+7+6D-E+F &= 0\\ 6D-E+F &= -37 \end{aligned}$$

- Así hemos obtenido el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} -2D+3E+F &= -13\\ -2D-3E+F &= -13\\ 6D-E+F &= -37 \end{aligned}$$

- Ahora debemos resolverlo.
- Vamos a utilizar el método de determinantes.
- Empezamos escribiendo el S.E.L. en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 1 & -13\\ -2 & -3 & 1 & -13\\ 6 & -1 & 1 & -37 \end{array}\right]$$

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \left|\begin{array}{rrr} -2 & 3 & 1\\ -2 & -3 & 1\\ 6 & -1 & 1 \end{array}\right| = (6)+(2)+(18)-(-18)-(2)-(-6) = 48$$

- Dado que es distinto de cero, el S.E.L. tiene solución única.
- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para las incógnitas del S.E.L.

- Determinante auxiliar para D:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -13 & 3 & 1 \\ -13 & -3 & 1 \\ -37 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (39)+(13)+(-111)-(111)-(13)-(-39) = -144$$

- Determinante auxiliar para E:

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} -2 & -13 & 1 \\ -2 & -13 & 1 \\ 6 & -37 & 1 \end{vmatrix} = (26)+(74)+(-78)-(-78)-(74)-(26) = 0$$

- Determinante auxiliar para F:

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -13 \\ -2 & -3 & -13 \\ 6 & -1 & -37 \end{vmatrix} = (-222)+(-26)+(-234)-(234)-(-26)-(222) = -912$$

- Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\Delta_D}{\Delta_p} = \frac{-144}{48} = -3 \\ E &= \frac{\Delta_E}{\Delta_p} = \frac{0}{48} = 0 \\ F &= \frac{\Delta_F}{\Delta_p} = \frac{-912}{48} = -19 \end{aligned}$$

- Y sabiendo que $D = -3 = -2\,h$ es fácil concluir que: $h = 3/2$.

- También, si $E = 0 = -2\,k$ implica que $k = 0$.

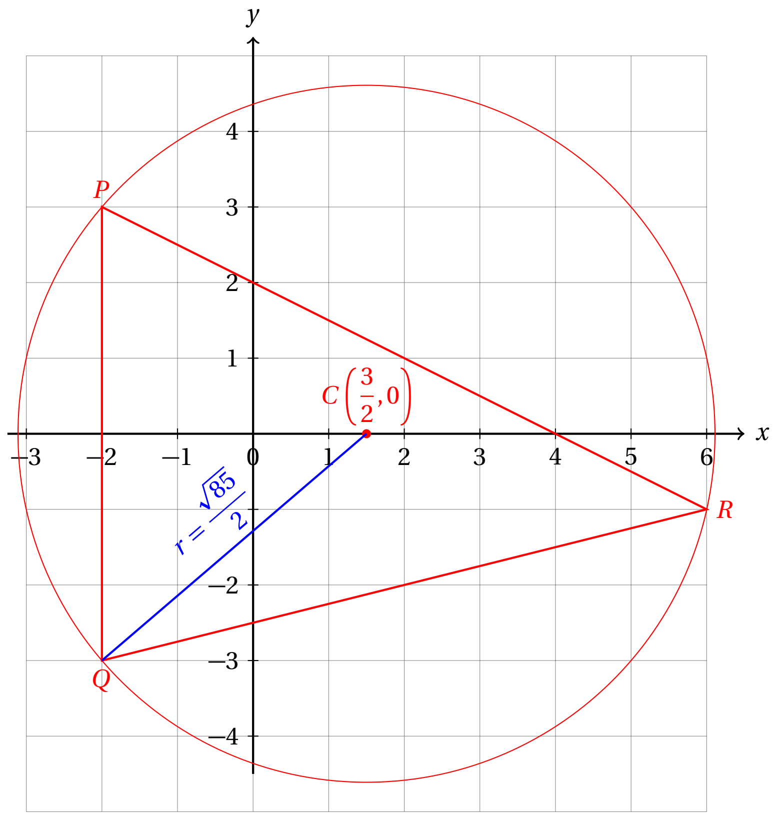
- Finalmente, sabemos que $F = -19 = h^2 + k^2 - r^2 = (1.5)^2 + (0)^2 - r^2$, de donde:

$$r^2 = 19 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{85}{4} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{\sqrt{85}}{2}$$

- Finalmente podemos calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-2,3)$, $Q(-2,-3)$ y $R(6,-1)$:

$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{84}{4} \end{aligned}$$

- La siguiente figura muestra la situación:



- Se te queda como ejercicio escribir la ecuación de esta circunferencia en la forma general.

Ejemplo 2 Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: $P(-4,1)$, $Q(3,-2)$ y $R(6,5)$.

- Vamos a sustituir los valores de las coordenadas de cada punto en la ecuación de la circunferencia en la forma general para obtener el S.E.L..
- Ecuación para el punto P:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F &= 0 \\ (-4)^2 + (1)^2 - 4\,D + E + F &= 0 \\ 16 + 1 - 4\,D + E + F &= 0 \\ -4\,D + E + F &= -17 \end{aligned}$$

- Ecuación que le corresponde al punto Q:

$$\begin{aligned} (3)^2 + (-2)^2 + 3\,D - 2\,E + F &= 0 \\ 9 + 4 + 3\,D - 2\,E + F &= 0 \\ 3\,D - 2\,E + F &= -13 \end{aligned}$$

- Y finalmente para el punto R:

$$\begin{aligned} (6)^2 + (5)^2 + 6\,D + 5\,E + F &= 0 \\ 36 + 25 + 6\,D + 5\,E + F &= 0 \\ 6\,D + 5\,E + F &= -61 \end{aligned}$$

- Así hemos obtenido el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} -4D+E+F &= -17 \\ 3D-2E+F &= -13 \\ 6D+5E+F &= -61 \end{aligned}$$

- Ahora debemos resolverlo.
- Escribimosel S.E.L. en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 1 & 1 & -17 \\ 3 & -2 & 1 & -13 \\ 6 & 5 & 1 & -61 \end{array}\right]$$

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (8)+(15)+(6)-(-12)-(-20)-(3) = 58$$

- Dado que es distinto de cero, el S.E.L. tiene solución única.
- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para las incógnitas del S.E.L.
- Determinante auxiliar para D:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -17 & 1 & 1 \\ -13 & -2 & 1 \\ -61 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -116$$

- Determinante auxiliar para E:

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} -4 & -17 & 1 \\ 3 & -13 & 1 \\ 6 & -61 & 1 \end{vmatrix} = -348$$

- Determinante auxiliar para F:

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -17 \\ 3 & -2 & -13 \\ 6 & 5 & -61 \end{vmatrix} = -1102$$

- Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\Delta_D}{\Delta_p} = \frac{-116}{58} = -2 \\ E &= \frac{\Delta_E}{\Delta_p} = \frac{-348}{58} = -6 \\ F &= \frac{\Delta_F}{\Delta_p} = \frac{-1102}{58} = -19 \end{aligned}$$

- Entonces, $D = -2 = -2\,h$ implica que: $h = 1$.
- También, si $E = -6 = -2\,k$ se sigue que $k = 3$.

- Y si $F = -19 = h^2 + k^2 - r^2 = (1)^2 + (3)^2 - r^2$, se sigue que:

$$r^2 = 29 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{29} \approx 5.385$$

- Finalmente podemos calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-4,1)$, $Q(3,-2)$ y $R(6,5)$:

$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 &= 29 \end{aligned}$$

- Se te queda como ejercicio graficar la circunferencia verificando que pase por los tres puntos y escribir la ecuación en su forma general.

Ejemplo 3 Calcula la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $P(-4,3)$, $Q(2,-3)$ y $R(6,3)$.

- Este problema en esencia es el mismo que el que hemos resuelto en los ejemplos anteriores.
- Vamos a sustituir los valores de las coordenadas de cada punto en la ecuación de la circunferencia en la forma general para obtener el S.E.L.
- Ecuación para el punto P:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F &= 0 \\ (-4)^2 + (3)^2 - 4\,D + 3\,E + F &= 0 \\ 16 + 9 - 4\,D + 3\,E + F &= 0 \\ -4\,D + 3\,E + F &= -25 \end{aligned}$$

- Ecuación que le corresponde al punto Q:

$$\begin{aligned} (2)^2 + (-3)^2 + 3\,D - 2\,E + F &= 0 \\ 4 + 9 + 2\,D - 3\,E + F &= 0 \\ 2\,D - 3\,E + F &= -13 \end{aligned}$$

- Y finalmente para el punto R:

$$\begin{aligned} (6)^2 + (3)^2 + 6\,D + 3\,E + F &= 0 \\ 36 + 9 + 6\,D + 3\,E + F &= 0 \\ 6\,D + 3\,E + F &= -45 \end{aligned}$$

- Así hemos obtenido el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} -4\,D + 3\,E + F &= -25 \\ 2\,D - 3\,E + F &= -13 \\ 6\,D + 3\,E + F &= -45 \end{aligned}$$

- Ahora debemos resolverlo.

- Escribimosel S.E.L. en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 3 & 1 & -25 \\ 2 & -3 & 1 & -13 \\ 6 & 3 & 1 & -45 \end{array}\right]$$

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (12)+(6)+(18)-(-18)-(-12)-(6) = 60$$

- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para las incógnitas del S.E.L.
- Determinante auxiliar para D:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -25 & 3 & 1 \\ -13 & -3 & 1 \\ -45 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -120$$

- Determinante auxiliar para E:

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} -4 & -25 & 1 \\ 2 & -13 & 1 \\ 6 & -45 & 1 \end{vmatrix} = -240$$

- Determinante auxiliar para F:

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -25 \\ 2 & -3 & -13 \\ 6 & 3 & -45 \end{vmatrix} = -1260$$

- Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\Delta_D}{\Delta_p} = \frac{-120}{60} = -2 \\ E &= \frac{\Delta_E}{\Delta_p} = \frac{-240}{60} = -4 \\ F &= \frac{\Delta_F}{\Delta_p} = \frac{-1260}{60} = -21 \end{aligned}$$

- Entonces, $D = -2 = -2\,h$ implica que: $h = 1$.
- También, si $E = -4 = -2\,k$ se sigue que $k = 2$.
- Y si $F = -21 = h^2 + k^2 - r^2 = (1)^2 + (2)^2 - r^2$. De donde:

$$r^2 = 26 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{26} \approx 5.099$$

- Finalmente podemos calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-4,3)$, $Q(2,-3)$ y $R(6,3)$:

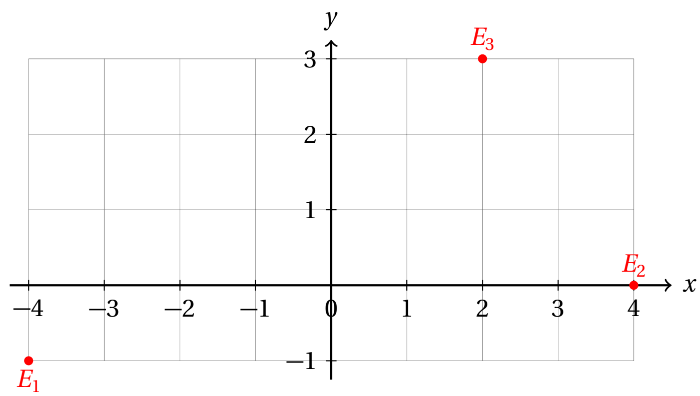
$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 26 \end{aligned}$$

- Se te queda como ejercicio graficar la circunferencia verificando que pase por los tres puntos y escribir la ecuación en su forma general.

Ejemplo 4

En un mapa se han localizado las escuelas E_1, E_2 y E_3 ubicadas en las coordenadas $E_1(-4,-1)$, $E_2(4,0)$ y $E_3(2,3)$ medidas en kilómetros. Se planea construir un centro de apoyo escolar que esté ubicado a la misma distancia de las tres escuelas. ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde deben ubicar el centro de apoyo escolar?, ¿y a qué distancia se encuentra de cada escuela?

- Tenemos la siguiente situación gráfica:



- Debemos calcular las coordenadas del punto que se encuentre a la misma distancia de las tres escuelas.
- Una vez que las conozcamos podremos calcular la distancia a cada escuela.
- Como el punto que buscamos está a la misma distancia de las escuelas podemos traducir el problema al siguiente:

Comentario

Calcula las coordenadas del circuncentro del triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $E_1(-4,-1)$, $E_2(4,0)$ y $E_3(2,3)$.

El circuncentro corresponde al punto donde debemos ubicar el centro de apoyo escolar y los vértices del triángulo corresponden a las escuelas.

- Ahora vamos a resolver el problema usando el método de los ejemplos anteriores.
- Ecuación para la escuela E_1:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+D\,x+E\,y+F &= 0\\
(-4)^2+(-1)^2-4\,D-E+F &= 0\\
16+1-4\,D-E+F &= 0\\
-4\,D-E+F &= -17
\end{aligned}$$

- Ecuación para la escuela E_2:

$$\begin{aligned}
(4)^2+(0)^2+4\,D+(0)\,E+F &= 0\\
16+4\,D+F &= 0\\
4\,D+F &= -16
\end{aligned}$$

- Y para la escuela E_3:

$$\begin{aligned}(2)^2+(3)^2+2\,D+3\,E+F &= 0\\ 4+9+2\,D+3\,E+F &= 0\\ 2\,D+3\,E+F &= -13\end{aligned}$$

- Así hemos obtenido el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned}-4\,D-\quad E+F&=-17\\ 4\,D\qquad\quad +F&=-16\\ 2\,D+3\,E+F&=-13\end{aligned}$$

- Para resolverlo escribimos el S.E.L. en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rrr|r}-4 & -1 & 1 & -17\\ 4 & 0 & 1 & -16\\ 2 & 3 & 1 & -13\end{array}\right]$$

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p=\begin{vmatrix}-4 & -1 & 1\\ 4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=(0)+(12)+(-2)-(0)-(-12)-(-4)=26$$

- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para las incógnitas del S.E.L.
- Determinante auxiliar para D:

$$\Delta_D=\begin{vmatrix}-17 & -1 & 1\\ -16 & 0 & 1\\ -13 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$$

- Determinante auxiliar para E:

$$\Delta_E=\begin{vmatrix}-4 & -17 & 1\\ 4 & -16 & 1\\ 2 & -13 & 1\end{vmatrix}=26$$

- Determinante auxiliar para F:

$$\Delta_F=\begin{vmatrix}-4 & -1 & -17\\ 4 & 0 & -16\\ 2 & 3 & -13\end{vmatrix}=-416$$

- Finalmente, tenemos:

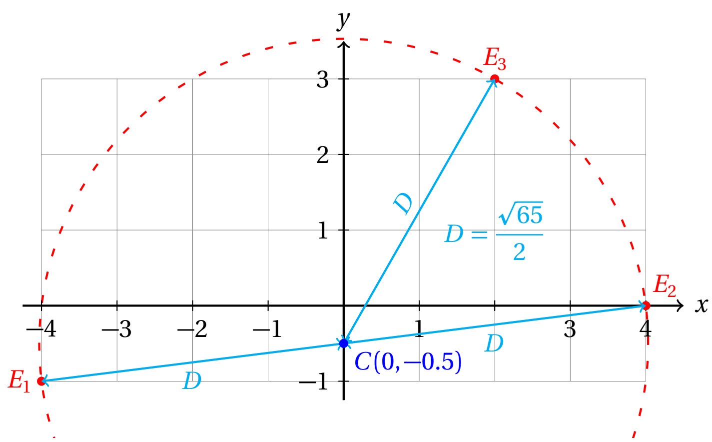
$$\begin{aligned}D &= \frac{\Delta_D}{\Delta_p}=\frac{0}{26}=0\\ E &= \frac{\Delta_E}{\Delta_p}=\frac{26}{26}=1\\ F &= \frac{\Delta_F}{\Delta_p}=\frac{-416}{26}=16\end{aligned}$$

- Entonces, $D=0=-2\,h$ implica que: $h=0$.

- También, si $E = 1 = -2\,k$ se sigue que $k = -1/2$.
- Y si $F = 16 = h^2 + k^2 - r^2 = (0)^2 + (-0.5)^2 - r^2$, tenemos que:

$$r^2 = \frac{65}{4} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{\sqrt{65}}{2} \approx 4.031$$

- El punto $C(h,k)$ donde se debe ubicar el centro de apoyo escolar para equidistar de las tres escuelas es: $C(0,-0.5)$
- La distancia a cada una de las tres escuelas es: $D \approx 4.031$ km.
- Geométricamente se tiene la siguiente solución del problema:



Ejemplo 5 Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(x_a, m\,x_a + b)$, $B(x_b, m\,x_b + b)$ y $C(x_c, m\,x_c + b)$.

- Observa que estos puntos están sobre la recta $y = m\,x + b$.
- Primero vamos a escribir el S.E.L. que obtenemos al sustituir las coordenadas de los puntos en la ecuación general:

$$\begin{aligned}
x_a\,D + (m\,x_a + b)\,E + F &= -x_a^2 - (m\,x_a + b)^2\\
x_b\,D + (m\,x_b + b)\,E + F &= -x_b^2 - (m\,x_b + b)^2\\
x_c\,D + (m\,x_c + b)\,E + F &= -x_c^2 - (m\,x_c + b)^2
\end{aligned}$$

- Al reescribir este S.E.L. en forma matricial obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
x_a & m\,x_a + b & 1 & -x_a^2 - (m\,x_a + b)^2\\
x_b & m\,x_b + b & 1 & -x_b^2 - (m\,x_b + b)^2\\
x_c & m\,x_c + b & 1 & -x_c^2 - (m\,x_c + b)^2
\end{array}\right]$$

- Vamos a calcular el determinante principal de este sistema de ecuaciones y veremos qué obtenemos:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
x_a & m\,x_a + b & 1\\
x_b & m\,x_b + b & 1\\
x_c & m\,x_c + b & 1
\end{vmatrix} &= x_a\,(m\,x_b + b) + x_b\,(m\,x_c + b) + x_c\,(m\,x_a + b) +\\
&\quad -x_c\,(m\,x_b + b) - x_a\,(m\,x_c + b) - x_b\,(m\,x_a + b)\\
&= 0
\end{aligned}$$

- Ahora debemos observar que por tres puntos puede pasar a lo más una circunferencia.
- Entonces, no es posible que tengamos un número infinito de soluciones para este caso, lo que indica que el S.E.L. no tiene soluciones.
- En otras palabras, no es posible trazar una circunferencia que pase por tres puntos que estén alineados.

Entonces, existe la posibilidad de que te encuentres con un problema de este tipo y los tres puntos estén alineados.

En este caso, el último ejemplo nos indica que el determinante principal del S.E.L. será cero y así podremos concluir que la solución del problema consiste en la sentencia: «*No existe niguna circunferencia que pase por esos tres puntos, pues están alineados.*»

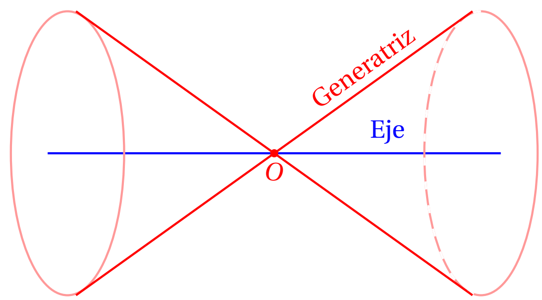
11.5 CIRCUNFERENCIA Y SECCIONES CÓNICAS

El nombre «*Secciones Cónicas*» se derivó del hecho de que estas figuras se encontraron originalmente en un cono.

Cuando se hace intersectar un cono con un plano obtenemos distintas figuras. Cada una de ellas es una cónica.

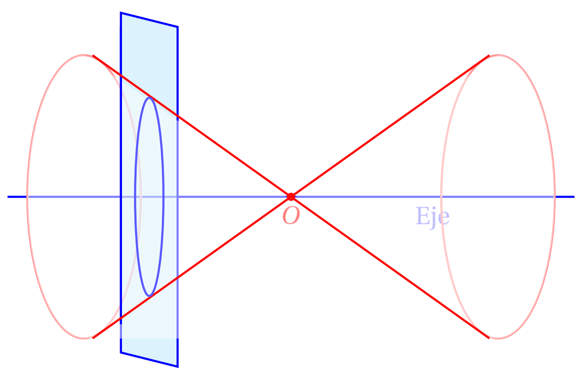
CONO
Un cono es el lugar geométrico que se forma al hacer girar una recta que pasa por el origen alrededor de un eje. La recta que se hace girar siempre se considera distinta al eje y se conoce como generatriz.

Definición 1

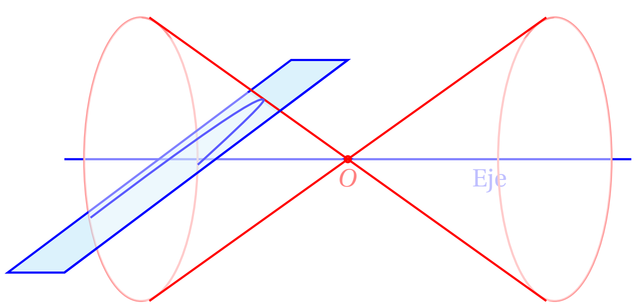


Al cortar este cono con planos en diferentes posiciones obtenemos distintas figuras.

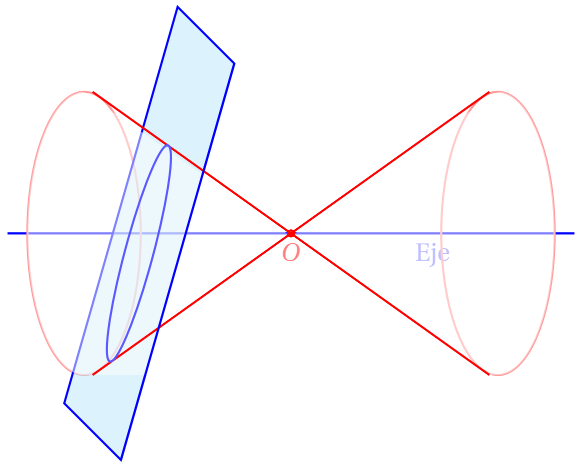
El corte para obtener una circunferencia se obtiene colocando el plano perpendicular al eje y, obviamente que no pase por el origen del cono, porque en ese caso la intersección sería un punto.



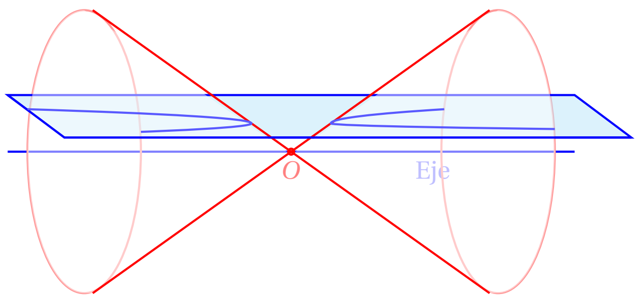
Si el plano se coloca paralelo a una recta que se encuentre sobre el cono, de manera que lo corte, obtenemos una parábola:



Si el plano corta al cono en una de sus ramas y no es perpendicular al eje ni paralelo a una orilla del cono, se forma una elipse:



Y si el plano corta ambas ramas del cono obtenemos una hipérbola:



Estos problemas pueden replantearse como la proporción entre las distancias desde un punto fijo a una recta fija sobre el plano.

En estos casos, tenemos los siguientes planteamientos que originan los mismos lugares geométricos:

Parábola: Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo (llamado foco) como de una recta fija (llamada directriz), ambos sobre el mismo plano.

Elipse: Es el lugar geométrico de todos los puntos que están k veces más alejados de una recta fija (llamada directriz) que de un punto fijo (llamado foco).

Hipérbola: Es el lugar geométrico de todos los puntos que están k veces más cerca de una recta fija (llamada directriz) que de un punto fijo (llamado foco).

De manera semejante, las dos últimas cónicas pueden definirse a partir de distancias medidas de dos puntos fijos, que se denominan focos de la cónica.

Ejercicios 11.5 Calcula la ecuacion de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(h,k)$ y tiene un radio r en la forma ordinaria y general.

1) $C(-5,5)$ y $r=3$.

F. Ordinaria: $(x+5)^2+(y-5)^2=9$

F. General: $x^2+y^2-10x+10y+41=0$

2) $C(9,7)$ y $r=3$.

F. Ordinaria: $(x-9)^2+(y-7)^2=9$

F. General: $x^2+y^2+18x+14y+121=0$

3) $C(-8,2)$ y $r=9$.

F. Ordinaria: $(x+8)^2+(y-2)^2=81$

F. General: $x^2+y^2-16x+4y-13=0$

4) $C(-2,-4)$ y $r=1$.

F. Ordinaria: $(x+2)^2+(y+4)^2=1$

F. General: $x^2+y^2-4x-8y+19=0$

5) $C(9,6)$ y $r=7$.

F. Ordinaria: $(x-9)^2+(y-6)^2=49$

F. General: $x^2+y^2+18x+12y+68=0$

6) $C(-6,-7)$ y $r=9$.

F. Ordinaria: $(x+6)^2+(y+7)^2=81$

F. General: $x^2+y^2-12x-14y+4=0$

7) $C(-7,-3)$ y $r=8$.

F. Ordinaria: $(x+7)^2+(y+3)^2=64$

F. General: $x^2+y^2-14x-6y-6=0$

8) $C(-2,5)$ y $r=3$.

F. Ordinaria: $(x+2)^2+(y-5)^2=9$

F. General: $x^2+y^2-4x+10y+20=0$

9) $C(3,8)$ y $r=6$.

F. Ordinaria: $(x-3)^2+(y-8)^2=36$

F. General: $x^2+y^2+6x+16y+37=0$

10) $C(-3,-3)$ y $r=5$.

F. Ordinaria: $(x+3)^2+(y+3)^2=25$

F. General: $x^2+y^2-6x-6y-7=0$

11) $C(9,6)$ y $r=2$.

F. Ordinaria: $(x-9)^2+(y-6)^2=4$

F. General: $x^2+y^2+18x+12y+113=0$

12) $C(7,7)$ y $r=5$.

F. Ordinaria: $(x-7)^2+(y-7)^2=25$

F. General: $x^2+y^2+14x+14y+73=0$

13) $C(-6,-2)$ y $r=8$.

F. Ordinaria: $(x+6)^2+(y+2)^2=64$

F. General: $x^2+y^2-12x-4y-24=0$

14) $C(6,-5)$ y $r=3$.

F. Ordinaria: $(x-6)^2+(y+5)^2=9$

F. General: $x^2+y^2+12x-10y+52=0$

15) $C(3,-6)$ y $r=6$.

F. Ordinaria: $(x-3)^2+(y+6)^2=36$

F. General: $x^2+y^2+6x-12y+9=0$

16) $C(-8,-8)$ y $r=5$.

F. Ordinaria: $(x+8)^2+(y+8)^2=25$

F. General: $x^2+y^2-16x-16y+103=0$

17) $C(-2,8)$ y $r=4$.

F. Ordinaria: $(x+2)^2+(y-8)^2=16$

F. General: $x^2+y^2-4x+16y+52=0$

18) $C(-2,-8)$ y $r=4$.

F. Ordinaria: $(x+2)^2+(y+8)^2=16$

F. General: $x^2+y^2-4x-16y+52=0$

19) $C(9,-2)$ y $r=6$.

F. Ordinaria: $(x-9)^2+(y+2)^2=36$

F. General: $x^2+y^2+18x-4y+49=0$

20) $C(-6,-3)$ y $r=8$.

F. Ordinaria: $(x+6)^2+(y+3)^2=64$

F. General: $x^2+y^2-12x-6y-19=0$

21) $C(-5,2)$ y $r=8$.

F. Ordinaria: $(x+5)^2+(y-2)^2=64$

F. General: $x^2+y^2-10x+4y-35=0$

22) $C(-7,-2)$ y $r=9$.

F. Ordinaria: $(x+7)^2+(y+2)^2=81$

F. General: $x^2+y^2-14x-4y-28=0$

23) $C(-7,-5)$ y $r=1$.

F. Ordinaria: $(x+7)^2+(y+5)^2=1$

F. General: $x^2+y^2-14x-10y+73=0$

24) $C(9,-2)$ y $r=4$.

F. Ordinaria: $(x-9)^2+(y+2)^2=16$

F. General: $x^2+y^2+18x-4y+69=0$

25) $C(-5,8)$ y $r=2$.

F. Ordinaria: $(x+5)^2+(y-8)^2=4$

F. General: $x^2+y^2-10x+16y+85=0$

Para los siguientes ejercicios, a partir de la ecuación general de la circunferencia calcula su centro $C(h,k)$ y su radio r y encuentra también la ecuación en su forma ordinaria. **Comentario**

26) $x^2+y^2+14x+16y+77=0$

Centro: $C(7,8)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x-7)^2+(y-8)^2=36$

27) $x^2+y^2+8x+4y-16=0$

Centro: $C(4,2)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x-4)^2+(y-2)^2=36$

28) $x^2+y^2-8x+6y-24=0$

Centro: $C(-4,3)$ **Radio:** $r=7$

F. Ordinaria: $(x+4)^2+(y-3)^2=49$

29) $x^2+y^2-12x+14y+36=0$

Centro: $C(-6,7)$ **Radio:** $r=7$

F. Ordinaria: $(x+6)^2+(y-7)^2=49$

30) $x^2+y^2-14x-6y-23=0$

Centro: $C(-7,-3)$ **Radio:** $r=9$

F. Ordinaria: $(x+7)^2+(y+3)^2=81$

31) $x^2+y^2+14x+8y+64=0$

Centro: $C(7,4)$ **Radio:** $r=1$

F. Ordinaria: $(x-7)^2+(y-4)^2=1$

32) $x^2+y^2-14x+8y+49=0$

Centro: $C(-7,4)$ **Radio:** $r=4$

F. Ordinaria: $(x+7)^2+(y-4)^2=16$

33) $x^2+y^2+14x-8y+29=0$

Centro: $C(7,-4)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x-7)^2+(y+4)^2=36$

34) $x^2+y^2+4x-14y-28=0$

Centro: $C(2,-7)$ **Radio:** $r=9$

F. Ordinaria: $(x-2)^2+(y+7)^2=81$

35) $x^2+y^2+10x+2y+1=0$

Centro: $C(5,1)$ **Radio:** $r=5$

F. Ordinaria: $(x-5)^2+(y-1)^2=25$

36) $x^2+y^2-18x-14y+94=0$

Centro: $C(-9,-7)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x+9)^2+(y+7)^2=36$

37) $x^2+y^2-2x+14y+46=0$

Centro: $C(-1,7)$ **Radio:** $r=2$

F. Ordinaria: $(x+1)^2+(y-7)^2=4$

38) $x^2+y^2-14x+8y+49=0$

Centro: $C(-7,4)$ **Radio:** $r=4$

F. Ordinaria: $(x+7)^2+(y-4)^2=16$

39) $x^2+y^2+2x+8y-47=0$

Centro: $C(1,4)$ **Radio:** $r=8$

F. Ordinaria: $(x-1)^2+(y-4)^2=64$

40) $x^2+y^2-4x-10y+20=0$

Centro: $C(-2,-5)$ **Radio:** $r=3$

F. Ordinaria: $(x+2)^2+(y+5)^2=9$

41) $x^2+y^2+2x-6y+1=0$

Centro: $C(1,-3)$ **Radio:** $r=3$

F. Ordinaria: $(x-1)^2+(y+3)^2=9$

42) $x^2+y^2+18x-10y+70=0$

Centro: $C(9,-5)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x-9)^2+(y+5)^2=36$

43) $x^2+y^2-18x+10y+102=0$

Centro: $C(-9,5)$ **Radio:** $r=2$

F. Ordinaria: $(x+9)^2+(y-5)^2=4$

44) $x^2+y^2-6x+8y+16=0$

Centro: $C(-3,4)$ **Radio:** $r=3$

F. Ordinaria: $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

45) $x^2+y^2-4x+12y+4=0$

Centro: $C(-2,6)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x+2)^2+(y-6)^2=36$

46) $x^2+y^2-12x+18y+53=0$

Centro: $C(-6,9)$ **Radio:** $r=8$

F. Ordinaria: $(x+6)^2+(y-9)^2=64$

47) $x^2+y^2+4x-2y-11=0$

Centro: $C(2,-1)$ **Radio:** $r=4$

F. Ordinaria: $(x-2)^2+(y+1)^2=16$

48) $x^2+y^2+8x-4y+19=0$

Centro: $C(4,-2)$ **Radio:** $r=1$

F. Ordinaria: $(x-4)^2+(y+2)^2=1$

49) $x^2+y^2-14x-4y+17=0$

Centro: $C(-7,-2)$ **Radio:** $r=6$

F. Ordinaria: $(x+7)^2+(y+2)^2=36$

50) $x^2+y^2+4x+14y+49=0$

Centro: $C(2,7)$ **Radio:** $r=2$

F. Ordinaria: $(x-2)^2+(y-7)^2=4$

Para los siguientes ejercicios, a partir de los tres puntos dados, calcula la ecuación de la circunferencia (en su forma general) que pasa por esos puntos, calcula su centro $C(h,k)$ y su radio r así como la ecuación en su forma ordinaria. **Comentario**

51) $P(-2,3)$, $Q(-1,-2)$ y $R(4,3)$. $C(1,1)$, $r=\sqrt{13}$

52) $P(-2,3)$, $Q(3,-2)$ y $R(3,4)$. $C(1,1)$, $r=\sqrt{13}$

53) $P(-4,3)$, $Q(1,-2)$ y $R(4,7)$. $C(1,3)$, $r=5$

54) $P(-4,3)$, $Q(1,-2)$ y $R(2,3)$. $C(-1,1)$, $r=\sqrt{13}$

55) $P(5,6)$, $Q(-3,2)$ y $R(-1,8)$. $C(1,4)$, $r=\sqrt{20}$

Formulario

Unidad Once

Ec. Circunferencia F. ordinaria: Centro en el origen y radio r:

$$x^2+y^2=r^2$$

Ec. Circunferencia F. ordinaria: Centro en el punto $C(h,k)$ y radio r:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Ec. Circunferencia: Forma general:

$$x^2+y^2+D\,x+E\,y+F=0$$

Si el centro de la circunferencia es el punto $C(h,k)$ y su radio es r se cumple:

$$\begin{aligned} D &= -2\,h \\ E &= -2\,k \\ F &= h^2+k^2-r^2 \end{aligned}$$

Capítulo 12

La parábola

Por aprender...

Por qué es importante...

En la naturaleza encuentras parábolas cuando lanzas una piedra por el aire (su trayectoria es una parábola), también se aplican para la construcción de puentes, antenas de recepción de señales satelitales, generadores de energía solar por medio de la concentración de los rayos del sol, etc., por eso, muchos problemas prácticos se modelan con ecuaciones de parábolas.

12.1 Caracterización geométrica

En la sección *Lugares geométricos* se muestra cómo caracterizar una parábola geométricamente, a través de la solución de un ejemplo.

Ahora vamos a generalizar la solución del ejemplo resuelto en esa sección.

12.1.1 La parábola como lugar geométrico

Ejemplo 1

Un punto $P(x,y)$ se mueve sobre el plano de manera que su distancia al punto $F(h,k+p)$ sea siempre la misma que la distancia a a la recta: $\ell: \ y-k+p=0$. Encuentra la ecuación que representa a este lugar geométrico.

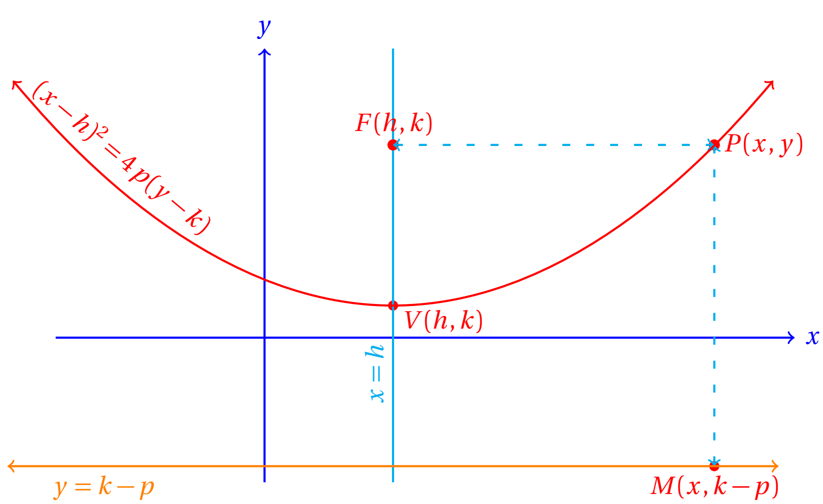
- Algebraicamente, las condiciones del problema son:

$$\begin{aligned}
|\overline{PF}| &= |\overline{PM}| \\
\sqrt{(x-h)^2+(y-k-p)^2} &= \sqrt{(x-x)^2+(y-k+p)^2} \\
(x-h)^2+(y-k-p)^2 &= (x-x)^2+(y-k+p)^2
\end{aligned}$$

Después de simplificar obtenemos:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

- Esta es la ecuación en su forma ordinaria que representa al lugar geométrico.
- Geométricamente, tenemos la siguiente situación:

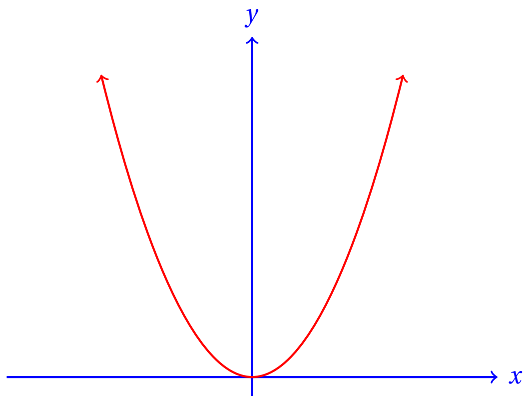


Ahora que hemos deducido la ecuación de la parábola en forma ordinaria, vamos a hacer un paréntesis para tener una herramienta para recordar hacia dónde abre, solamente observando la ecuación.

A la ecuación:

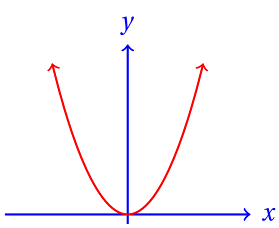
$$x^2 = +4\,p\,y$$

le corresponde una parábola como la siguiente:

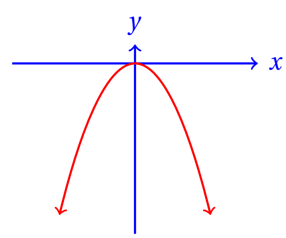


Podemos recordar la ecuación a partir de la parábola si recordamos que la parábola abre en el sentido positivo ($p > 0$) del eje y.

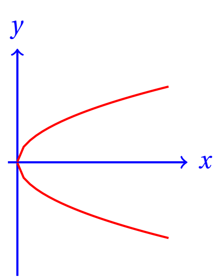
De manera semejante, podemos leer las gráficas y relacionarlas con sus ecuaciones respectivas:



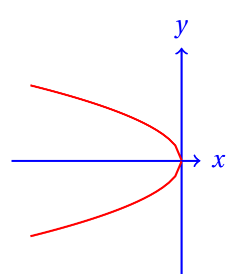
$x^2 = +4\,|p|\,y$



$x^2 = -4\,|p|\,y$



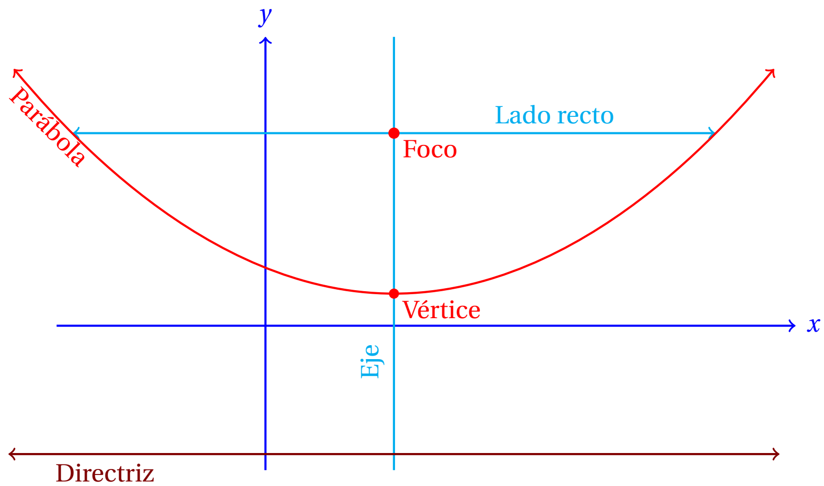
$y^2 = +4\,|p|\,x$



$y^2 = -4\,|p|\,x$

8. Elementos de la parábola

El siguiente gráfico indica los elementos de la parábola.



LADO RECTO
Es el segmento de recta con extremos sobre la parábola y que es perpendicular al eje y pasa por el foco.

Definición 1

Como la distancia entre el vértice $V(h,k)$ y foco $F(h,k+p)$ es $|p|$, entonces la distancia entre el foco y la directriz es $2|p|$. Por la definición de parábola, esa misma distancia es la que hay entre cualquier extremo del lado recto y la directriz. Pero esa es la misma distancia de cualquier extremo del lado recto al foco, que representa el punto medio del lado recto. Por eso, la longitud del lado recto es $4|p|$.

Entonces, los extremos del lado recto son: $M(h+2|p|,k+p)$ y $N(h-2|p|,k+p)$. Esto es así porque para encontrar un extremo nos trasladamos hacia la derecha $2|p|$ unidades y para encontrar el otro extremo nos recorremos esa misma distancia, pero hacia la izquierda.

Observa que hemos escrito $|p|$ en lugar de p, porque p se considera como una distancia dirigida, es decir, puede ser negativa.

Nota: En esta discusión se ha considerado solamente la parábola vertical que abre hacia arriba. De manera semejante podemos desarrollar una discusión para la parábola vertical que abre hacia abajo y las parábolas horizontales que abren hacia la derecha y hacia la izquierda (respectivamente).

9. FORMAS DE TRAZO A PARTIR DE LA DEFINICIÓN

Para dibujar la parábola con regla y compás podemos utilizar uno de varios métodos conocidos.

Aquí solamente revisaremos uno para que puedas realizar el trazo fácilmente.

Para esto vamos a requerir una escuadra con un ángulo recto (cualquiera) y una cuerda. La de un zapato estará bien para el trazo.

1. Primero debemos definir dónde estarán el foco de la parábola (el punto F) y la directriz. Trázalos en tu cuaderno. El foco no debe estar sobre la directriz.

2. Si deseas, aunque no se requiere, también puedes trazar el eje de la parábola como una recta perpendicular a la directriz que pase por el foco.

3. Ahora coloca una orilla de la escuadra sobre la directriz y fija un extremo de la cuerda en el foco.

4. Mide la distancia desde el foco hasta la directriz usando la cuerda. Recuerda que debe ser perpendicular a la directriz.

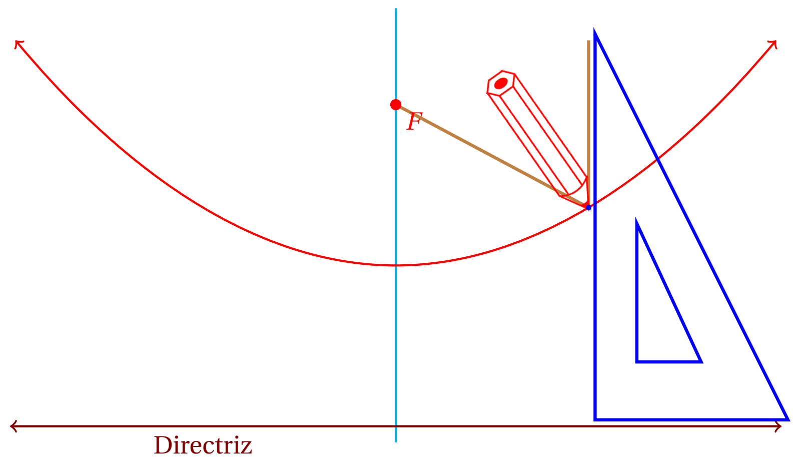
5. Fija el otro extremo de la cuerda a un punto sobre la escuadra.

6. Con tu lápiz, listo para dibujar la parábola, coloca la punta del lápiz tensando la cuerda contra la orilla de la escuadra, que deberá estar alejada una distancia igual a la distancia entre el foco y la directriz (p) para iniciar el trazo.

Conforme vayas moviendo la escuadra, el lápiz debe ir trazando una parábola.

Se supone que el lápiz mantiene la cuerda bien tensa y que los extremos de ésta no se mueven, sino que están fijos, uno sobre el foco de la parábola y el otro en un punto de la escuadra.

La siguiente figura ilustra la situación:



En este caso la longitud de la cuerda es igual a la longitud del lado de la escuadra sobre el cual se dibuja la parábola.

Tú debes identificar la forma de la parábola al ver la ecuación. Así será más fácil resolver los problemas de esta unidad.

12.2 Ecuaciones ordinarias de la parábola

En la sección anterior dedujimos la ecuación de la parábola en su forma ordinaria. Ahora vamos a utilizar la ecuación.

Empezaremos estudiando las parábolas con vértice en el origen.

12.2.1 Parábolas con vértice en el origen

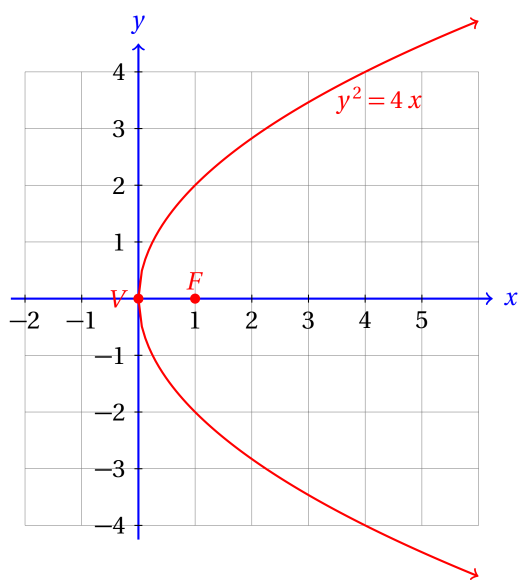
Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen y su foco en el punto $F(1,0)$.

- Esta parábola es horizontal y abre hacia la derecha.
- Puedes darte cuenta de esto graficando el vértice y el foco.
- Como la parábola es horizontal tenemos que su ecuación es de la forma:

$$y^2 = 4\,p\,x$$

- Sabemos que p es igual a la distancia del vértice al foco.
- De la gráfica es muy sencillo deducir que esa distancia es 1.



- Entonces, la ecuación de esa parábola es:

$$y^2 = 4x$$

- Ahora vamos a calcular sus elementos:

  Lado recto: $\text{LLR} = 4\,p = 4(1) = 4.$

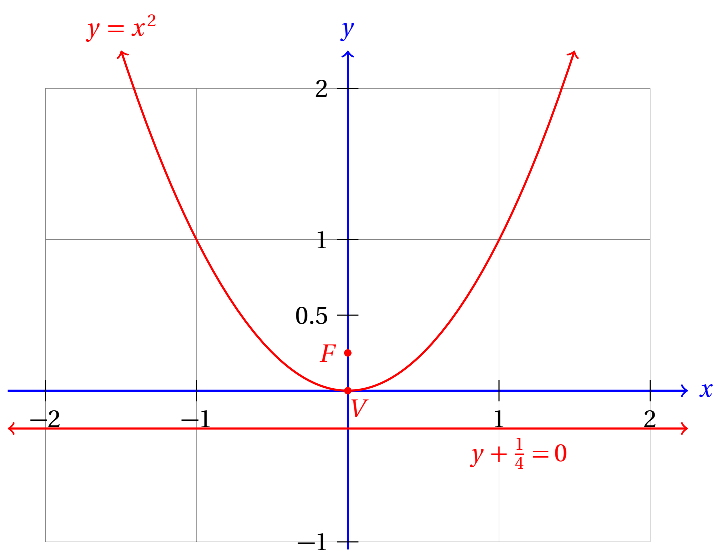
  Directriz: $x = h - p = 0 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad x + 1 = 0.$

- Se te queda como ejercicio graficar el lado recto y la directriz de esta parábola.

El siguiente ejemplo tratará una parábola vertical.

Ejemplo 2 Calcula la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen y la ecuación de su directriz es: $y + \frac{1}{4} = 0$.

- En este caso no conocemos el foco, pero sí la ecuación de la directriz.
- Podremos calcular la distancia entre el foco y el vértice porque es exactamente la misma que de la directriz al vértice.
- Para esto, necesitamos conocer el punto donde intersecta la directriz al eje y.
- Cualquier punto que se encuentre sobre la directriz satisface: $y = -1/4$ para cualquier valor de x.
- En el eje y, $x = 0$, Así que la directriz corta al eje y en el punto $M(0, -0.25)$.
- El foco está, entonces, en el punto $F(0, 0.25)$.
- Y dado que el vértice de la parábola está en el origen, $p = 1/4$.
- La siguiente gráfica muestra la situación:



Ahora vamos a resolver un ejemplo donde se requiere de otro procedimiento para calcular la ecuación de la parábola.

Ejemplo 3 Una parábola vertical tiene su vértice en el origen y pasa por el punto $P(4, 2)$. Encuentra su ecuación.

- Dado que la parábola es vertical y tiene su vértice en el origen, la ecuación es de la forma:

$$x^2 = 4\,p\,y$$

- Sabemos que pasa por el punto $P(4,2)$, la parábola abre hacia arriba y la ecuación satisface:

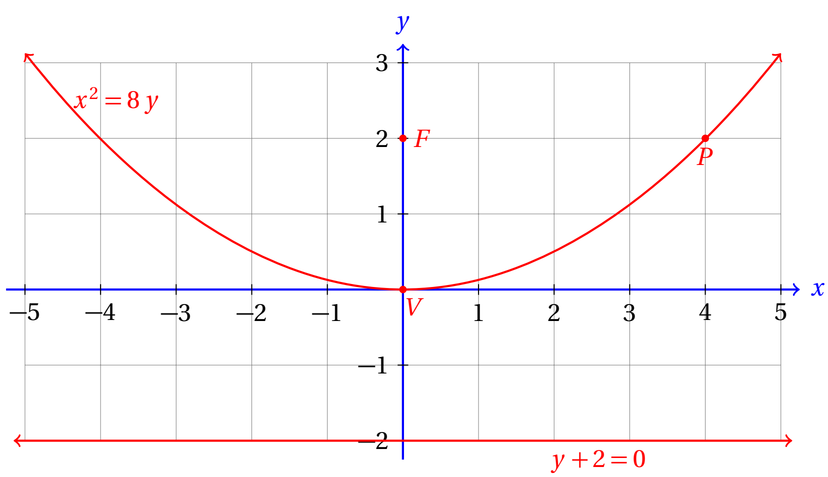
$$\begin{aligned} (4)^2 &= 4\,p(2) && \Rightarrow \\ 16 &= 8\,p && \Rightarrow \qquad p = 2 \end{aligned}$$

- Sabiendo que $p = 2$ podemos calcular los demás elementos de la parábola:

Lado recto: $\text{LLR} = 4\,p = 4(2) = 8$.

Directriz: $y = k - p = 0 - 2 \qquad \Rightarrow \qquad y + 2 = 0$.

- La siguiente gráfica muestra esta situación:



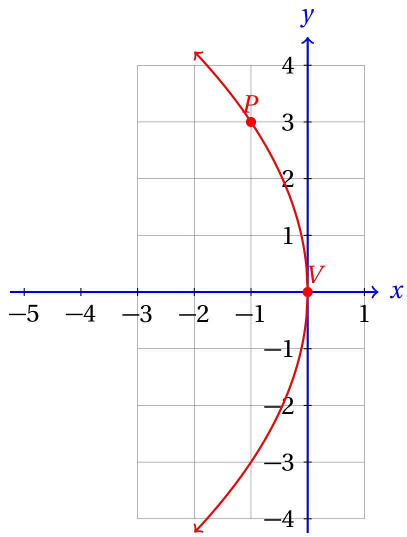
- Observa que el punto $P(4,2)$ es un extremo del lado recto de la parábola.

- También observa que la distancia desde el foco $F(2,0)$ hasta $P(4,2)$ es la misma (4 unidades) que la distancia desde $P(4,2)$ hasta la directriz.

- Esto es así por la forma como se definió la parábola.

Encuentra la ecuación de la parábola que es horizontal, tiene su vértice en el origen y pasa por el punto $P(-1,3)$. **Ejemplo 4**

- Empezamos graficando la situación.



- Como la parábola es horizontal y $p < 0$, la ecuación de la parábola es de la forma:

$$y^2 = 4\,p\,x$$

- Para calcular el valor de p vamos a sustituir las coordenadas del punto por el cual pasa la parábola.

- Entonces,

$$(3)^2 = 4\,p(-1) \qquad \Rightarrow \qquad 9 = -4\,p \qquad \Rightarrow \qquad p = -\frac{9}{4} = -2.25$$

- La ecuación de esta parábola es, entonces:

$$y^2 = 4\left(-\frac{9}{4}\right)x \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = -9\,x$$

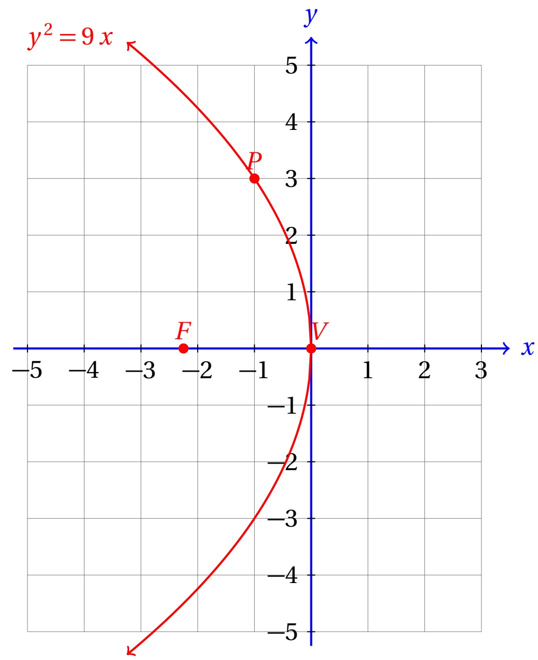
- Ahora que conocemos el valor de p podemos fácilmente calcular los demás elementos de la parábola:

Foco: $F(p,0) = F\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$

Lado recto: $\text{LLR} = 4\,p = 4\left(-\frac{9}{4}\right) = -9$

Directriz: $x = h - p = 0 - \left(-\frac{9}{4}\right) \qquad \Rightarrow \qquad x - \frac{9}{4} = 0.$

- Ahora podemos graficar la parábola con todos sus elementos:



La otra versión del problema que hemos estudiado en esta sección consiste en calcular, a partir de la ecuación de la parábola, todos sus elementos.

Ejemplo 5

Encuentra todos los elementos de la parábola que tiene por ecuación:

$$x^2 = 16\,y$$

- Para empezar, por la forma de la ecuación podemos deducir que tiene su vértice en el origen.
- También por la ecuación sabemos que la parábola es vertical.
- El valor de p lo calculamos a partir de comparar las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & 4p\,y \\ x^2 & = & 16\,y \end{array}$$

- De aquí que $4\,p = 16$, de donde $p = 4$.
- Ahora podemos utilizar las fórmulas para calcular todos los elementos de la parábola:

  Lado recto: $\text{LLR} = 4p = 4(4) = 16$.

  Foco: $F(0, p) = F(0, 4)$.

  Directriz: $y + p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y + 4 = 0$.

- Observa que como $p > 0$, la parábola abre para arriba.
- Se te queda como ejercicio graficar la ecuación.

Ejemplo 6

Encuentra todos los elementos de la parábola que tiene por ecuación:

$$y^2 = 12\,x$$

- Por la ecuación sabemos que la parábola es horizontal y abre hacia la derecha.
- Al comparar la ecuación básica con la que nos dieron encontramos que $4\,p = 12$.
- Entonces, $p = 3$.
- Ahora podemos calcular los elementos de la parábola:

  Lado recto: $\text{LLR} = 4p = 4(3) = 12$.
  Foco: $F(p, 0) = F(3, 0)$.
  Directriz: $x + p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x + 3 = 0$.

- Se te queda como ejercicio graficar la parábola.

Ejemplo 7

Encuentra todos los elementos de la parábola que tiene por ecuación:

$$x^2 = -20\,y$$

- Para empezar, por la forma de la ecuación podemos deducir que tiene su vértice en el origen, es vertical y abre hacia abajo.
- El valor de p lo calculamos con el coeficiente:

$$4\,p = -40 \qquad \Rightarrow \qquad p = -5$$

- Ahora podemos utilizar las fórmulas para calcular todos los elementos de la parábola:

  Lado recto: $\text{LLR} = 4|p| = 4(5) = 20$.
  Foco: $F(0, p) = F(0, -5)$.
  Directriz: $y + p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y - 5 = 0$.

- Se te queda como ejercicio graficar la ecuación.

Ejemplo 8

Encuentra todos los elementos de la parábola que tiene por ecuación:

$$y^2 = -3\,x$$

- Por la ecuación sabemos que la parábola es horizontal y abre hacia la izquierda.
- Por el coeficiente sabemos que $4\,p = -3 \qquad \Rightarrow \qquad p = -3/4$.
- Ahora podemos calcular los elementos de la parábola:

  Lado recto: $\text{LLR} = 4|p| = 4\left(\frac{3}{4}\right) = 3$.

Foco: $F(p,0) = F\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$.

Directriz: $x + p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x - \frac{3}{4} = 0.$

- Se te queda como ejercicio graficar la parábola.

Observa que con conocer el valor de p podemos calcular todos los elementos de la parábola.

Esto es así porque el vértice de la parábola está en el origen, es decir, $V(h,k) = V(0,0)$.

Entonces, $h = 0$, y $k = 0$, por lo que las fórmulas que aparecen en el formulario al final de esta unidad se reducen al caso más simple.

En la siguiente sección estudiaremos el caso más general, cuando el vértice está fuera del origen.

En esta sección no necesitábamos encontrar la ecuación del eje de la parábola porque siempre coincide con uno de los ejes, el eje y para las parábolas verticales y con el eje x para las parábolas horizontales.

Para las parábolas que no tienen su vértice en el origen tendremos que calcularla.

12.2.2 Parábolas con vértice fuera del origen

En este apartado vamos a extender lo que estudiamos en la sección anterior. Ahora vamos a considerar parábolas con vértices fuera del origen. En estos casos, tendremos que aplicar las fórmulas considerando tanto a h como a k distintos de cero.

Recuerda que la ecuación nos indica hacia dónde abre la parábola.

Ejemplo 1

Encuentra todos los elementos de la parábola dada por la ecuación:

$$(x+1)^2 = 8(y-1)$$

- Comparando con la ecuación: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ podemos darnos cuenta que: $h = -1$, $k = 1$, y $p = 2$.

- También vemos que la parábola abre en el sentido positivo del eje y.

- A partir de estos datos fácilmente encontramos todos los elementos de la parábola.

Vértice: $V(h,k) = V(-1,1)$.

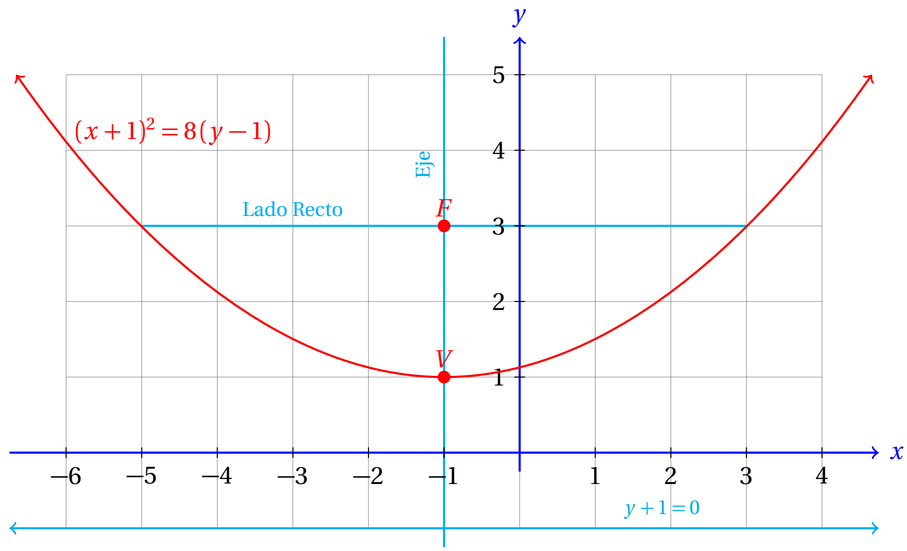
Foco: $F(h,k+p) = F(-1,3)$.

Lado recto: $\text{LLR} = 4p = 4(2) = 8$.

Directriz: $y = k - p = 1 - 2 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad y + 1 = 0.$

Eje: $x = h \qquad \Rightarrow \qquad x = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x + 1 = 0.$

- La siguiente gráfica corresponde a la parábola de este ejemplo:



Ejemplo 2

Encuentra todos los elementos de la parábola dada por la ecuación:

$$(y-2)^2 = 6(x+3)$$

- En este caso, la ecuación indica que la parábola es horizontal y que abre hacia la derecha.

- Comparando la ecuación dada con $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, es claro que $h = -3$, $k = 2$, y $4p = 6$, lo que implica que $p = 3/2$.

- Ahora encontramos todos los elementos de la parábola.

- Recuerda que esta parábola es horizontal, por eso cambian las fórmulas que debemos usar para encontrar sus elementos.

  Vértice: $V(h,k) = V(-3,2)$.

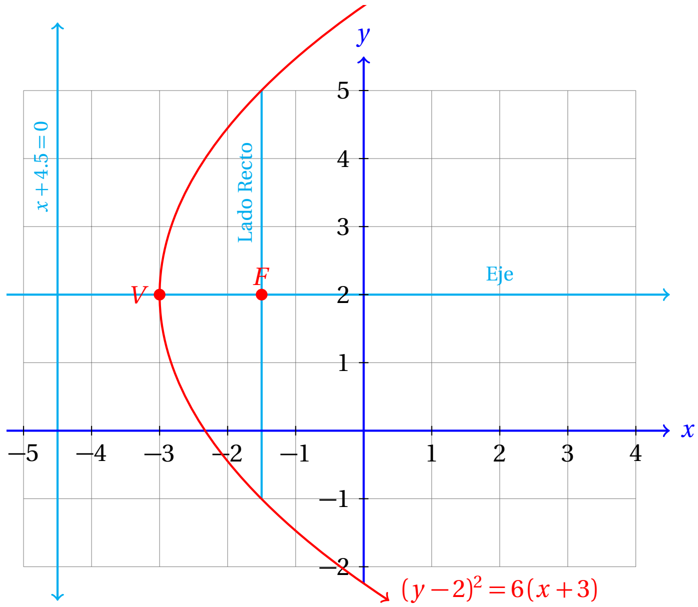
  Foco: $F(h+p,k) = F\left(-3+\dfrac{3}{2},2\right) = F\left(-\dfrac{3}{2},2\right)$.

  Lado recto: $\text{LLR} = 4p = 4\left(\dfrac{3}{2}\right) = 6$.

  Directriz: $x = h - p = -3 - \dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x + \dfrac{9}{2} = 0$.

  Eje: $y = k \quad \Rightarrow \quad y = 2 \quad \Rightarrow \quad y - 2 = 0$.

- La siguiente gráfica corresponde a la parábola de este ejemplo:



Encuentra todos los elementos de la parábola dada por la ecuación:

$$(x+2)^2=-4(y+1)$$

Ejemplo 3

- Comparando con la ecuación:

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

  podemos darnos cuenta que: $h=-2$, $k=-1$, y $p=-1$.

- También podemos deducir de la ecuación que la parábola es vertical.

- Como $p<0$ la parábola abre en el sentido negativo del eje y.

- A partir de estos datos fácilmente encontramos todos los elementos de la parábola.

  Vértice: $V(h,k)=V(-2,-1)$.

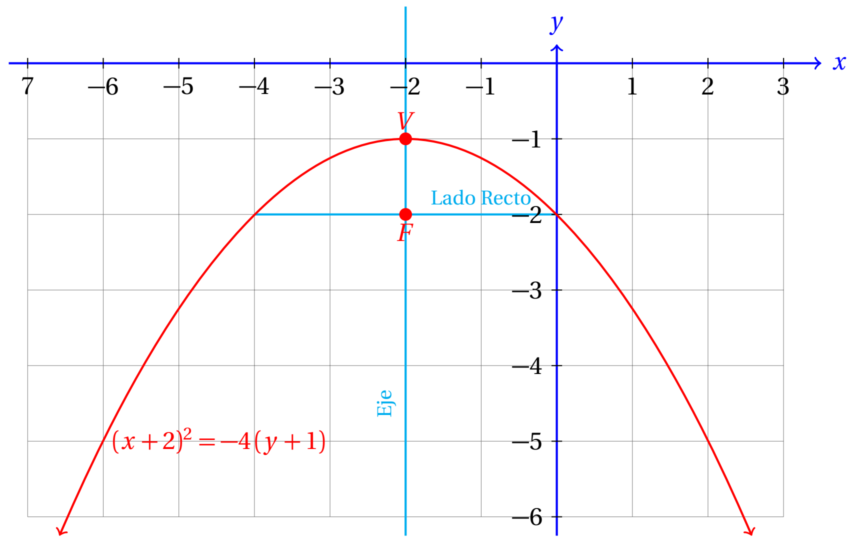
  Foco: $F(h,k+p)=F(-2,-2)$.

  Lado recto: $\text{LLR}=4|p|=4(|-1|)=4$.

  Directriz: $y=k-p=-1-(-1)=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$.

  Eje: $x=h \quad \Rightarrow \quad x=-2 \quad \Rightarrow \quad x+2=0$.

- La siguiente gráfica corresponde a la parábola de este ejemplo:



Ejemplo 4 Encuentra todos los elementos de la parábola dada por la ecuación:

$$(y-3)^2 = -8(x+1)$$

- En este caso, la ecuación indica que la parábola es horizontal y que abre hacia la izquierda.

- Comparando la ecuación vemos que $h = -1$, $k = 3$, y $4p = -8$, lo que implica que $p = -2$.

- Ahora encontramos todos los elementos de la parábola.

- Recuerda que esta parábola es horizontal, por eso cambian las fórmulas que debemos usar para encontrar sus elementos.

  Vértice: $V(h,k) = V(-1,3)$.

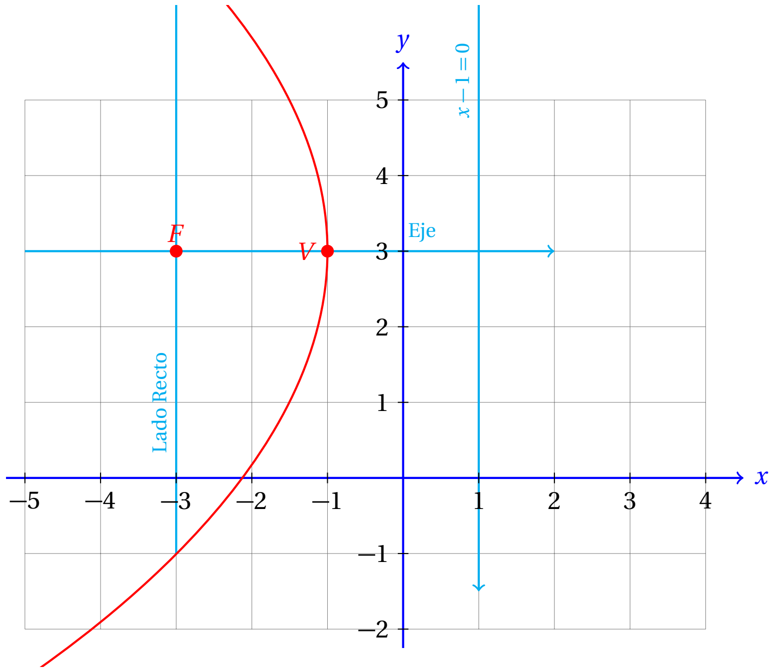
  Foco: $F(h+p,k) = F(-1-2,3) = F(-3,3)$.

  Lado recto: $\text{LLR} = 4\,|p| = 4\,(|-2|) = 8$.

  Directriz: $x = h-p = -1-(-2) \quad\Rightarrow\quad x-1=0$.

  Eje: $y = k \quad\Rightarrow\quad y = 3 \quad\Rightarrow\quad y-3=0$.

- La siguiente gráfica corresponde a la parábola de este ejemplo:



y
x
$x-1=0$
Eje
F
V
Lado Recto
5
4
3
2
1
−1
−2
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

12.3 Ecuación General de la Parábola

Hasta aquí hemos estudiado la ecuación de la parábola en su forma ordinaria.

Ahora vamos a estudiar la ecuación en su forma general.

Ecuación General de la Parábola

La ecuación general de la parábola es:

$$A\,x^2 + B\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

donde $A = 0$ *y* $B \neq 0$ *para las parábolas horizontales y* $B = 0$ *con* $A \neq 0$ *para las parábolas verticales.*

Definición 1

La ecuación general de la parábola se obtiene a partir de la ecuación en su forma ordinaria, desarrollando el binomio y simplificando la expresión.

Convierte la ecuación ordinaria de la parábola vertical a la forma general. **Ejemplo 5**

- Para las parábolas verticales, la ecuación en su forma ordinaria es:

$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$$

- Al desarrollar el binomio que está elevado al cuadrado e igualar todo a cero obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2\,h\,x + h^2 &= 4p\,y - 4p\,k \\ x^2 - 2h\,x - 4p\,y + (h^2 + 4p\,k) &= 0 \end{aligned}$$

- La forma general de la ecuación de la parábola vertical tiene la forma:

$$A\,x^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

- Del desarrollo anterior se hace evidente que:

$$\begin{aligned} A &= 1 & \qquad E &= -4\,p \\ D &= -2\,h & \qquad F &= h^2 + 4p\,k \end{aligned}$$

Estas igualdades nos servirán para convertir las ecuaciones de las parábolas de la forma general a la ordinaria, y viceversa.

Por ahora empezaremos con el caso más directo.

12.3.1 Conversión de f. ordinaria a f. general

Escribe la ecuación de la parábola: $(x-3)^2 = 7(y-1)$ en su forma general. **Ejemplo 1**

- De manera semejante al ejemplo anterior, desarrollamos el binomio y finalmente igualamos a cero la ecuación:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 &= 7(y-1) \\ x^2 - 6\,x + 9 &= 7\,y - 7 \\ x^2 - 6\,x - 7\,y + 9 + 7 &= 0 \\ x^2 - 6\,x - 7\,y + 16 &= 0 \end{aligned}$$

- Entonces, la ecuación de la parábola puede expresarse de manera equivalente en cualquiera de las dos formas:

Forma Ordinaria:	**Forma General:**
$(x-3)^2 = 7(y-1)$	$x^2 - 6x - 7y + 16 = 0$

También habrá ocasiones en las que debamos calcular la ecuación en forma general de una parábola.

Para este caso podemos primero calcular la ecuación en forma ordinaria y después convertir ésta a la forma general.

Ejemplo 2 Calcula la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el punto $V(2,3)$ y su foco está en $F(1,3)$.

- Si graficas en tu cuaderno el vértice y el foco de la parábola te darás cuenta que la distancia entre ellos es de 2 unidades.
- De la gráfica también te podrás dar cuenta que la parábola es vertical y abre hacia abajo.
- Entonces, $p = -2$, y la ecuación es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

- Al sustituir los datos que ya conocemos (h, k y p) en esta ecuación obtenemos:

$$(x-2)^2 = 4(-2)(y-3) \qquad \Rightarrow \qquad (x-2)^2 = -8y - 12$$

- Esta es la ecuación de la parábola en su forma ordinaria.
- La convertimos a la forma general elevando al cuadrado el binomio $(x-2)$ y simplificando:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= -8y + 24 \\ x^2 - 4x + 4 + 8y - 24 &= 0 \\ x^2 - 4x + 8y - 20 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Algunas veces no conoceremos suficiente información para resolver el problema inmediatamente, así que tendremos que observar la gráfica para poder deducir información que no está indicada explícitamente en el texto.

Ejemplo 3 Calcula la ecuación de la parábola en su forma general que tiene su vértice en el punto $V(-2,-1)$ y que pasa por el punto $P(2,-5)$.

- En este caso necesariamente debemos dibujar una gráfica que ilustre la situación, porque la información dada en el texto del problema ni siquiera nos menciona si se trata de una parábola vertical u horizontal.
- Con la gráfica es sencillo observar que tenemos dos casos, primero resolveremos el caso para la parábola vertical.

- **Parábola vertical:**
- Para la parábola vertical la ecuación ordinaria tiene la forma:

$$(x-h)^2 = 4\,p(y-k)$$

- Conocemos las coordenadas del vértice, así que podemos sustituirlas inmediatamente:

$$(x+2)^2 = 4\,p(y+1)$$

- Todavía necesitamos calcular el valor de p.
- Para eso, vamos a sustituir las coordenadas del punto $P(2,-5)$ por el cual pasa esta parábola:

$$(2+2)^2 = 4\,p(-5+1)$$

- De aquí podemos despejar p:

$$\begin{aligned}(2+2)^2 &= 4\,p(-5+1)\\ 16 &= -16\,p\\ -\frac{16}{16} &= p = -1\end{aligned}$$

- Este valor de p nos indica que la parábola abre hacia abajo.
- Puedes ver la gráfica de esta parábola en la página 521.
- Ahora podemos convertir la ecuación ordinaria a la forma general:

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= -4(y+1)\\ x^2+4\,x+4 &= -4\,y-4\\ x^2+4\,x+4\,y+8 &= 0\end{aligned}$$

- Esta es la ecuación del primer caso.
- Ahora vamos con el siguiente caso del problema.
- **Parábola horizontal:**
- En este caso la ecuación ordinaria es:

$$(y-k)^2 = 4\,p(x-h)$$

- Vamos a sustituir las coordenadas del vértice en la ecuación:

$$(y+1)^2 = 4\,p(x+2)$$

- Ahora solamente falta por calcular p para conocer la ecuación ordinaria.
- Para eso vamos a sustituir las coordenadas del punto $P(2,-5)$ por el cual debe pasar esta parábola.

$$\begin{aligned}(-5+1)^2 &= 4\,p(2+2)\\ 16 &= 16\,p\end{aligned}$$

- Esto nos indica que $p = 1$.

- Entonces la ecuación en forma ordinaria es:

$$(y+1)^2 = 4(x+2)$$

- Ahora vamos a transformarla a la forma general:

$$\begin{aligned} (y+1)^2 &= 4x+8 \\ y^2+2y+1-4x-8 &= 0 \\ y^2-4x+2y-7 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.
- Se te queda como ejercicio graficar esta parábola.

Ejemplo 4

Calcula la ecuación en forma general y los sus elementos de la parábola vertical que tiene su foco en el punto $F(2,1)$ y su directriz es la recta: $y+1=0$. Finalmente, grafica la parábola y verifica si pasa por el punto $P(-2,4)$.

- En este caso el problema dice que se trata de una parábola vertical, así que usaremos a ecuación:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

- La ecuación de la directriz nos indica que para cualquier cualquier punto sobre ella, el valor de $y=-1$, independientemente del valor de x.
- El punto sobre la directriz que está exactamente debajo del foco es: $M(2,-1)$.
- Recordando que el vértice está a la misma distancia del foco que de la directriz, podemos deducir que $2|p|$ es la distancia entre el foco y la directriz.
- En este caso, $2|p|=2$, que corresponde a la distancia desde el punto M hasta el foco.
- De aquí que $|p|=1$.
- Si graficas la informacón te darás cuenta que la parábola abre hacia arriba, de manera que $p>0$, con lo que $p=1$.
- Más aún, el vértice de la parábola es el punto medio del segmento $\overline{MF}$.
- Ahora calculamos sus coordenadas:

$$h = \frac{2+2}{2} = 2 \qquad\qquad k = \frac{1-1}{2} = 0$$

- Entonces, el vértice de la parábola se encuentra en el punto $V(2,0)$.
- Ahora podemos sustituir los valores de h, k y p en la ecuación ordinaria:

$$(x-2)^2 = 4y$$

- Ahora vamos a convertirla a la forma general:

$$\begin{aligned} x^2-4x+4-4y &= 0 \\ x^2-4x-4y+4 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora calculamos todos sus elementos. Esto es muy sencillo, dado que ya conocemos h, k y p:

  Vértice: $V(h,k) = V(2,0)$.

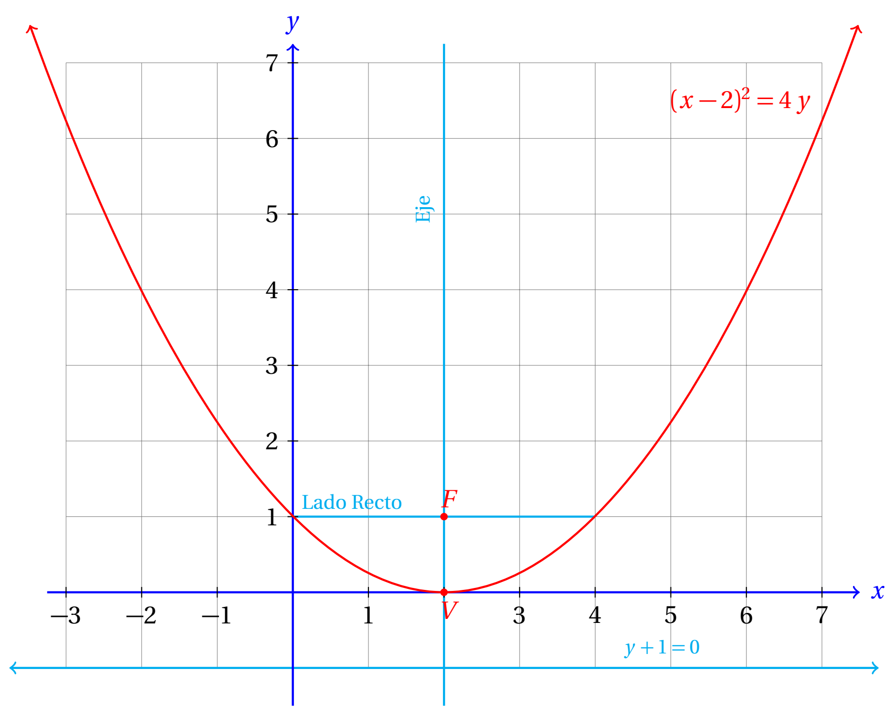
  Foco: $F(h, k+p) = F(2,1)$.

  Lado recto: $\text{LLR} = 4p = 4(1) = 4$.

  Directriz: $y = k - p = 0 - 1 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad y + 1 = 0$.

  Eje: $x = h \qquad \Rightarrow \qquad x = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x - 2 = 0$.

- Los valores conocidos se volvieron a calcular para verificar los resultados.
- Enseguida se muestra la gráfica de esta parábola:



- Para verificar si el punto $P(-2,4)$ está sobre la parábola sustituimos en la ecuación y vemos si se cumple la igualdad:

$$(-2-2)^2 = 4(4) \qquad \Rightarrow \qquad 16 = 16$$

- Como la igualdad se cumple, el punto $P(-2,4)$ sí está sobre la parábola.
- Y con esto hemos terminado.

Observa que no utilizamos la ecuación en la forma general para encontrar todos los elementos de la parábola, porque nosotros conocemos las fórmulas para calcular los elementos de la parábola en función de los valores de h, k y p.

Para encontrar la ecuación ordinaria necesitamos también estos valores.

Pero habrá veces en los que no se conozcan, sino solamente nos den la ecuación general de la parábola.

En estos casos vamos a tener que convertir la ecuación a la forma ordinaria y a partir de ahí conocer los valores de h, k y p para deducir todos sus elementos.

En la siguiente sección estudiamos esos casos.

El procedimiento que usaremos en este tipo de problemas es esencialmente el mismo que utilizamos en la conversión de la ecuación general a la forma ordinaria para las circunferencias.

En esos ejemplos siempre tuvimos que completar cuadrados para x como para y. Ahora bastará una sola vez, dependiendo de la variable que aparezca elevada al cuadrado.

12.3.2 Conversión de F. general a F. ordinaria

Es muy fácil graficar una cónica a partir de su forma ordinaria, al igual que calcular todos sus elementos.

La forma general, sin embargo, es importante porque cuando resolvemos problemas más generales vamos a encontrar este tipo de ecuación.

Ejemplo 1

Convierte la ecuación de la parábola:

$$y^2 - 12x - 10y + 13 = 0$$

a la forma ordinaria.

- Para empezar, debemos identificar la literal que está elevada al cuadrado.
- En este caso, y está elevada al cuadrado.
- Así que vamos a escribir todos los términos que contengan y a la izquierda de la igualdad y los demás a la derecha:
$$y^2 - 10y = 12x - 13$$
- Ahora vamos a completar cuadrados.
- Para completar cuadrados calculamos la mitad del coeficiente lineal de la expresión que quedó a la izquierda, o sea, la mitad de -10, que es -5.
- El cuadrado de $y-5$ es: $(y-5)^2 = y^2 - 10y + 25$.
- Si sumamos en ambos lados de la ecuación 25 completamos el cuadrado:
$$\begin{aligned} y^2 - 10y + 25 &= 12x - 13 + 25 \\ (y-5)^2 &= 12x + 12 \end{aligned}$$
- Ahora podemos factorizar el 12 que aparece en ambos términos a la derecha de la iguadad:
$$(y-5)^2 = 12(x+1)$$
- Esta es la ecuación de la parábola en su forma ordinaria.

Ahora imagina que te hubieran pedido que grafiques la ecuación:

$$y^2 - 12x - 10y + 13 = 0$$

Si tratas de graficar esta ecuación vas a tener un trabajo muy laborioso. Por otra parte, si la conviertes a su forma ordinaria:

$$(y-5)^2 = 12(x+1)$$

graficarla y encontrar todos sus elementos es cosa sencilla.

Calcula todos los elementos de la parábola cuya ecuación es: $$x^2 - 8\,x - 20\,y - 84 = 0$$	**Ejemplo 2**

- Ahora la literal que aparece elevada al cuadrado es x.
- Así que vamos a dejar todos los términos que tienen a esta literal y el resto lo pasamos al lado derecho:
$$x^2 - 8\,x = 20\,y + 84$$
- Vamos a completar cuadrados.
- La mitad de -8 es -4.
- Observa que $(x-4)^2 = x^2 - 8\,x + 16$.
- Esto nos sugiere que sumemos en ambos lados de la igualdad 16:
$$\begin{aligned} x^2 - 8\,x + 16 &= 20\,y + 84 + 16 \\ (x-4)^2 &= 20\,y + 100 \\ (x-4)^2 &= 20(y+5) \end{aligned}$$
- Esta es la ecuación ordinaria de la parábola.
- De esta ecuación podemos rápidamente ver que $h = 4$, $k = -5$, y $4\,p = 20$, de donde: $p = 5$.
- Ahora podemos calcular todos los elementos de esta parábola:

  Vértice: $V(h,k) = V(4,-5)$.

  Foco: $F(h,k+p) = F(4,-5+5) = F(4,0)$.

  Lado recto: $\text{LLR} = 4\,p = 4(5) = 20$.

  Directriz: $y = k - p = -5 - 5 = -10 \qquad \Rightarrow \qquad y + 10 = 0$.

  Eje: $x = h \qquad \Rightarrow \qquad x = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x - 4 = 0$.
- Se te queda como ejercicio graficar esta parábola con todos sus elementos en tu cuaderno.

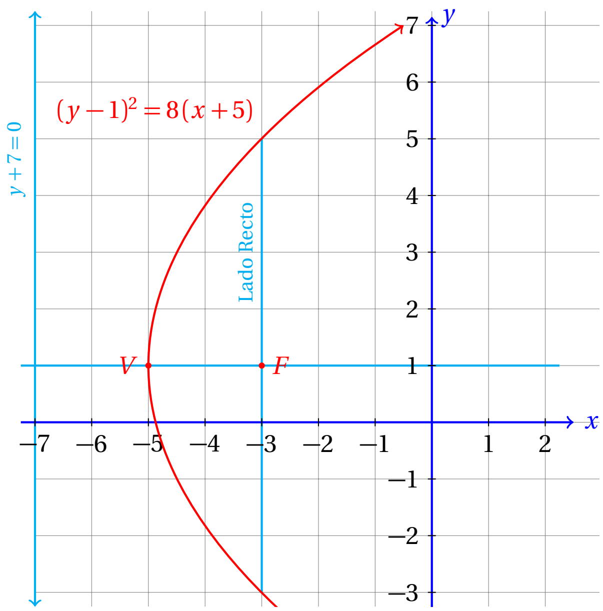
Calcula todos los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es: $$y^2 - 8\,x - 2\,y - 39 = 0$$	**Ejemplo 3**

- Ahora la literal que aparece elevada al cuadrado es y.
- Completamos cuadrados para esa literal:
$$\begin{aligned} y^2 - 2\,y &= 8\,x + 39 \\ y^2 - 2\,y + 1 &= 8\,x + 39 + 1 \\ (y-1)^2 &= 8(x+5) \end{aligned}$$

- En este caso, $h = -5$, $k = 1$, y $p = 2$.
- También podemos ver que la parábola es horizontal y abre hacia la derecha.
- Ahora encontramos todos sus elementos:

  Vértice: $V(h,k) = V(-5,1)$.
  Foco: $F(h+p,k) = F(-5+2,1) = F(-3,1)$.
  Lado recto: $\text{LLR} = 4p = 4(2) = 8$.
  Directriz: $x = h - p = -5 - 2 = -7 \quad \Rightarrow \quad y + 7 = 0$.
  Eje: $y = k \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad y - 1 = 0$.

- La gráfica de esta parábola es la siguiente:



Ejemplo 4

Calcula la ecuación en forma ordinaria de la parábola cuya ecuación general es:

$$x^2 - 8x + 12y - 20 = 0$$

por dos métodos distintos y calcula también todos sus elementos.

- **Primer Método:**
- Vamos a completar cuadrados para x:

$$\begin{aligned}
x^2 - 8x + 12y - 20 &= 0 \\
x^2 - 8x &= -12y + 20 \\
x^2 - 8x + 16 &= -12y + 20 + 16 \\
(x-4)^2 &= -12(y-3)
\end{aligned}$$

- De la ecuación encontramos que $h = 4$, $k = 3$, y finalmente, $p = -3$.

- Por la ecuación sabemos que la parábola es vertical.
- También, dado que $p < 0$ la parábola abre hacia abajo.
- Ahora se enlistan todos sus elementos:

  Vértice: $V(h,k) = V(4,3)$.
  Foco: $F(h,k+p) = F(4,3-3) = F(4,0)$.
  Lado recto: $\text{LLR} = 4\,|p| = 4\,(|3|) = 12$.
  Directriz: $y = k - p = 3 - (-3) = 6 \qquad \Rightarrow \qquad y - 6 = 0.$
  Eje: $x = h \qquad \Rightarrow \qquad x = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x - 4 = 0.$

- Y hemos terminado.
- **Segundo Método:**
- A partir de la ecuación general de la parábola:

$$\begin{aligned} x^2 - 8\,x + 12\,y - 20 &= 0 \\ x^2 + D\,x + E\,y + F &= 0 \end{aligned}$$

  podemos calcular h, k, y p sin necesidad de convertir la ecuación a su forma ordinaria.

- Para eso vamos a utilizar las fórmulas:

$$\begin{aligned} D &= -2\,h \\ E &= -4\,p \\ F &= h^2 + 4p\,k \end{aligned}$$

- Sustituimos los valores dados en la ecuación de la parábola en su forma general:

$$\begin{aligned} -8 = -2\,h \qquad &\Rightarrow \qquad h = 4 \\ 12 = -4\,p \qquad &\Rightarrow \qquad p = -3 \\ -20 = (4)^2 + 4(-3)\,k \qquad &\Rightarrow \qquad k = \frac{-20-16}{-12} = 3 \end{aligned}$$

- Y a partir de estos valores, fácilmente podemos calcular:
  - ✓ La ecuación ordinaria y
  - ✓ Todos los elementos de la parábola.
- Como esto ya se realizó, no se requiere volver a calcular.
- De cualquier manera, se te queda como ejercicio graficar la parábola y todos sus elementos.

Calcula la ecuación de la parábola en las formas ordinaria y general. tiene su vértice en el punto $V(h,k)$ y tiene un valor de p como se indica.

Ejercicios 12.3

1) $V(-6,3)$ y abre hacia arriba con $p = 7$.

   Foco: $F(-6,10)$
   LLR: $\text{LLR} = 28$

Directriz: $y = -4$

Eje: $x = -6$

Ec. F. ordinaria: $(x+6)^2 = 28(y-3)$

Ec. F. General: $x^2 + 12x - 28y + 120 = 0$

2) $V(-2,6)$ y abre hacia abajo con $p = 6$.

Foco: $F(-2,0)$

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $y = 12$

Eje: $x = -2$

Ec. F. ordinaria: $(x+2)^2 = -24(y-6)$

Ec. F. General: $x^2 + 4x + 24y - 140 = 0$

3) $V(-8,1)$ y abre hacia la derecha con $p = 6$.

Foco: $F(-2,1)$

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $x = -14$

Eje: $y = 1$

Ec. F. ordinaria: $(y-1)^2 = 24(x+8)$

Ec. F. General: $y^2 - 24x - 2y - 191 = 0$

4) $V(-4,-5)$ y abre hacia arriba con $p = 4$.

Foco: $F(-4,-1)$

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $y = -9$

Eje: $x = -4$

Ec. F. ordinaria: $(x+4)^2 = 16(y+5)$

Ec. F. General: $x^2 + 8x - 16y - 64 = 0$

5) $V(-9,-5)$ y abre hacia arriba con $p = 6$.

Foco: $F(-9,1)$

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $y = -11$

Eje: $x = -9$

Ec. F. ordinaria: $(x+9)^2 = 24(y+5)$

Ec. F. General: $x^2 + 18x - 24y - 39 = 0$

6) $V(-4,-8)$ y abre hacia la derecha con $p = 9$.

Foco: $F(5,-8)$

LLR: $\text{LLR} = 36$

Directriz: $x = -13$

Eje: $y = -8$

Ec. F. ordinaria: $(y+8)^2 = 36(x+4)$

Ec. F. General: $y^2 - 36x + 16y - 80 = 0$

7) $V(8,7)$ y abre hacia la izquierda con $p = 1$.

Foco: $F(7,7)$

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $x = 9$

Eje: $y = 7$

Ec. F. ordinaria: $(y-7)^2 = -4(x-8)$

Ec. F. General: $y^2 + 4x - 14y + 17 = 0$

8) $V(-6,-3)$ y abre hacia la izquierda con $p = 9$.

Foco: $F(-15,-3)$

LLR: $\text{LLR} = 36$

Directriz: $x = 3$

Eje: $y = -3$

Ec. F. ordinaria: $(y+3)^2 = -36(x+6)$

Ec. F. General: $y^2 + 36x + 6y + 225 = 0$

9) $V(-1,-8)$ y abre hacia arriba con $p = 3$.

Foco: $F(-1,-5)$

LLR: $\text{LLR} = 12$

Directriz: $y = -11$

Eje: $x = -1$

Ec. F. ordinaria: $(x+1)^2 = 12(y+8)$

Ec. F. General: $x^2 + 2x - 12y - 95 = 0$

10) $V(3,4)$ y abre hacia la izquierda con $p = 4$.

Foco: $F(-1,4)$

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $x = 7$

Eje: $y = 4$

Ec. F. ordinaria: $(y-4)^2 = -16(x-3)$

Ec. F. General: $y^2 + 16x - 8y - 32 = 0$

11) $V(-2,6)$ y abre hacia la derecha con $p = 4$.

Foco: $F(2,6)$

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $x = -6$

Eje: $y = 6$

Ec. F. ordinaria: $(y-6)^2 = 16(x+2)$

Ec. F. General: $y^2 - 16x - 12y + 4 = 0$

12) $V(5,-7)$ y abre hacia arriba con $p = 4$.

Foco: $F(5,-3)$

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $y = -11$

Eje: $x = 5$

Ec. F. ordinaria: $(x-5)^2 = 16(y+7)$

Ec. F. General: $x^2 - 10x - 16y - 87 = 0$

13) $V(3,-4)$ y abre hacia arriba con $p = 9$.

Foco: $F(3,5)$

LLR: $\text{LLR} = 36$

Directriz: $y = -13$

Eje: $x = 3$

Ec. F. ordinaria: $(x-3)^2 = 36(y+4)$

Ec. F. General: $x^2 - 6x - 36y - 135 = 0$

14) $V(8,-7)$ y abre hacia arriba con $p = 5$.

Foco: $F(8,-2)$

LLR: $\text{LLR} = 20$

Directriz: $y = -12$

Eje: $x = 8$

Ec. F. ordinaria: $(x-8)^2 = 20(y+7)$

Ec. F. General: $x^2 - 16x - 20y - 76 = 0$

15) $V(-6,-2)$ y abre hacia la izquierda con $p = 1$.

Foco: $F(-7,-2)$

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $x = -5$

Eje: $y = -2$

Ec. F. ordinaria: $(y+2)^2 = -4(x+6)$

Ec. F. General: $y^2 + 4x + 4y + 28 = 0$

16) $V(-5,3)$ y abre hacia abajo con $p = 3$.

Foco: $F(-5,0)$

LLR: $\text{LLR} = 12$

Directriz: $y = 6$

Eje: $x = -5$

Ec. F. ordinaria: $(x+5)^2 = -12(y-3)$

Ec. F. General: $x^2 + 10x + 12y - 11 = 0$

17) $V(6,-3)$ y abre hacia arriba con $p = 1$.

Foco: $F(6,-2)$

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $y = -4$

Eje: $x = 6$

Ec. F. ordinaria: $(x-6)^2 = 4(y+3)$

Ec. F. General: $x^2 - 12x - 4y + 24 = 0$

18) $V(-7,8)$ y abre hacia la izquierda con $p = 6$.

Foco: $F(-13,8)$

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $x = -1$

Eje: $y = 8$

Ec. F. ordinaria: $(y-8)^2 = -24(x+7)$

Ec. F. General: $y^2 + 24x - 16y + 232 = 0$

19) $V(4,1)$ y abre hacia la izquierda con $p = 1$.

Foco: $F(3,1)$

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $x = 5$

Eje: $y = 1$

Ec. F. ordinaria: $(y-1)^2 = -4(x-4)$

Ec. F. General: $y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$

20) $V(-2,-2)$ y abre hacia la derecha con $p = 2$.

Foco: $F(0,-2)$

LLR: $\text{LLR} = 8$

Directriz: $x = -4$

Eje: $y = -2$

Ec. F. ordinaria: $(y+2)^2 = 8(x+2)$

Ec. F. General: $y^2 - 8x + 4y - 12 = 0$

21) $V(-4,2)$ y abre hacia arriba con $p = 2$.

Foco: $F(-4,4)$

LLR: $\text{LLR} = 8$

Directriz: $y = 0$

Eje: $x = -4$

Ec. F. ordinaria: $(x+4)^2 = 8(y-2)$

Ec. F. General: $x^2 + 8x - 8y + 32 = 0$

22) $V(-1,-3)$ y abre hacia la izquierda con $p = 1$.

Foco: $F(-2,-3)$

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $x = 0$

Eje: $y = -3$

Ec. F. ordinaria: $(y+3)^2 = -4(x+1)$

Ec. F. General: $y^2 + 4x + 6y + 13 = 0$

23) $V(-2,8)$ y abre hacia arriba con $p=9$.

Foco: $F(-2,17)$

LLR: $\text{LLR}=36$

Directriz: $y=-1$

Eje: $x=-2$

Ec. F. ordinaria: $(x+2)^2=36(y-8)$

Ec. F. General: $x^2+4x-36y+292=0$

24) $V(-6,6)$ y abre hacia la derecha con $p=1$.

Foco: $F(-5,6)$

LLR: $\text{LLR}=4$

Directriz: $x=-7$

Eje: $y=6$

Ec. F. ordinaria: $(y-6)^2=4(x+6)$

Ec. F. General: $y^2-4x-12y+12=0$

25) $V(-1,2)$ y abre hacia la izquierda con $p=8$.

Foco: $F(-9,2)$

LLR: $\text{LLR}=32$

Directriz: $x=7$

Eje: $y=2$

Ec. F. ordinaria: $(y-2)^2=-32(x+1)$

Ec. F. General: $y^2+32x-4y+36=0$

26) $V(4,-8)$ y abre hacia arriba con $p=9$.

Foco: $F(4,1)$

LLR: $\text{LLR}=36$

Directriz: $y=-17$

Eje: $x=4$

Ec. F. ordinaria: $(x-4)^2=36(y+8)$

Ec. F. General: $x^2-8x-36y-272=0$

27) $V(-3,-6)$ y abre hacia abajo con $p=6$.

Foco: $F(-3,-12)$

LLR: $\text{LLR}=24$

Directriz: $y=0$

Eje: $x=-3$

Ec. F. ordinaria: $(x+3)^2=-24(y+6)$

Ec. F. General: $x^2+6x+24y+153=0$

28) $V(7,-8)$ y abre hacia la derecha con $p=2$.

Foco: $F(9,-8)$

LLR: $\text{LLR} = 8$

Directriz: $x = 5$

Eje: $y = -8$

Ec. F. ordinaria: $(y+8)^2 = 8(x-7)$

Ec. F. General: $y^2 - 8x + 16y + 120 = 0$

29) $V(-6,4)$ y abre hacia arriba con $p = 7$.

Foco: $F(-6,11)$

LLR: $\text{LLR} = 28$

Directriz: $y = -3$

Eje: $x = -6$

Ec. F. ordinaria: $(x+6)^2 = 28(y-4)$

Ec. F. General: $x^2 + 12x - 28y + 148 = 0$

30) $V(-8,-4)$ y abre hacia la derecha con $p = 7$.

Foco: $F(-1,-4)$

LLR: $\text{LLR} = 28$

Directriz: $x = -15$

Eje: $y = -4$

Ec. F. ordinaria: $(y+4)^2 = 28(x+8)$

Ec. F. General: $y^2 - 28x + 8y - 208 = 0$

Para los siguientes ejercicios calcula la ecuación de la parábola en su forma ordinaria a partir de la ecuación en forma general. A partir de la ecuación ordinaria calcula todos los elementos de la parábola. **Comentario**

31) $y^2 - 12x - 6y + 57 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-3)^2 = 12(x-4)$

Vértice: $V(4,3)$

Foco: $F(7,3)$

Abre hacia: la derecha con $p = 3$.

LLR: $\text{LLR} = 12$

Directriz: $x = 1$

Eje: $y = 3$

32) $y^2 - 28x + 4y - 136 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y+2)^2 = 28(x+5)$

Vértice: $V(-5,-2)$

Foco: $F(2,-2)$

Abre hacia: la derecha con $p = 7$.

LLR: $\text{LLR} = 28$

Directriz: $x = -12$

Eje: $y = -2$

33) $x^2+14x+12y+73=0$

Ec. F. ordinaria: $(x+7)^2=-12(y+2)$

Vértice: $V(-7,-2)$

Foco: $F(-7,-5)$

Abre hacia: abajo con $p=3$.

LLR: $\text{LLR}=12$

Directriz: $y=1$

Eje: $x=-7$

34) $x^2-14x+36y+85=0$

Ec. F. ordinaria: $(x-7)^2=-36(y+1)$

Vértice: $V(7,-1)$

Foco: $F(7,-10)$

Abre hacia: abajo con $p=9$.

LLR: $\text{LLR}=36$

Directriz: $y=8$

Eje: $x=7$

35) $x^2+14x+16y-63=0$

Ec. F. ordinaria: $(x+7)^2=-16(y-7)$

Vértice: $V(-7,7)$

Foco: $F(-7,3)$

Abre hacia: abajo con $p=4$.

LLR: $\text{LLR}=16$

Directriz: $y=11$

Eje: $x=-7$

36) $y^2+36x-4y+76=0$

Ec. F. ordinaria: $(y-2)^2=-36(x+2)$

Vértice: $V(-2,2)$

Foco: $F(-11,2)$

Abre hacia: la izquierda con $p=9$.

LLR: $\text{LLR}=36$

Directriz: $x=7$

Eje: $y=2$

37) $y^2+32x+14y+209=0$

Ec. F. ordinaria: $(y+7)^2=-32(x+5)$

Vértice: $V(-5,-7)$

Foco: $F(-13,-7)$

Abre hacia: la izquierda con $p=8$.

LLR: $\text{LLR}=32$

Directriz: $x = 3$

Eje: $y = -7$

38) $y^2 + 24\,x - 12\,y + 156 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-6)^2 = -24(x+5)$

Vértice: $V(-5,6)$

Foco: $F(-11,6)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 6$.

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $x = 1$

Eje: $y = 6$

39) $x^2 - 12\,x + 28\,y + 232 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x-6)^2 = -28(y+7)$

Vértice: $V(6,-7)$

Foco: $F(6,-14)$

Abre hacia: abajo con $p = 7$.

LLR: $\text{LLR} = 28$

Directriz: $y = 0$

Eje: $x = 6$

40) $x^2 + 10\,x - 4\,y + 53 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x+5)^2 = 4(y-7)$

Vértice: $V(-5,7)$

Foco: $F(-5,8)$

Abre hacia: arriba con $p = 1$.

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $y = 6$

Eje: $x = -5$

41) $x^2 + 6\,x + 16\,y - 39 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x+3)^2 = -16(y-3)$

Vértice: $V(-3,3)$

Foco: $F(-3,-1)$

Abre hacia: abajo con $p = 4$.

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $y = 7$

Eje: $x = -3$

42) $x^2 + 2\,x + 36\,y - 179 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x+1)^2 = -36(y-5)$

Vértice: $V(-1,5)$

Foco: $F(-1,-4)$

Abre hacia: abajo con $p = 9$.

LLR: $\text{LLR} = 36$

Directriz: $y = 14$

Eje: $x = -1$

43) $x^2 - 14x + 24y + 169 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x-7)^2 = -24(y+5)$

Vértice: $V(7, -5)$

Foco: $F(7, -11)$

Abre hacia: abajo con $p = 6$.

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $y = 1$

Eje: $x = 7$

44) $y^2 + 36x - 18y + 297 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-9)^2 = -36(x+6)$

Vértice: $V(-6, 9)$

Foco: $F(-15, 9)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 9$.

LLR: $\text{LLR} = 36$

Directriz: $x = 3$

Eje: $y = 9$

45) $y^2 + 4x - 2y - 7 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-1)^2 = -4(x-2)$

Vértice: $V(2, 1)$

Foco: $F(1, 1)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 1$.

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $x = 3$

Eje: $y = 1$

46) $x^2 + 4x - 4y + 32 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x+2)^2 = 4(y-7)$

Vértice: $V(-2, 7)$

Foco: $F(-2, 8)$

Abre hacia: arriba con $p = 1$.

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $y = 6$

Eje: $x = -2$

47) $y^2 + 4x + 18y + 109 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y+9)^2 = -4(x+7)$

Vértice: $V(-7,-9)$

Foco: $F(-8,-9)$

Abre hacia: la izquierda con $p=1$.

LLR: $\text{LLR}=4$

Directriz: $x=-6$

Eje: $y=-9$

48) $x^2+4x+16y-108=0$

Ec. F. ordinaria: $(x+2)^2=-16(y-7)$

Vértice: $V(-2,7)$

Foco: $F(-2,3)$

Abre hacia: abajo con $p=4$.

LLR: $\text{LLR}=16$

Directriz: $y=11$

Eje: $x=-2$

49) $y^2+8x+12y+68=0$

Ec. F. ordinaria: $(y+6)^2=-8(x+4)$

Vértice: $V(-4,-6)$

Foco: $F(-6,-6)$

Abre hacia: la izquierda con $p=2$.

LLR: $\text{LLR}=8$

Directriz: $x=-2$

Eje: $y=-6$

50) $y^2+24x-10y+145=0$

Ec. F. ordinaria: $(y-5)^2=-24(x+5)$

Vértice: $V(-5,5)$

Foco: $F(-11,5)$

Abre hacia: la izquierda con $p=6$.

LLR: $\text{LLR}=24$

Directriz: $x=1$

Eje: $y=5$

51) $y^2-32x-10y+313=0$

Ec. F. ordinaria: $(y-5)^2=32(x-9)$

Vértice: $V(9,5)$

Foco: $F(17,5)$

Abre hacia: la derecha con $p=8$.

LLR: $\text{LLR}=32$

Directriz: $x=1$

Eje: $y=5$

52) $x^2 - 12x + 28y - 160 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x-6)^2 = -28(y-7)$

Vértice: $V(6,7)$

Foco: $F(6,0)$

Abre hacia: abajo con $p = 7$.

LLR: $\text{LLR} = 28$

Directriz: $y = 14$

Eje: $x = 6$

53) $y^2 - 20x + 18y + 181 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y+9)^2 = 20(x-5)$

Vértice: $V(5,-9)$

Foco: $F(10,-9)$

Abre hacia: la derecha con $p = 5$.

LLR: $\text{LLR} = 20$

Directriz: $x = 0$

Eje: $y = -9$

54) $y^2 + 16x - 18y + 225 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-9)^2 = -16(x+9)$

Vértice: $V(-9,9)$

Foco: $F(-13,9)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 4$.

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $x = -5$

Eje: $y = 9$

55) $x^2 - 8x - 32y + 48 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x-4)^2 = 32(y-1)$

Vértice: $V(4,1)$

Foco: $F(4,9)$

Abre hacia: arriba con $p = 8$.

LLR: $\text{LLR} = 32$

Directriz: $y = -7$

Eje: $x = 4$

56) $x^2 - 12x - 16y + 132 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x-6)^2 = 16(y-6)$

Vértice: $V(6,6)$

Foco: $F(6,10)$

Abre hacia: arriba con $p = 4$.

LLR: $\text{LLR} = 16$

Directriz: $y = 2$

Eje: $x = 6$

57) $y^2 + 4x + 10y + 37 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y+5)^2 = -4(x+3)$

Vértice: $V(-3,-5)$

Foco: $F(-4,-5)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 1$.

LLR: $\text{LLR} = 4$

Directriz: $x = -2$

Eje: $y = -5$

58) $x^2 + 16x - 20y - 16 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x+8)^2 = 20(y+4)$

Vértice: $V(-8,-4)$

Foco: $F(-8,1)$

Abre hacia: arriba con $p = 5$.

LLR: $\text{LLR} = 20$

Directriz: $y = -9$

Eje: $x = -8$

59) $x^2 + 4x - 8y + 20 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(x+2)^2 = 8(y-2)$

Vértice: $V(-2,2)$

Foco: $F(-2,4)$

Abre hacia: arriba con $p = 2$.

LLR: $\text{LLR} = 8$

Directriz: $y = 0$

Eje: $x = -2$

60) $y^2 + 24x - 16y + 88 = 0$

Ec. F. ordinaria: $(y-8)^2 = -24(x+1)$

Vértice: $V(-1,8)$

Foco: $F(-7,8)$

Abre hacia: la izquierda con $p = 6$.

LLR: $\text{LLR} = 24$

Directriz: $x = 5$

Eje: $y = 8$

Formulario

Unidad Doce

Ec. Parábola vertical F. ordinaria: Vértice en el origen:

$$x^2 = 4\,p\,y$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba. Si $p < 0$ abre hacia abajo.

Ec. Parábola vertical F. ordinaria: Vértice en el punto $V(h,k)$:

$$(x-h)^2 = 4\,p\,(y-k)$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba. Si $p < 0$ abre hacia abajo.

Ec. Parábola horizontal F. ordinaria: Vértice en el origen :

$$y^2 = 4\,p\,x$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha. Si $p < 0$ abre hacia la izquierda.

Ec. Parábola vertical F. ordinaria: Vértice en el punto $V(h,k)$:

$$(y-k)^2 = 4\,p\,(x-h)$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha. Si $p < 0$ abre hacia la izquierda.

Otras fórmulas: Parábola con vértice en el punto $V(h,k)$:

Parábola	Vertical	Horizontal
Lado Recto	$4\,\|p\|$	$4\,\|p\|$
Foco	$F(h, k+p)$	$F(h+p, k)$
Directriz	$y = k - p$	$x = h - p$
Ec. General	$x^2 + D\,x + E\,y + F = 0$	$y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$
D	$-2\,h$	$-4p$
E	$-4\,p$	$-2\,k$
F	$h^2 + 4\,p\,k$	$k^2 + 4\,p\,h$

Capítulo 13

La elipse

Por aprender...

Por qué es importante...

En la naturaleza encuentras Elipses en las trayectorias que siguen los planetas alrededor del Sol.

13.1 Caracterización geométrica

Ahora vamos a centrar nuestra atención en la elipe.

Esta figura geométrica tiene la misma esencia que la circunferencia, pero ésta está *dilatada* en uno de sus ejes.

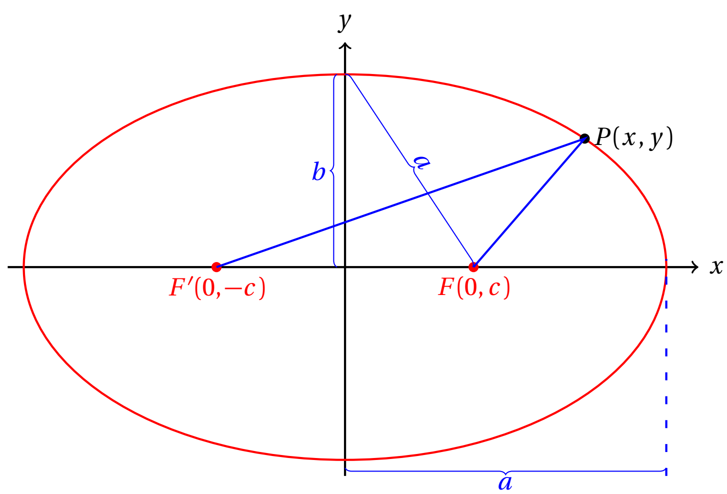
Recuerda la definición de circunferencia. Sus puntos equidistan del centro.

13.1.1 La elipse como lugar geométrico

En el siguiente ejemplo se deduce la ecuación de la elipse en su primera forma ordinaria.

Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal forma que la suma de su distancia a los puntos $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$ siempre es constante. Es decir: $d = |\overline{FP}| + |\overline{PF'}|$. Encuentra la ecuación que representa a este lugar geométrico. **Ejemplo 1**

- Empezamos graficando la información dada en el texto del problema:



- Observa que hemos definido dos distancias: a y b.
- La primera va desde el punto $F(c, 0)$ hasta la intersección de la elipse con el eje vertical.
- Esta misma distancia es la que mide desde el centro de la elipse hasta su intersección con el eje horizontal (a este punto lo llamaremos V).
- Para ver que esto es así considera lo siguiente:
  - ✓ Sea r la distancia desde el origen hasta V.
  - ✓ Desde el punto $F'(-c, 0)$ hasta el origen, después hasta V, mide $r + c$.
  - ✓ Le sumamos la distancia desde V hasta el punto $F(c, 0)$, que es igual a $r - c$.
  - ✓ Obtenemos: $(r + c) + (r - c) = 2r$.
  - ✓ Pero esta distancia es igual a $|\overline{FP}| + |\overline{PF'}| = 2a$.
  - ✓ Luego, $2r = 2a$, que nos indica: $r = a$.
- Al punto donde la elipse se intersecta con el eje vertical lo llamaremos B.

- b va desde el centro de la elipse hasta B.
- Dado que los ejes coordenados son perpendiculares tenemos, por el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(a es la distancia que va desde el punto $F(c,0)$ hasta el punto $B(0,b)$)

- Observa que a es mayor al número b, así como de c.
- También es importante notar que: $|\overline{FP}| + |\overline{PF'}| = 2a$.
- Por definición de elipse, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} d & = & |\overline{FP}| \quad + \quad |\overline{PF'}| \\ 2a & = & \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \end{array}$$

- Si elevamos al cuadrado, y simplificamos obtenemos:

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

- Si dividimos entre 4 simplificamos esta ecuación:

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

- Ahora elevamos de nuevo al cuadrado para desaparecer el radical:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

- Reduciendo términos llegamos a:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2 \cdot \left(a^2 - c^2\right)$$

- Y recordando que $a^2 = b^2 + c^2$, se tiene que: $a^2 - c^2 = b^2$, luego:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

- Al dividir ambos lados de la última igualdad entre a^2b^2 obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Esta es la ecuación de la elipse en su primera forma ordinaria.

Una vez disctutido el problema anterior, podemos dar la definición de elipse.

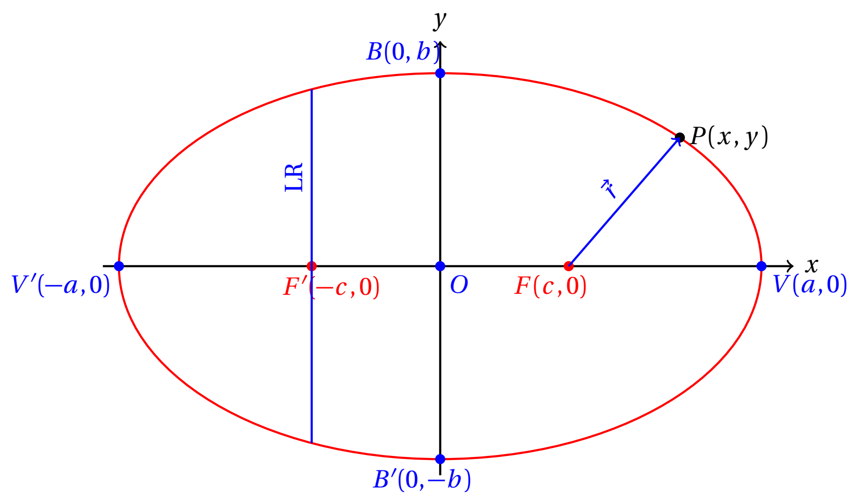
Definición 1	ELIPSE *Es el conjunto de todos los puntos P en el plano, tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos, es igual a una constante $2a$.*

Observa que la ecuación de la elipse que hemos calculado tiene su centro en el origen.

Esta es la primera forma que vamos a estudiar en este curso.

13.1.2 Elementos asociados a la elipse

Para poder estudiar con mejor facilidad la elipse alrededor de ella se han definido algunos elementos.

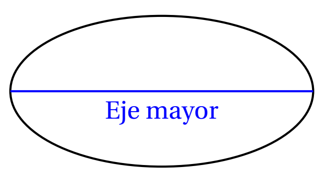


Radio focal *Es el segmento de recta dirigido $\vec{r}$ que va desde un foco F de la elipse hasta un punto $P(x, y)$ que esté sobre ella.*	**Definición 1**

Vértice *Cada uno de los puntos de intersección de la elipse con la recta sobre la cual están los focos se llama vértice de la elipse.*	**Definición 2**

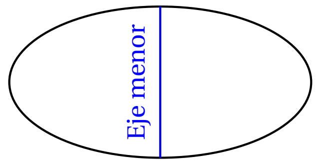
En la discusión del problema anterior, los vértices tenían coordenadas $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$.

Eje mayor *Es el segmento de recta que va desde un vértice hasta el otro: $\overline{VV'}$. El eje mayor de la elipse también se conoce como eje transverso.*	**Definición 3**



Centro *Es el punto medio del eje mayor de una elipse.*	**Definición 4**

Eje menor *Es el segmento de recta que es perpendicular al eje mayor, que pasa por el centro de la elipse, y cuyos extremos son las intersecciones de este segmento con la elipse. El eje menor también se conoce como eje conjugado.*	**Definición 5**



Es importante mencionar que el eje mayor de una elipse no siempre será horizontal. De manera semejante, el eje menor de la elipse no siempre será vertical.

Definición 6

LADO RECTO

El lado recto (LR) de una elipse es el segmento de recta que pasa por uno de sus focos, es perpendicular al eje mayor y cuyos extremos están sobre la elipse.

Teorema 1

La longitud del eje mayor de una elipse es igual a la suma de las distancias de un punto cualquiera $P(x, y)$ que esté sobre la elipse a los focos. Es decir, la longitud del eje mayor es: $2a = |\overline{FP}| + |\overline{PF'}|$

Este teorema se demostró al inicio de la deducción de la ecuación de la elipse en el primer ejemplo de esta sección.

13.2 Ecuaciones ordinarias de la elipse

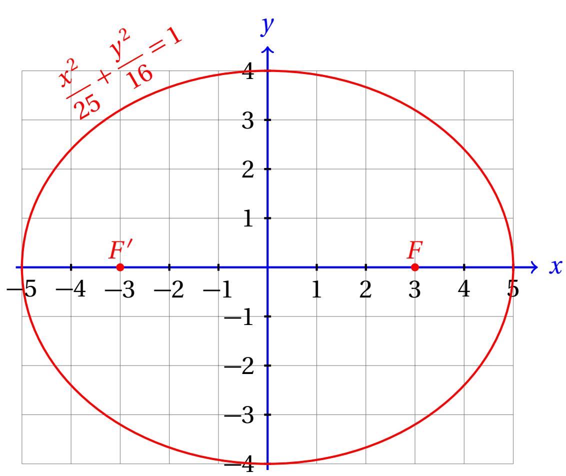
En la sección anterior se dedujo la ecuación de la elipse con centro en el origen.

Esta es la ecuación que se conoce como la ecuación de la elipse en su primera forma ordinaria y que estudiaremos en esta sección.

13.2.1 Vértice en el origen

Calcula la ecuación de la elipse cuyos ejes mayor y menor miden 10 y 8 unidades respectivamente. **Ejemplo 1**

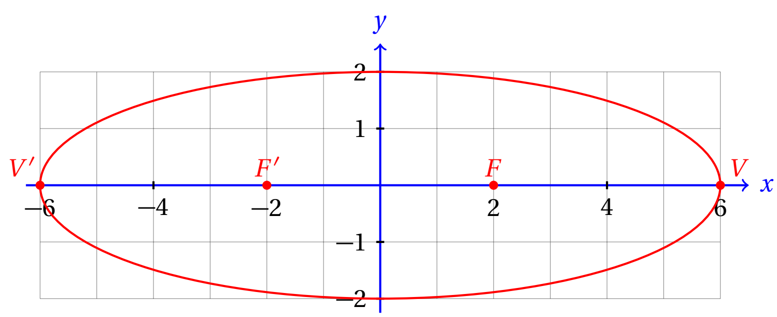
- Dado que conocemos las medidas de los ejes de la elipse, podemos fácilmente calcular los valores de a y b.
- Dado que $2a = 10$, se sigue que $a = 5$.
- De manera semejante, dado que: $2b = 8$, se sigue que: $b = 4$.
- La ecuación de la elipse es:
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$
- Las coordendas de los focos $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$ pueden calcularse usando la relación:
$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \Rightarrow \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-16} = 3$$
- Entonces los focos de la elipse están en los puntos: $F(3,0)$ y $F(-3,0)$.



Calcula la ecuación de la elipse con centro en el origen, y uno de sus focos es el punto $F(2,0)$ y un vértice está en $V(6,0)$. **Ejemplo 2**

- Sabiendo que la elipse tiene su centro en el origen, se deduce que $c = 2$, porque esa es la abscisa de uno de sus focos.

- También dado que un vértice está en $V(6,0)$, se sigue que $a=6$.
- Usando la relación:
$$a^2=b^2+c^2$$
podemos calcular el valor de b:
$$\begin{aligned} b &= \sqrt{a^2-c^2} \\ &= \sqrt{36-4} \\ &= \sqrt{32}=4\sqrt{2} \end{aligned}$$
- Entonces, la longitud del eje menor es: $2b=8\sqrt{2}$.
- Y la longitud del eje ayor es: $2a=12$
- La ecuación de la elipse es:
$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$$
y su gráfica:



Observa que para calcular todos los elementos de la elipse se requiere conocer dos de los tres valores de a, b y c. A partir de estos valores podemos calcular el tercero y calcular todos los elementos de la cónica.

Recuerda siempre que:

✓ a es la mitad de la longitud del eje mayor,

✓ b es la mitad de la longitud del eje menor, y

✓ c es la distancia del centro de la elipse al foco de la misma.

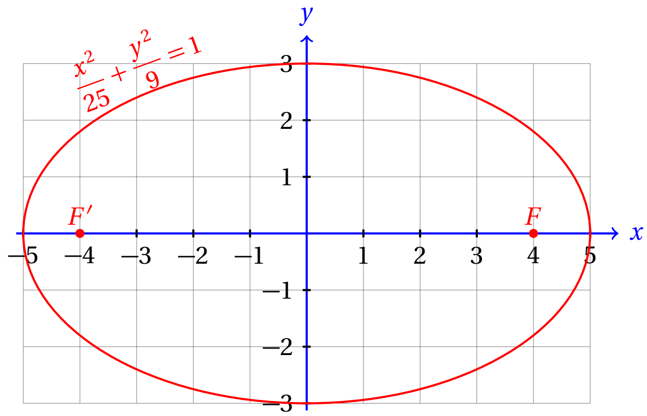
Ejemplo 3 Calcula la ecuación de la elipse con centro en el origen que pasa por el punto $B(0,3)$ y uno de sus vértices es el punto $V(5,0)$. Calcula también sus demás elementos y grafícala.

- Del texto del problema sabemos que $a=5$.
- También nos dieron la intersección de la elipse con el eje y: $B(0,3)$.
- Entonces, $b=3$.
- Así, conocemos las longitudes de los ejes mayor y menor, que son: 10 y 6, respectivamente.

- La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

- La gráfica de esta elipse es la siguiente:



- Para calcular las coordenadas de los focos necesitamos calcular el valor de c:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$$

- Los focos están en los puntos: $F(4,0)$ y $F'(-4,0)$.

Un número que mide la *forma* de la elipse se llama excentricidad.

EXCENTRICIDAD **Definición 1**

La excentricidad de una elipse se define como la razón de la distancia entre los focos de la elipse y la longitud de su eje mayor.
Si denotamos la excentricidad por la letra e, tenemos.

$$e=\frac{c}{a}$$

Ejemplo 4

Calcula la ecuación de la elipse con centro en el origen que tiene uno de sus focos en el punto $F(6,0)$ y excentricidad $e=0.6$.

- Ya sabemos que $c=6$.
- Por definición, $e=c/a=0.6$.
- De aquí podemos calcular el valor de a:

$$0.6=\frac{6}{a}\qquad\Rightarrow\qquad a=\frac{6}{0.6}=10$$

- Entonces, la longitud del eje mayor es 20.
- Y los vértices de esta elipse están en: $V(10,0)$ y $V'(-10,0)$.

- A partir de los valoes de a y c podemos calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

- Entonces, la longitud del eje menor es 16.
- Se te queda como ejercicios graficar esta elipse.

Observa que la excentricidad de la elipse (e) mide la proporción entre la distancia del centro al foco y la distancia del centro a uno de sus vértices.

Esto implica que $0 < e < 1$, dado que los focos de la elipse no pueden estar por fuera de los vértices de la misma.

Cuando e se acerca mucho a 1, los focos tienden a acercarse a los vértices de la elipse. Por otra parte, cuando e tiende a cero, los focos tienden al centro de la elipse.

Para el caso particular $e = 0$, los dos focos estarán en el centro de la elipse y en este caso, las ecuaciones $e = c/a$ y $a^2 = b^2 + c^2$ nos indican que $c = 0$ implica que $e = 0$ y que $a = b$.

En palabras, la circunferencia es un caso particular de la elipse. La circunferencia, considerada como elipse, tiene sus dos focos en el centro de la misma.

En otras palabras, el centro de la circunferencia es, además del centro de la elipse, los dos focos de la misma.

Es importante mencionar que la excentricidad se define, en general para las demás cónicas con la fórmula:

$$e = \frac{c}{a}$$

donde c y a están definidas de acuerdo a cada cónica.

Por ejemplo, para la parábola, la excentricidad es 1, porque c es la distancia desde el foco hasta el vértice de la parábola y a es la distancia desde el vértice a la directriz.

Ejemplo 5 Calcula la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P\left(3, 2\sqrt{3}\right)$ y cuyos vértices están en los puntos $V(6,0)$ y $V'(-6,0)$.

- Para empezar, sabemos que $a = 6$.
- También a partir de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

  podemos despejar y para obtener:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

- Dado que sabemos que cuando $x = 3$, obtenemos: $y = 3\sqrt{3}/4$, sustituyendo en el despeje de la ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} &= \frac{b}{6}\sqrt{36-9} \qquad \Rightarrow \\ b &= \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{27}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

- Ahora podemos calcular el valor de c:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

- Entonces, los focos están en los puntos $F(2\sqrt{5}, 0)$ y $F'(-2\sqrt{5}, 0)$.
- Y la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

- Grafica la elipse mostrando sus focos, vértices y ejes.

Calcula la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $F(0,3)$, y $F'(0,-3)$ y un vértice está en el punto $V(0,5)$.

Ejemplo 6

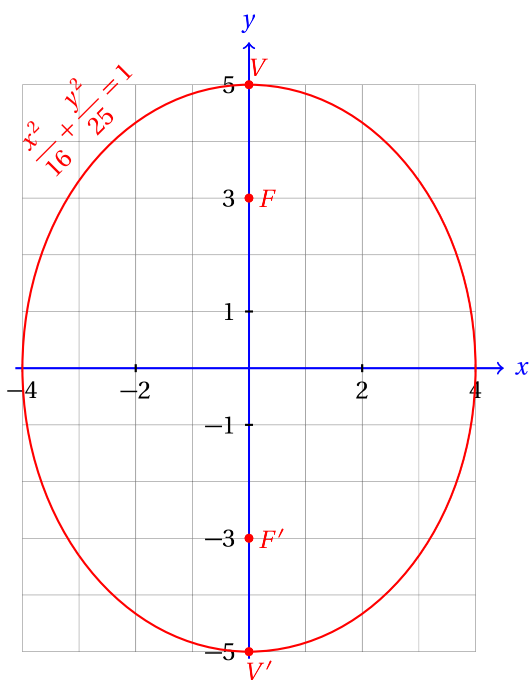
- A partir de los focos podemos darnos cuenta que el centro de la elipse está en el origen de coordenadas.
- Igualmente, dado que los focos están sobre el eje mayor, la elipse es vertical.
- Con la información dada en el texto del problema podemos calcular: $c = 3$, y $a = 5$.
- A partir de estos dos valores podemos calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

- Entonces, la longitud del eje menor es: $2(4) = 8$.
- Y la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

- La gráfica de esta elipse es la siguiente:



Ejemplo 7 Calcula la ecuación de la elipse con centro en el origen que tiene uno de sus focos en el punto $F(0,6)$ y excentricidad $e = 0.6$.

- Dado que la elipse tiene su centro en el origen, el foco nos indica el valor de c: $c = 6$.
- Con la ayuda de laexcentricidad podemos calcular el valor de a:

$$e = \frac{c}{a} \qquad \Rightarrow \qquad 0.6 = \frac{6}{a} \qquad \Rightarrow \qquad a = 10$$

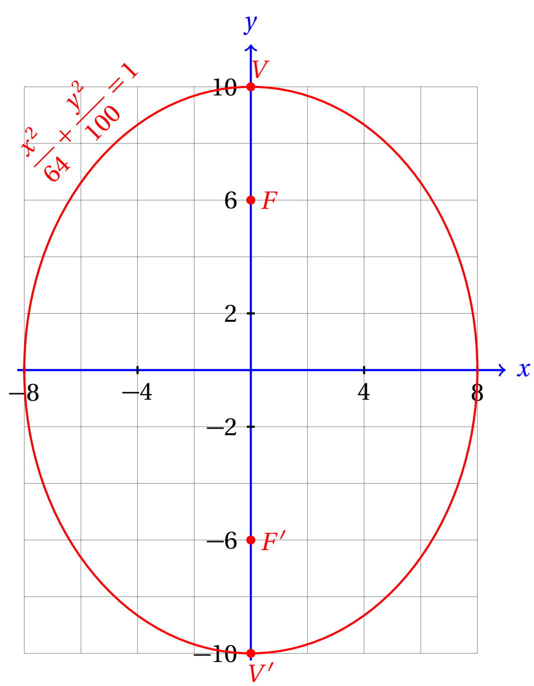
- A partir de estos valores podemos calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

- Y la ecuación de esta elipse es:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

- Y su gráfica la siguiente:



Para encontrar la ecuación de la elipse, solamente debes calcular siempre los valores de a, b y c.

A partir de estos valores ya podrás calcular los demás parámetros de la elipse.

También es importante que deduzcas a partir del texto del problema si la elipse es horizontal o vertical.

Recuerda siempre que en la ecuación de la elipse horizontal a^2 aparece en el denominador de la fracción que contiene en el numerador a x^2:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(Elipse horizontal)}$$

Para la elipse vertical a^2 aparece en el denominador de la fracción que tiene en el numerador a y^2:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{(Elipse vertical)}$$

Ejercicios 13.2.1

Calcula la ecuación de la elipse con centro en el origen para cada uno de los siguientes ejercicios a partir de la información dada. Grafica la elipse y calcula también todos sus elementos.

1) Vértice: $V(0,5)$, foco: $F'(0,-3)$ $\qquad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2) Long. eje mayor: 20, Dist. entre focos: 16. $\qquad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

3) $e = 5/13$, Long. eje mayor: 26. Horizontal. $\qquad \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

4) Foco: $F(0,15)$, Long. eje menor: 16. $\qquad \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{289} = 1$

5) Vértice: $V'(0,-20)$, excentricidad: $e = 3/4$. $\qquad \frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{400} = 1$

6) Long. eje mayor: 50, long. eje menor: 48. Horizontal. $\qquad \frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$

7) Vertical. Long. eje mayor: 52, Long. eje menor: 20. $\qquad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{676} = 1$

8) Excentricidad: $e = 21/29$, vertical, foco: $F(0,21)$. $\qquad \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{841} = 1$

9) Vértice: $V'(0,-34)$, Long. eje menor: 60. $\qquad \frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{1\,156} = 1$

10) Excentricidad: $e = 9/41$, Dist. entre focos: 18, horizontal. $\qquad \frac{x^2}{1\,681} + \frac{y^2}{1\,600} = 1$

11) Long. eje menor: 24, vértice: $V(37,0)$ $\qquad \frac{x^2}{1\,369} + \frac{y^2}{144} = 1$

12) Vértice: $V'(0,-40)$, foco: $F(0,24)$. $\qquad \frac{x^2}{1\,600} + \frac{y^2}{576} = 1$

13) Foco: $F(27,0)$, excentricidad: $e = 3/5$. $\qquad \frac{x^2}{2\,025} + \frac{y^2}{1\,296} = 1$

14) Long. eje mayor: 104, Foco: $F(0,20)$. $\qquad \frac{x^2}{2\,304} + \frac{y^2}{2\,704} = 1$

15) Long. eje menor: 120, Vértice: $V(0,61)$ $\qquad \frac{x^2}{3\,600} + \frac{y^2}{3\,721} = 1$

13.2.2 Centro fuera del origen

La siguiente extensión al caso de la ecuación de la elipse en su primera forma ordinaria es considerar con centro fuera del origen, lo que nos lleva a la segunda forma ordinaria.

Definición 1

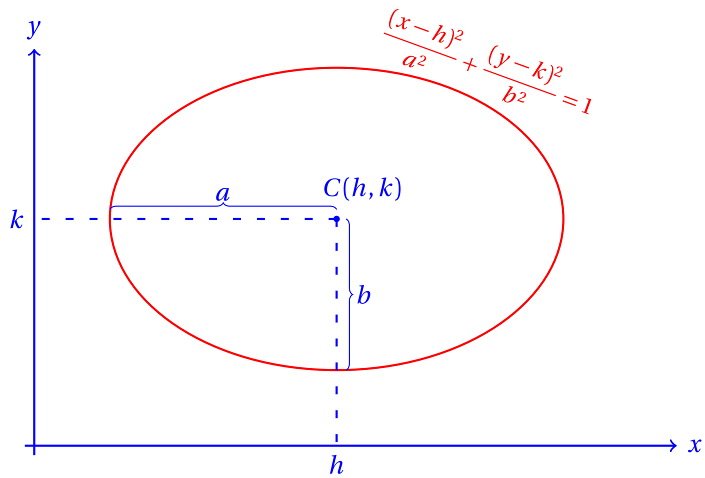
Ecuación de la elipse en su segunda forma ordinaria

La ecuación de la elise con centro en el punto $C(h,k)$ es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

donde a es la mitad de la longitud del eje mayor y b es la mitad de la longitud del eje menor.

Geométricamente tenemos la siguiente situación:



Como era de esperarse, las fórmulas para el cálculo de los focos, sus vértices, etc. cambian.

Por ejemplo, para calcular los vértices de la elipse horizontal, ahora utilizaremos las fórmulas:

$$V(h+a,k) \quad \text{y} \quad V'(h-a,k)$$

Y para el caso de la elipse vertical tenemos:

$$V(h,k+a) \quad \text{y} \quad V'(h,k-a)$$

Por su parte los focos de la elipse horizontal se calculan con:

$$F(h+c,k) \quad \text{y} \quad F'(h-c,k)$$

Y para la elipse vertical:

$$F(h,k+c) \quad \text{y} \quad F'(h,k-c)$$

Ejemplo 1

Calcula la ecuación de la elipse horizontal que tiene su centro en el punto $C(2,-1)$ y cuyo eje mayor mide 10 unidades y el eje menor mide 6 unidades.

- Del texto del problema es facil ver que $h=2$ y que $k=-1$.

- También $a = 5$ y $b = 3$.
- Luego, la ecuación de esta elipse es:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

- A partir de los valores de a y b podemos calcular el valor de c:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

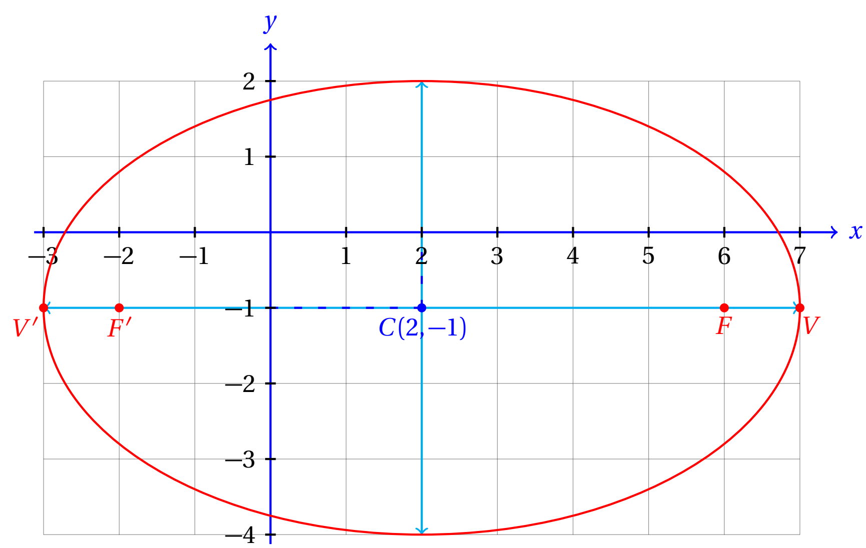
- Los focos de esta elipse están en los puntos:

$$F(h+c,k) = F(6,-1) \quad \text{y} \quad F'(h-c,k) = F'(-2,-1)$$

- Los vértices están en:

$$V(h+a,k) = V(7,-1) \quad \text{y} \quad V'(h-a,k) = V'(-3,-1)$$

- La gráfica de esta elipse es la siguiente:



- La excentricidad de esta elipse es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Calcula la ecuación de la elipse que tiene su centro en el punto $C(-5,2)$, uno de sus focos está en el punto $F(7,2)$ y un vértice en $V(8,2)$. **Ejemplo 2**

- A partir de las coordenadas del centro conocemos los valores de h y k: $h = -5$ y $k = 2$.
- Usando las fórmulas para el foco y el vértice podemos calcular los valores de a y c.
- Empezamos calculando el valor de a a partir de la coordenada del vértice y el valor de h:

$$8 = -5 + a \qquad \Rightarrow \qquad a = 13$$

- De manera semejante, aplicamos la fórmula para calcular la coordenada del foco y así encontramos el valor de c:

$$7 = -5 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 12$$

- Ahora podemos escribir la ecuación de la elipse:

$$\frac{(x+5)^2}{169} + \frac{(y-2)^2}{144} = 1$$

- A partir de los valores de a y c podemos calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

- La excentricidad de esta elipse es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{12}{13} \approx 0.9230769321$$

- Se te queda como ejercicio graficar esta elipse.

Observa cómo es que en estos problemas el truco consiste en conocer los valores de a, b, c, h y k.

Una vez que conozcamos sus valores, podemos calcular la ecuación de la elipse.

De hecho, conociendo dos de los valores a, b, c, podemos calcular el tercero utilizando la relación:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Los valores de h y k que corresponden al centro de la elipse servirán para escribir la ecuación de la elipse en su segunda forma ordinaria, que corresponde a las que tienen su centro fuera del origen.

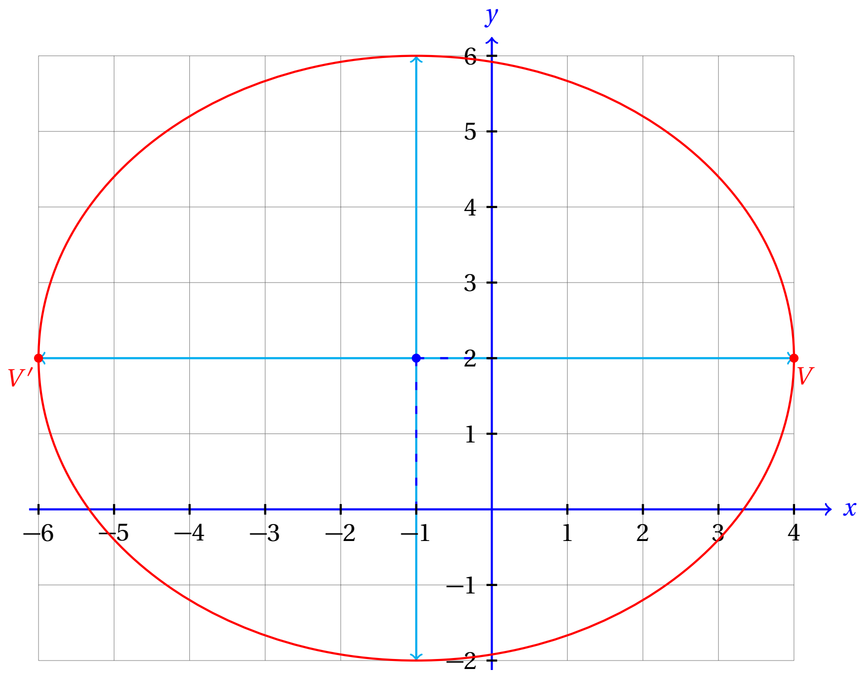
Recuerda que elaborar una gráfica con los datos que provee el texto del problema siempre nos ayuda a reconocer información geométrica y calcular, sin el uso de las fórmulas, alguno o algunos de los valores de a, b y/o c.

Inclusive, también el de las coordenadas del centro en ciertos casos.

Ejemplo 3

Calcula la ecuación de la elipse que tiene sus vértices en $V'(-6,2)$ y $V(4,2)$, y los extremos del eje menor son los puntos $B(-1,6)$ y $B'(-1,-2)$.

- En este caso, es más conveniente empezar dibujando la elipse para poder tener una mejor idea del problema que estamos enfrentando.



- A partir de la gráfica es muy sencillo descubrir las coordenadas del centro de la elipse.
- Pues es el punto donde se intersectan los ejes mayor y menor de la elipse: $C(-1,2)$.
- Así también podemos conocer los valores de $a = 5$ y $b = 4$.
- Vamos a calcular el valor de c:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

- Así que los focos de esta elipse están en:

$$F(2,2) \quad \text{y} \quad F'(-4,2)$$

- Las longitudes de los ejes mayor y menor son: 10 y 8, respectivamente.

Calcula la ecuación de la elipse horizontal que tiene una excentricidad de $e = 0.8$, con centro en el punto $C(5,4)$ y cuya distancia del centro al foco es de 4 unidades. **Ejemplo 4**

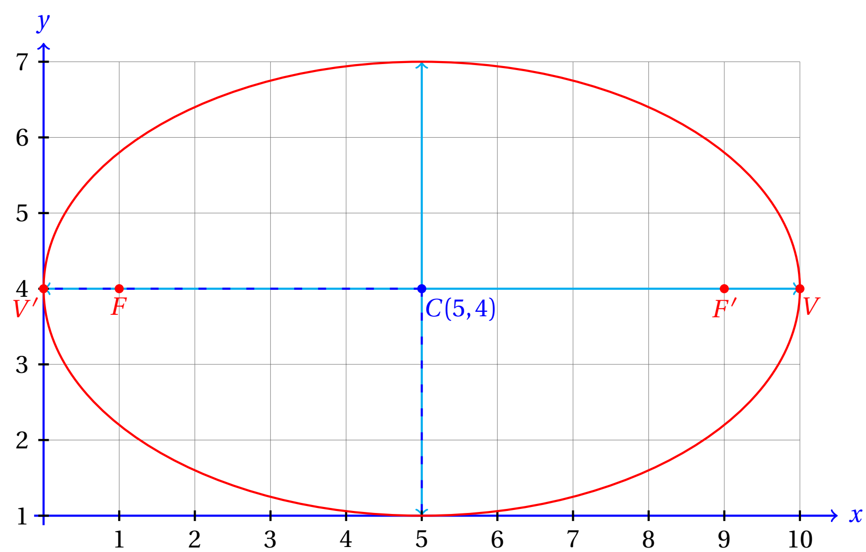
- La distancia del centro de la elipse a uno de sus focos es c.
- Luego, $c = 4$.
- A partir de la excentricidad podemos calcular el valor de a:

$$e = \frac{c}{a} \qquad \Rightarrow \qquad 0.8 = \frac{4}{a} \qquad \Rightarrow \qquad a = 5$$

- Y con los valores de a y c podemos calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

- Entonces, ya tenemos todos los datos que se requieren para conocer la ecuación y todos los elementos de la elipse:
  - ✓ La elipse es horizontal,
  - ✓ $a = 5$, $b = 3$ y $c = 4$,
  - ✓ $h = 5$ y $k = 4$.
- La ecuación de esta elipse es:
$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$
- A partir de los valores de h, k, a y c podemos fácilmente calcular las coordenadas de los focos y de los vértices de la elipse.
- Y su gráfica es la siguiente:



Ejemplo 5 Calcula la ecuación de la elipse que tiene los extremos de su eje menor en los puntos $B(5,-5)$ y $B'(-1,-5)$ y uno de sus vértices es el punto $V(6,-5)$.

- A partir de las coordenadas de los extremos del eje menor podemos calcular su longitud.
- Y b es precisamente la mitad de ese valor: $b = 3$.
- El centro de la elipse está en el punto medio de los extremos del eje menor: $C(2,-5)$.
- El valor de a es igual a la distancia desde el centro hasta uno de sus vértices: $a = 4$.
- A partir de los valores de a y b podemos calcular el valor de c:
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$$
- Ahora podemos calcular las coordenadas de los focos y del vértice faltante:
$$V'(h, k-a) = V'(2,-9)$$
$$F(h, k+c) = F(2,-5+\sqrt{7}) \qquad F'(h, k-c) = F'(2,-5-\sqrt{7})$$

- Se te queda como ejercicio graficar esta elipse.
- Observa que esta elipse es vertical.
- eso ocasiona que los coeficientes a y b queden cambiados en su ecuación:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+5)^2}{16}=1$$

13.3 Ecuación general de la elipse

Como en las cónicas anteriores, para calcular la ecuación general de la elipse, a partir de la ecuación en su forma ordinaria, vamos a expresarla en la forma:

$$A x^2 + B y^2 + D x + E y + F = 0$$

Si la ecuación corresponde a una elipse, entonces los signos de A y B deben ser iguales.

13.3.1 Conversión de f. ordinaria a f. general

Calcula la ecuación general de la siguiente elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Ejemplo 1

- Esta ecuación es la que encontramos en el ejemplo que se resolvió en la página 553.
- Ahora solamente vamos a multiplicar ambos lados de la igualdad por 25 y después por 16:

$$\begin{aligned} 16\,x^2 + 25\,y^2 &= 400 \\ 16\,x^2 + 25\,y^2 - 400 &= 0 \end{aligned}$$

- Esta es la ecuación de la elipse, pero en la forma general.

Calcula la ecuación (en su forma general) de la elipse con centro en el origen, y uno de sus focos es el punto $F(2,0)$ y un vértice está en $V(6,0)$.

Ejemplo 2

- Esta ecuación es la que encontramos en la página 553:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$$

- Ahora solamente vamos a transformarla a la forma general:

$$\begin{aligned} 32\,x^2 + 36\,y^2 &= 1152 \\ 32\,x^2 + 36\,y^2 - 1152 &= 0 \end{aligned}$$

Calcula la ecuación de la elipse que tiene su centro en el punto $C(-5,2)$, uno de sus focos está en el punto $F(7,2)$ y un vértice en $V(8,2)$.

Ejemplo 3

- Ya calculamos la ecuación en forma ordinaria de esta elipse (pg. 561).

$$\frac{(x+5)^2}{169} + \frac{(y-2)^2}{144} = 1$$

- Ahora solamente la vamos a escribir en la forma general.

- Empezamos multiplicando ambos lados de la igualdad por los denominadores de las fracciones:

$$\begin{aligned} 144(x+5)^2+169(y-2)^2 &= 24\,336 \\ 144(x+5)^2+169(y-2)^2-24\,336 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora desarrollamos los binomios que están elevados al cuadrado:

$$\begin{aligned} 144\left(x^2+10\,x+25\right)+169\left(y^2-2\,y+4\right)-24\,336 &= 0 \\ 144\,x^2+1\,440\,x+3\,600+169\,y^2-338\,y+676-24\,336 &= 0 \\ 144\,x^2+1\,440\,x+169\,y^2-338\,y-22\,220 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Ejemplo 4 Calcula la ecuación de la elipse horizontal que tiene una excentricidad de $e=0.8$, con centro en el punto $C(5,4)$ y cuya distancia del centro al foco es de 4 unidades.

- Ya calculamos la ecuación en forma ordinaria de esta elipse (pg. 563).

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$$

- Ahora la transformamos a la forma general:

$$\begin{aligned} 9(x-5)^2+25(y-4)^2 &= 225 \\ 9(x-5)^2+25(y-4)^2-225 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora desarrollamos los binomios que están elevados al cuadrado:

$$\begin{aligned} 9\left(x^2-10\,x+25\right)+25\left(y^2-8\,y+16\right)-225 &= 0 \\ 9\,x^2-90\,x+225+25\,y^2-200\,y+400-225 &= 0 \\ 9\,x^2-90\,x+25\,y^2-200\,y+400 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Ejemplo 5 Calcula la ecuación de la elipse que tiene los extremos de su eje menor en los puntos $B(5,-5)$ y $B'(-1,-5)$ y uno de sus vértices es el punto $V(6,-5)$.

- La ecuación de esta elipse en forma ordinaria se calculó en la página 564:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+5)^2}{16}=1$$

- Ahora la transformamos a la forma general:

$$\begin{aligned} 16(x-2)^2+9(y+5)^2 &= 144 \\ 16(x-2)^2+9(y+5)^2-144 &= 0 \\ 16\left(x^2-4\,x+4\right)+9\left(y^2+10\,y+25\right)-144 &= 0 \\ 16\,x^2-32\,x+64+9\,y^2+90\,y+225-144 &= 0 \\ 16\,x^2-32\,x+9\,y^2+90\,y+145 &= 0 \end{aligned}$$

- Y listo.

En resumen, para convertir de la forma ordinaria a la forma general, basta con multiplicar ambos lados de la ecuación por cada uno de los denominadores que aparecen en la ecuación, después desarrollar los binomios (en caso de que el centro de la elipse esté fuera del origen) y simplificar.

Recuerda que la ecuación debe quedar igualada a cero.

Como hemos visto con la parábola y la circunferencia, la parte más interesante llega cuando convertimos la ecuación general a la forma ordinaria, que es el siguiente tema que estudiaremos.

Calcula la ecuación de la elipse con centro fuera del origen para cada uno de los siguientes ejercicios a partir de la información dada. Grafica la elipse y calcula también todos sus elementos.	**Ejercicios 13.3.1**

1) Información: vértices: $V(9,-7)$, $V'(-1,-7)$, excentricidad: $e = 3/5$.
   - ✓ Focos: $F(7,-7)$, $F'(1,-7)$
   - ✓ Extremos de eje menor: $B(4,-3)$, $B'(4,-11)$
   - ✓ Centro: $C(4,-7)$
   - ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-4)^2}{25} + \dfrac{(y+7)^2}{16} = 1$
2) Información: focos: $F(10,-7)$, $F'(-6,-7)$, excentricidad: $e = 8/10$.
   - ✓ Vértices: $V(12,-7)$, $V'(-8,-7)$
   - ✓ Extremos de eje menor: $B(2,-1)$, $B'(2,-13)$
   - ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{100} + \dfrac{(y+7)^2}{36} = 1$
3) Información: Long. eje menor: 24, centro: $C(-1,9)$, foco: $F(4,9)$
   - ✓ Vértices: $V(12,9)$, $V'(-14,9)$
   - ✓ Focos: $F(4,9)$, $F'(-6,9)$
   - ✓ Extremos de eje menor: $B(-1,21)$, $B'(-1,-3)$
   - ✓ Excentricidad: $e = 5/13$
   - ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+1)^2}{169} + \dfrac{(y-9)^2}{144} = 1$
4) Información: Long. eje mayor: 34, excentricidad: $e = 15/17$, centro: $C(5,3)$, vertical.
   - ✓ Vértices: $V(5,20)$, $V'(5,-14)$
   - ✓ Focos: $F(5,18)$, $F'(5,-12)$
   - ✓ Extremos de eje menor: $B(13,3)$, $B'(-3,3)$
   - ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{64} + \dfrac{(y-3)^2}{289} = 1$
5) Información: vértice: $V'(-13,-4)$, Long. eje menor: 32, centro: $C(7,-4)$.
   - ✓ Vértices: $V(27,-4)$, $V'(-13,-4)$
   - ✓ Focos: $F(19,-4)$, $F'(-5,-4)$
   - ✓ Extremos de eje menor: $B(7,12)$, $B'(7,-20)$

- ✓ Excentricidad: $e = 12/20$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-7)^2}{400} + \dfrac{(y+4)^2}{256} = 1$

6) Información: vértices: $V(-8,17)$, $V'(-8,-33)$, foco: $F'(-8,-15)$

- ✓ Extremos de eje menor: $B(16,-8)$, $B'(-32,-8)$
- ✓ Excentricidad: $e = 7/25$
- ✓ Centro: $C(-8,-8)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+8)^2}{576} + \dfrac{(y+8)^2}{625} = 1$

7) Información: extremos de eje menor: $B(7,11)$, $B'(7,-9)$, vértice: $V(33,1)$.

- ✓ Vértices: $V(33,1)$, $V'(-19,1)$
- ✓ Focos: $F(31,1)$, $F'(-17,1)$
- ✓ Excentricidad: $e = 24/26$
- ✓ Centro: $C(7,1)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-7)^2}{676} + \dfrac{(y-1)^2}{100} = 1$

8) Información: focos: $F(28,-3)$, $F'(-14,-3)$, excentricidad: $e = 21/29$

- ✓ Vértices: $V(36,-3)$, $V'(-22,-3)$
- ✓ Extremos de eje menor: $B(7,17)$, $B'(7,-23)$
- ✓ Centro: $C(7,-3)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-7)^2}{841} + \dfrac{(y+3)^2}{400} = 1$

9) Información: centro: $C(-1,-6)$, vértice: $V(33,-6)$ y foco: $F(15,-6)$.

- ✓ Vértices: $V(33,-6)$, $V'(-35,-6)$
- ✓ Focos: $F(15,-6)$, $F'(-17,-6)$
- ✓ Extremos de eje menor: $B(-1,24)$, $B'(-1,-36)$
- ✓ Excentricidad: $e = 16/34$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+1)^2}{1156} + \dfrac{(y+6)^2}{900} = 1$

10) Información: excentricidad: $e = 9/41$, centro: $C(2,-4)$, Vértice: $V(43,-4)$.

- ✓ Vértices: $V(43,-4)$, $V'(-39,-4)$
- ✓ Focos: $F(11,-4)$, $F'(-7,-4)$
- ✓ Extremos de eje menor: $B(2,36)$, $B'(2,-44)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{1681} + \dfrac{(y+4)^2}{1600} = 1$

11) Información: Long. eje mayor: 74, extremos del eje menor: $B(2,16)$, $B'(2,-8)$.

- ✓ Vértices: $V(39,4)$, $V'(-35,4)$
- ✓ Focos: $F(37,4)$, $F'(-33,4)$
- ✓ Excentricidad: $e = 35/37$
- ✓ Centro: $C(2,4)$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{1369}+\dfrac{(y-4)^2}{144}=1$

12) Información: centro: $C(7,3)$, vértice: $V(7,43)$ y foco: $F'(7,-29)$.

✓ Vértices: $V(7,43)$, $V'(7,-37)$

✓ Focos: $F(7,35)$, $F'(7,-29)$

✓ Extremos de eje menor: $B(31,3)$, $B'(-17,3)$

✓ Excentricidad: $e=32/40$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x-7)^2}{576}+\dfrac{(y-3)^2}{1600}=1$

13) Información: Dist. entre focos: 54, excentricidad: $e=27/45$, centro: $C(-4,-1)$, vertical.

✓ Vértices: $V(-4,44)$, $V'(-4,-46)$

✓ Focos: $F(-4,26)$, $F'(-4,-28)$

✓ Extremos de eje menor: $B(32,-1)$, $B'(-40,-1)$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+4)^2}{1296}+\dfrac{(y+1)^2}{2025}=1$

14) Información: $a=52$, centro: $C(-10,2)$, excentricidad: $e=20/52$, horizontal.

✓ Vértices: $V(42,2)$, $V'(-62,2)$

✓ Focos: $F(10,2)$, $F'(-30,2)$

✓ Extremos de eje menor: $B(-10,50)$, $B'(-10,-46)$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+10)^2}{2704}+\dfrac{(y-2)^2}{2304}=1$

15) Información: vértices: $V(4,56)$, $V'(4,-66)$, Extremo de eje menor: $B(64,-5)$.

✓ Focos: $F(4,6)$, $F'(4,-16)$

✓ Excentricidad: $e=11/61$

✓ Centro: $C(4,-5)$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x-4)^2}{3600}+\dfrac{(y+5)^2}{3721}=1$

16) Información: vertical, excentricidad: $e=48/50$, focos: $F(10,42)$, $F'(10,-54)$.

✓ Vértices: $V(10,44)$, $V'(10,-56)$

✓ Extremos de eje menor: $B(24,-6)$, $B'(-4,-6)$

✓ Centro: $C(10,-6)$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x-10)^2}{196}+\dfrac{(y+6)^2}{2500}=1$

17) Información: extremos de eje menor: $B(38,10)$, $B'(-18,10)$, vértice: $V(10,63)$.

✓ Focos: $F(10,55)$, $F'(10,-35)$

✓ Excentricidad: $e=45/53$

✓ Centro: $C(10,10)$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x-10)^2}{784}+\dfrac{(y-10)^2}{2809}=1$

18) Información: focos: $F(38,-6)$, $F'(-42,-6)$, extremo del eje menor: $B(-2,36)$.

- ✓ Vértices: $V(56,-6)$, $V'(-60,-6)$
- ✓ Excentricidad: $e = 40/58$
- ✓ Centro: $C(-2,-6)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+2)^2}{3364} + \dfrac{(y+6)^2}{1764} = 1$

19) Información: vértices: $V(-7,69)$, $V'(-7,-61)$, excentricidad: $e = 33/65$.

- ✓ Focos: $F(-7,37)$, $F'(-7,-29)$
- ✓ Extremos de eje menor: $B(49,4)$, $B'(-63,4)$
- ✓ Centro: $C(-7,4)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+7)^2}{3136} + \dfrac{(y-4)^2}{4225} = 1$

20) Información: focos: $F(-7,22)$, $F'(-7,-26)$, excentricidad: $e = 24/74$.

- ✓ Vértices: $V(-7,72)$, $V'(-7,-76)$
- ✓ Extremos de eje menor: $B(63,-2)$, $B'(-77,-2)$
- ✓ Centro: $C(-7,-2)$
- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+7)^2}{4900} + \dfrac{(y+2)^2}{5476} = 1$

13.3.2 Conversión de la forma general a la forma ordinaria

Como en los casos de las otras cónicas, para convertir una ecuación de la forma general a la forma ordinaria, utilizaremos el método de factorización conocido como *completar cuadrados*.

Ejemplo 1

Convierte la ecuación general de la elipse:

$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

a la forma ordinaria.

- En este caso no se requiere de completar cuadrados.
- Basta con dividir ambos lados de la igualdad entre 4:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

- Y esta es la ecuación de la elipse, pero en forma ordinaria.

Ejemplo 2

Convierte la ecuación general de la elipse:

$$4x^2 + 16y^2 - 8x + 32y - 44 = 0$$

a la forma ordinaria.

- Ahora si vamos a aplicar el método de completar cuadrados.
- Empezamos ordenando los términos: primero los que incluyen a x y después los que incluyen a y:

$$\left[4x^2-8x\right]+\left[16y^2+32y\right]=44$$

- Factorizamos el coeficiente del término principal de cada binomio:

$$4\left[x^2-2x\right]+16\left[y^2+2y\right]=44$$

- Ahora vamos a sumar en ambos lados de la igualdad el término independiente que convierte a cada binomio en un trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned} 4\left[x^2-2x+1\right]+16\left[y^2+2y+1\right] &= 44+4+16 \\ 4(x-1)^2+16(y+1)^2 &= 64 \end{aligned}$$

- Al dividir ambos lados de la igualdad entre 64 obtenemos la ecuación en la forma ordinaria:

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

- Y hemos terminado.
- A partir de esta ecuación podemos muy fácilmente calcular todos los elementos de la elipse.

Calcula todos los elementos de la elipse cuya ecuación es:

$$9x^2+25y^2+18x-100y-116=0$$

y grafícala.

Ejemplo 3

- Empezamos convirtiendo la ecuación de la elipse en su forma ordinaria:

$$\begin{aligned} \left[9x^2+18x\right]+\left[25y^2-100y\right] &= 116 \\ 9\left[x^2+2x\right]+25\left[y^2-4y\right] &= 116 \\ 9\left[x^2+2x+1\right]+25\left[y^2-4y+4\right] &= 116+9+100 \\ 9(x+1)^2+25(y-2)^2 &= 225 \end{aligned}$$

- Ahora solamente dividimos ambos lados de la igualdad entre 225 y obtenemos la ecuación de la elipse en su forma ordinaria:

$$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

- A partir de esta ecuación es muy fácil darse cuenta que:

$$\begin{array}{lll} a=5 & b=3 & c=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-9}=4 \\ h=-1 & k=2 & \end{array}$$

- Además, la elipse es horizontal, porque a está en el denominador de la fracción que contiene a x.

- Conociendo estos valores podemos enlistar todos los elementos de la elipse:

$$C(-1,2)$$

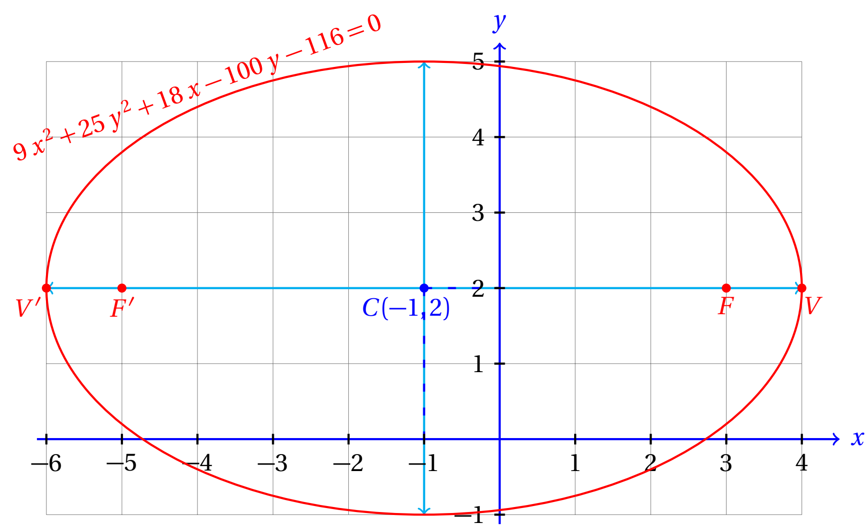
$$V(4,2) \quad V'(-6,2) \qquad F(3,2) \quad F'(-5,2)$$

Longitud del eje mayor: 10 unidades

Longitud del eje menor: 6 unidades

$$e = \frac{4}{5} = 0.8$$

- Y la gráfica de esta elipse es la siguiente:



- Observa que es mucho más fácil de graficar la elipse cuando conocemos su ecuación en la forma ordinaria.
- Igualmente, es mucho más sencillo calcular todos sus elementos a partir de la forma ordinaria.
- Por eso es muy importante saber transformar la ecuación de la forma general a la forma ordinaria.

Ejemplo 4

Calcula todos los elementos de la elipse cuya ecuación es:

$$25\,x^2 + 16\,y^2 - 250\,x - 32\,y + 241 = 0$$

y grafícala.

- Empezamos convirtiendo la ecuación a la forma ordinaria:

$$\begin{aligned}
25\,x^2 + 16\,y^2 - 250\,x - 32\,y &= -241\\
\left[25\,x^2 - 250\,x\right] + \left[16\,y^2 - 32\,y\right] &= -241\\
25\left[x^2 - 10\,x\right] + 16\left[y^2 - 2\,y\right] &= -241\\
25\left[x^2 - 10\,x + 25\right] + 16\left[y^2 - 2\,y + 1\right] &= -241 + 625 + 16\\
25(x-5)^2 + 16(y-1)^2 &= 400
\end{aligned}$$

- Dividiendo ambos lados de la ecuación entre 400 obtenemos:

$$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

- De esta ecuación en la forma ordinaria deducimos rápidamente que:

$$\begin{array}{lll} a=5 & b=4 & c=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-16}=3 \\ h=5 & k=1 & \end{array}$$

- Observa que la elipse es vertical.
- Y a partir de estos valores, podemos calcular los elementos de la elipse:

$$\begin{array}{rrrr} & C(5,1) & & \\ V(5,6) & V'(5,-4) & F(5,4) & F'(5,-2) \\ \multicolumn{2}{r}{\text{Longitud del eje mayor:}} & \multicolumn{2}{l}{\text{10 unidades}} \\ \multicolumn{2}{r}{\text{Longitud del eje menor:}} & \multicolumn{2}{l}{\text{8 unidades}} \\ \multicolumn{2}{r}{e=\frac{3}{5}=0.6} & & \end{array}$$

- Se te queda como ejercicio graficar la elipse.

En todos los ejemplos que hemos resuelto en esta sección, las coordenadas de los elementos de la elipse han sido valores enteros.

Como es obvio suponer, eso no siempre ocurrirá así.

Algunas veces encontraremos coordenadas que incluyen raíces, aún cuando la mayoría tenga valores enteros. Esto se debe a la relación que existe entre a, b y c:

$$a^2=b^2+c^2$$

Pues generalmente conoceremos dos de estos tres valores y el otro tendrá que ser calculado a partir de la relación anterior.

Ejemplo 5

Calcula todos los elementos de la elipse cuya ecuación es:

$$16\,x^2+4\,y^2+32\,x-8\,y-44=0$$

y grafícala.

- Empezamos completando cuadrados:

$$\begin{array}{rcl} 16\,x^2+32\,x+4\,y^2-8\,y & = & 44 \\ 16\left[x^2+2\,x\right]+4\left[y^2-2\,y\right] & = & 44 \\ 16\left[x^2+2\,x+{\color{red}1}\right]+4\left[y^2-2\,y+{\color{blue}1}\right] & = & 44+{\color{red}16}+{\color{blue}4} \\ 16(x+1)^2+4(y-1)^2 & = & 64 \\ \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16} & = & 1 \end{array}$$

- De nuevo, esta elipse es vertical.

- A partir de la ecuación se deducen:

$$\begin{array}{lll} a=4 & b=2 & c=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \\ h=-1 & k=1 & \end{array}$$

- Y sus elementos son:

$$\begin{array}{rrll} & C(-1,1) & & \\ V(-1,5) & V'(-1,-3) & F(-1,1+2\sqrt{3}) & F'(-1,1-2\sqrt{3}) \\ \multicolumn{2}{r}{\text{Longitud del eje mayor:}} & \text{8 unidades} & \\ \multicolumn{2}{r}{\text{Longitud del eje menor:}} & \text{4 unidades} & \\ \multicolumn{2}{r}{e=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}} & & \end{array}$$

- Se te queda como ejercicio graficar esta elipse.

Ejercicios 13.3.2 Convierte las siguientes ecuaciones de elipses en forma general a la forma ordinaria. Calcula además todos sus elementos.

1) $16x^2+25y^2-160x+150y+225=0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{25}+\dfrac{(y+3)^2}{16}=1$
✓ Centro: $C(5,-3)$
✓ Vértices: $V(10,-3)$, $V'(0,-3)$
✓ Focos: $F(8,-3)$, $F'(2,-3)$
✓ Extremos: $B(5,1)$, $B'(5,-7)$
✓ Excentricidad: $e=3/5$

2) $25x^2+16y^2+50x-128y-119=0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y-4)^2}{25}=1$
✓ Centro: $C(-1,4)$
✓ Vértices: $V(-1,9)$, $V'(-1,-1)$
✓ Focos: $F(-1,7)$, $F'(-1,1)$
✓ Extremos: $B(3,4)$, $B'(-5,4)$
✓ Excentricidad: $e=3/5$

3) $144x^2+169y^2+1440x+338y-20567=0$

✓ Ecuación: $\dfrac{(x+5)^2}{169}+\dfrac{(y+1)^2}{144}=1$
✓ Centro: $C(-5,-1)$
✓ Vértices: $V(8,-1)$, $V'(-18,-1)$
✓ Focos: $F(0,-1)$, $F'(-10,-1)$
✓ Extremos: $B(-5,11)$, $B'(-5,-13)$

- ✓ Excentricidad: $e = 5/13$

4) $100\,x^2 + 36\,y^2 - 1000\,x - 144\,y - 956 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{36} + \dfrac{(y-2)^2}{100} = 1$
- ✓ Centro: $C(5,2)$
- ✓ Vértices: $V(5,12)$, $V'(5,-8)$
- ✓ Focos: $F(5,10)$, $F'(5,-6)$
- ✓ Extremos: $B(11,2)$, $B'(-1,2)$
- ✓ Excentricidad: $e = 8/10$

5) $144\,x^2 + 169\,y^2 + 576\,x + 338\,y - 23591 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+2)^2}{169} + \dfrac{(y+1)^2}{144} = 1$
- ✓ Centro: $C(-2,-1)$
- ✓ Vértices: $V(11,-1)$, $V'(-15,-1)$
- ✓ Focos: $F(3,-1)$, $F'(-7,-1)$
- ✓ Extremos: $B(-2,11)$, $B'(-2,-13)$
- ✓ Excentricidad: $e = 5/13$

6) $576\,x^2 + 625\,y^2 - 5760\,x - 6250\,y - 329975 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{625} + \dfrac{(y-5)^2}{576} = 1$
- ✓ Centro: $C(5,5)$
- ✓ Vértices: $V(30,5)$, $V'(-20,5)$
- ✓ Focos: $F(12,5)$, $F'(-2,5)$
- ✓ Extremos: $B(5,29)$, $B'(5,-19)$
- ✓ Excentricidad: $e = 7/25$

7) $289\,x^2 + 64\,y^2 + 578\,x - 512\,y - 17183 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+1)^2}{64} + \dfrac{(y-4)^2}{289} = 1$
- ✓ Centro: $C(-1,4)$
- ✓ Vértices: $V(-1,21)$, $V'(-1,-13)$
- ✓ Focos: $F(-1,19)$, $F'(-1,-11)$
- ✓ Extremos: $B(7,4)$, $B'(-9,4)$
- ✓ Excentricidad: $e = 15/17$

8) $400\,x^2 + 256\,y^2 + 800\,x + 2560\,y - 95600 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+1)^2}{256} + \dfrac{(y+5)^2}{400} = 1$
- ✓ Centro: $C(-1,-5)$
- ✓ Vértices: $V(-1,15)$, $V'(-1,-25)$
- ✓ Focos: $F(-1,7)$, $F'(-1,-17)$
- ✓ Extremos: $B(15,-5)$, $B'(-17,-5)$

- ✓ Excentricidad: $e = 12/20$

9) $625\,x^2 + 576\,y^2 - 5000\,x + 3456\,y - 344816 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-4)^2}{576} + \dfrac{(y+3)^2}{625} = 1$
- ✓ Centro: $C(4,-3)$
- ✓ Vértices: $V(4,22)$, $V'(4,-28)$
- ✓ Focos: $F(4,4)$, $F'(4,-10)$
- ✓ Extremos: $B(28,-3)$, $B'(-20,-3)$
- ✓ Excentricidad: $e = 7/25$

10) $1600\,x^2 + 1681\,y^2 + 9600\,x - 3362\,y - 2673519 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+3)^2}{1681} + \dfrac{(y-1)^2}{1600} = 1$
- ✓ Centro: $C(-3,1)$
- ✓ Vértices: $V(38,1)$, $V'(-44,1)$
- ✓ Focos: $F(6,1)$, $F'(-12,1)$
- ✓ Extremos: $B(-3,41)$, $B'(-3,-39)$
- ✓ Excentricidad: $e = 9/41$

11) $676\,x^2 + 100\,y^2 - 1352\,x - 1000\,y - 64424 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-1)^2}{100} + \dfrac{(y-5)^2}{676} = 1$
- ✓ Centro: $C(1,5)$
- ✓ Vértices: $V(1,31)$, $V'(1,-21)$
- ✓ Focos: $F(1,29)$, $F'(1,-19)$
- ✓ Extremos: $B(11,5)$, $B'(-9,5)$
- ✓ Excentricidad: $e = 24/26$

12) $841\,x^2 + 400\,y^2 - 8410\,x + 3200\,y - 308975 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{400} + \dfrac{(y+4)^2}{841} = 1$
- ✓ Centro: $C(5,-4)$
- ✓ Vértices: $V(5,25)$, $V'(5,-33)$
- ✓ Focos: $F(5,17)$, $F'(5,-25)$
- ✓ Extremos: $B(25,-4)$, $B'(-15,-4)$
- ✓ Excentricidad: $e = 21/29$

13) $900\,x^2 + 1156\,y^2 + 3600\,x + 4624\,y - 1032176 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+2)^2}{1156} + \dfrac{(y+2)^2}{900} = 1$
- ✓ Centro: $C(-2,-2)$
- ✓ Vértices: $V(32,-2)$, $V'(-36,-2)$
- ✓ Focos: $F(14,-2)$, $F'(-18,-2)$
- ✓ Extremos: $B(-2,28)$, $B'(-2,-32)$

- ✓ Excentricidad: $e = 16/34$

14) $1600\,x^2 + 1681\,y^2 - 16000\,x + 6724\,y - 2642876 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{1681} + \dfrac{(y+2)^2}{1600} = 1$
- ✓ Centro: $C(5,-2)$
- ✓ Vértices: $V(46,-2)$, $V'(-36,-2)$
- ✓ Focos: $F(14,-2)$, $F'(-4,-2)$
- ✓ Extremos: $B(5,38)$, $B'(5,-42)$
- ✓ Excentricidad: $e = 9/41$

15) $3721\,x^2 + 3600\,y^2 + 37210\,x + 28800\,y - 13244975 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+5)^2}{3600} + \dfrac{(y+4)^2}{3721} = 1$
- ✓ Centro: $C(-5,-4)$
- ✓ Vértices: $V(-5,57)$, $V'(-5,-65)$
- ✓ Focos: $F(-5,7)$, $F'(-5,-15)$
- ✓ Extremos: $B(55,-4)$, $B'(-65,-4)$
- ✓ Excentricidad: $e = 11/61$

16) $1369\,x^2 + 144\,y^2 - 10952\,x + 864\,y - 173936 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x-4)^2}{144} + \dfrac{(y+3)^2}{1369} = 1$
- ✓ Centro: $C(4,-3)$
- ✓ Vértices: $V(4,34)$, $V'(4,-40)$
- ✓ Focos: $F(4,32)$, $F'(4,-38)$
- ✓ Extremos: $B(16,-3)$, $B'(-8,-3)$
- ✓ Excentricidad: $e = 35/37$

17) $576\,x^2 + 1600\,y^2 + 3456\,x + 12800\,y - 890816 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+3)^2}{1600} + \dfrac{(y+4)^2}{576} = 1$
- ✓ Centro: $C(-3,-4)$
- ✓ Vértices: $V(37,-4)$, $V'(-43,-4)$
- ✓ Focos: $F(29,-4)$, $F'(-35,-4)$
- ✓ Extremos: $B(-3,20)$, $B'(-3,-28)$
- ✓ Excentricidad: $e = 32/40$

18) $1296\,x^2 + 2025\,y^2 + 7776\,x + 20250\,y - 2562111 = 0$

- ✓ Ecuación: $\dfrac{(x+3)^2}{2025} + \dfrac{(y+5)^2}{1296} = 1$
- ✓ Centro: $C(-3,-5)$
- ✓ Vértices: $V(42,-5)$, $V'(-48,-5)$
- ✓ Focos: $F(24,-5)$, $F'(-30,-5)$
- ✓ Extremos: $B(-3,31)$, $B'(-3,-41)$
- ✓ Excentricidad: $e = 27/45$

Formulario

Unidad Trece

Ec. Elipse F. ordinaria: Horizontal con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ec. Elipse F. ordinaria: Vertical con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Ec. Elipse F. ordinaria: Horizontal con centro en el punto $C(h,k)$:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Ec. Elipse F. ordinaria: Vertical con centro en el punto $C(h,k)$:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Otras fórmulas: Elipse con centro en el punto $C(h,k)$:

- ✓ Longitud del eje mayor: $2\,a$.
- ✓ Longitud del eje menor: $2\,b$.
- ✓ Distancia entre los focos: $2\,c$.
- ✓ Relación entre a, b y c: $a^2=b^2+c^2$.
- ✓ Excentricidad: $e=c/a<1$

Elipse	Vertical	Horizontal
Lado Recto	$2\,b^2/a$	$2\,b^2/a$
Focos	$F(h,k\pm c)$	$F(h\pm c,k)$
Vértices	$V(h,k\pm a)$	$F(h\pm a,k)$
Ec. General	$A\,x^2+y^2+D\,x+E\,y+F=0$	
A	a^2	b^2
B	b^2	a^2
D	$-2\,a^2h$	$-2\,b^2h$
E	$-2\,b^2k$	$-2\,a^2k$
F	$a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2$	$b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2$

Capítulo 14

La hipérbola

Por aprender...

Por qué es importante...

En la naturaleza encuentras Hipérbolas en

14.1 Caracterización geométrica

Ahora vamos a centrar caracterizar geométricamente a la hipérbola.

La hipérbola es la única de las cónicas que requiere de las dos ramas del cono para poderla obtener en un corte.

Las demás cónicas se obtienen con una sola de sus ramas.

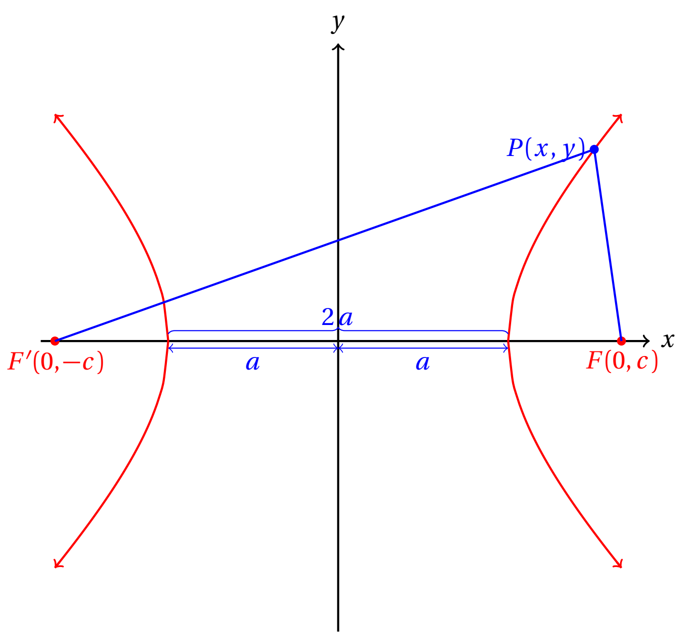
14.1.1 La hipérbola como lugar geométrico

En contra de la definición de elipse, la hipérbola se define como sigue.

Hipérbola
Es el conjunto de todos los puntos P en el plano, tal que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos, es igual a una constante $2a$.

Definición 1

Algebraicamente, tenemos: $\left||\overline{F'P}|-|\overline{FP}|\right|=2a$. Y geométricamente, la situación es:



Los puntos $V(a,0)$ y $V'(-a,0)$ son los vértices de la hiperbola.

De la figura se hace evidente que la distancia entre los focos es mayor que la distancia entre los vértices.

Dado que $c>a$, ahora esperamos que $c^2=a^2+b^2$.

Un punto $P(x,y)$ se mueve de tal forma que la diferencia de su distancia a los puntos $F(0,c)$ y $F'(0,-c)$ siempre es constante. Es decir: $2a=\left||\overline{F'P}|-|\overline{FP}|\right|$. Encuentra la ecuación que representa a este lugar geométrico.

Ejemplo 1

- Definimos $P(x,y)$ como un punto que está sobre la hipérbola.

- La condición algenraica que se mencionó antes puede reescribirse como:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

- Si el punto satisface la ecuación anterior, entonces está sobre la hipérbola.
- Elevando alcuadrado ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

 que puede reducirse a:

$$c\,x-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

- Volvemos a elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad para obtener:

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$

- Haciendo $b^2=c^2-a^2$, obtenemos:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

- Lo cual puede simplificarse a:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

- Esta es la ecuación de la hipérbola en su forma ordinaria.

En este caso la hipérbola es horizontal porque los focos están sobre una recta horizontal.

Silos focos estuvieran sobre una recta vertical, diremos que la hipérbola es vertical y entonces obtendremos la ecuación:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Observa que solamente ahora el signo negativo está en el primer término de la ecuación y que, contrario a lo que pasaba con la elipse, los coeficientes a^2 y b^2, no cambian de lugar cuando la cónica cambia de horizontal a verticals.

14.1.2 Elementos asociados a la hipérbola

Si de la ecuación de la hipérbola despejamos y obtenemos:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Cuando los valores de x crecen mucho, el valor de a^2 se va haciendo cada vez más insignificante, de manera que la hipérbola se acerca mucho a la recta:

$$y=\pm\frac{b}{a}\,x$$

Observa que cuando x crece mucho, $\sqrt{x^2-a^2}$ se aproxima mucho a x, porque el valor de a^2 pierde importancia ante el tamaño que tiene x.

Entonces, las rectas: $y=(b/a)\,x$ y $y=-(b/a)\,x$ son las asíntotas de la hipérbola.

Otros elementos asociados a la hipérbola son:

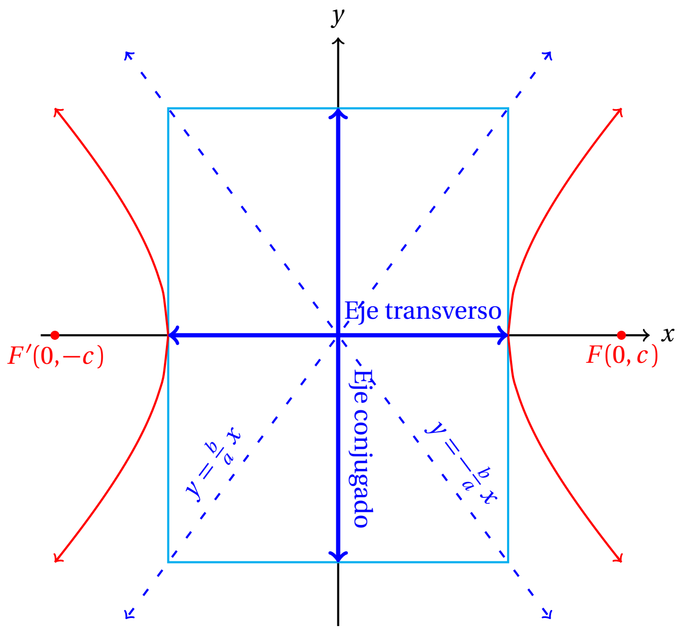
Centro de la hipérbola: es el punto medio de los focos.

Eje transverso: Es el segmento de recta cuyos extremos son los vértices de la hipérbola.

Eje conjugado: Es el segmento de recta que es perpendicular al eje transverso y pasa por el el centro de la hipérbola y su longitud es $2\,b$.

Relación entre coeficientes: $a^2 + b^2 = c^2$.

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$.



Observa que como $c > a$, la excentricidad de una hipérbola siempre es mayor a la unidad.

14.2 Ecuación ordinaria de la hipérbola

Empezamos estudiando la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, que es la ecuación que se deduce anteriormente.

Ahora vamos a utilizarla para calcular ecuaciones de hipérbolas para las cuales se conocen ciertos datos.

14.2.1 Hipérbola con centro en el origen

Como en las cónicas que ya hemos estudiado, el problema de calcular la ecuación de la hipérbola se centra en el cálculo de los coeficientes a, b y c que caracterizan de manera única a la hipérbola.

Siempre debes observar si la hipérbola es horizontal o vertical. Recuerda que las coordenadas de cada elemento de la misma cambian.

Ejemplo 1

Calcula la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, uno de sus focos está en el punto $F(5,0)$ y la longitud de su eje transverso es de 6 unidades.

- A partir de la definición de eje transverso, podemos deducir que, para esta hipérbola, $a=3$.
- También, dado que el foco está en $F(c,0)$, la hipérbola es horizontal y $c=5$.
- Usando la relación: $c^2=a^2+b^2$, podemos fácilmente calcular el valor de b:

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$$

- Y a partir de estos valores podemos calcular los demás elementos asociados a la hipérbola:

  Vértices: $V(3,0)$, $V'(-3,0)$.

  Focos: $F(5,0)$, $F'(-5,0)$.

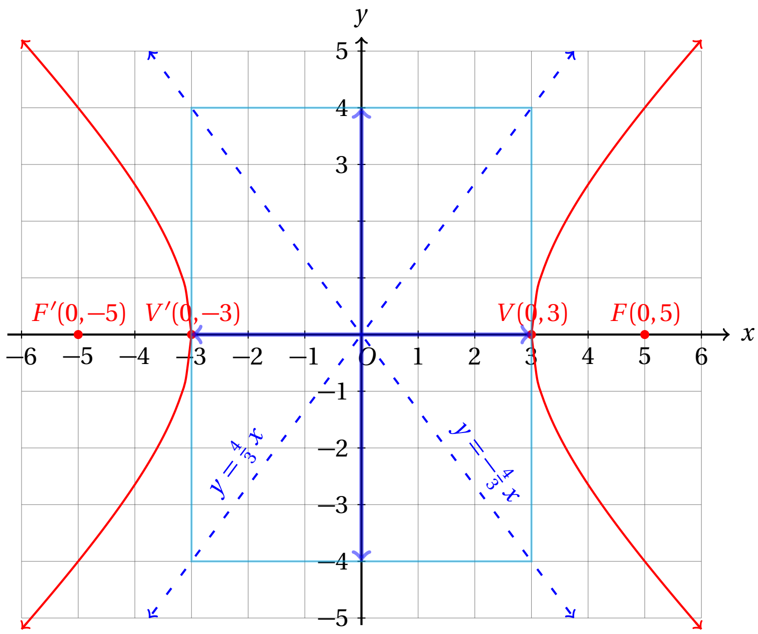
  Long. eje conjugado: $2b=8$.

  Asíntotas: $y=-\frac{4}{3}x$, $y=-\frac{4}{3}x$.

  Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$.

  Ecuación: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

- La gráfica de esta hipérbola es la siguiente:



Ejemplo 2	Calcula la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen con excentricidad $e = 2.6$ y uno de sus vértices está en el punto $V(0,5)$.

- A partir de la coordenada del vértice sabemos que la hipérbola es vertical y que $a = 5$.
- Usando este valor de a y sabiendo que $e = c/a$, podemos calcular el valor de c:

$$2.6 = \frac{c}{5} \qquad \Rightarrow \qquad c = (5)(2.6) = 13$$

- Y a partir de estos valores de a y c podemos calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

- Y ahora podemos enlistar todos los elementos de esta hipérbola:

Vértices: $V(0,5)$, $V'(0,-5)$.

Focos: $F(0,12)$, $F'(0,-12)$.

Long. eje transverso: 26

Long. eje conjugado: 24

Asíntotas: $y = \frac{a}{b}\,x = \frac{5}{12}\,x$, $y = -\frac{a}{b}\,x = -\frac{5}{12}\,x$.

Ecuación: $-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{144} = 1$.

- **Ejercicio:** elaborar un bosquejo de la gráfica de esta hipérbola.

Ejemplo 3	Calcula la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y vértice en el punto $V(4,0)$ y foco en $F(5,0)$.

- Si graficas los puntos dados en el texto del problema te darás cuenta que se trata de una hipérbola horizontal.

- También, de la información dada, tenemos: $a = 4$ y $c = 5$.
- A partir de estos datos podemos calcular b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

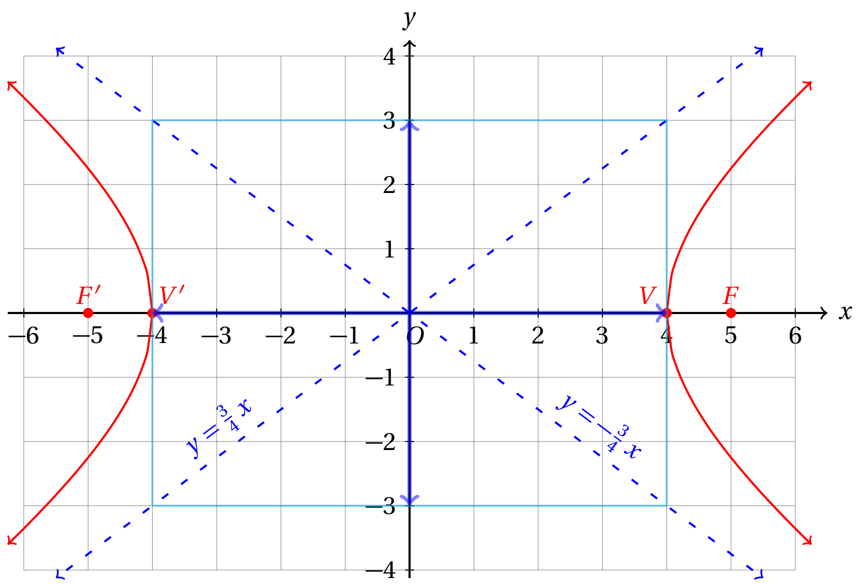
- Ahora podemos enlistar todos los elementos de la hipérbola:

Vértices: $V(0,4)$, $V'(0,-4)$.
Focos: $F(0,5)$, $F'(0,-5)$.
Long. eje transverso: 8
Long. eje conjugado: 6

Asíntotas: $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{3}{4}x$.

Ecuación: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- La gráfica de esta hipérbola es la siguiente:



Para cada uno de los siguientes ejemplos se te quedará como ejercicio graficar la hipérbola de cada problema.

Se sugiere que leas eltexto del problema y tú empieces a graficar los datos del problema en una hoja de tu cuaderno y trates de calcular los parámetros a, b y c que caracterizan a la cónica.

Ejemplo 4

Calcula la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en los puntos $F(10,0)$ y $F'(-10,0)$ y tiene uno de sus vértices en el punto $V(6,0)$.

- A partir de los datos dados en el texto del problema podemos calcular c:

$$2c = \text{Distancia entre los focos} \qquad \Rightarrow \qquad c = 10$$

- Y dado que el centro de la elipse está en el origen, y $V(6,0)$, se sigue que $a = 6$.
- A partir de estos valores podemos calcular b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

- Ahora que conocemos los tres valores de los parámetros, podemos calcular todos los elementos de la hipérbola:

Vértices: $V(6,0)$, $V'(-6,0)$.
Focos: $F(10,0)$, $F'(-10,0)$.
Long. eje transverso: 12
Long. eje conjugado: 16

Asíntotas: $y = \frac{4}{5}\,x,\; y = -\frac{4}{5}\,x.$

Ecuación: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1.$

Ejemplo 5 Calcula la ecuación de la hipérbola con centro en el origen que tiene uno de sus focos en el punto $F(0,3)$ y su excentricidad es $e = 1.5$

- Sabiendo que el centro de la hipérbola y que uno de sus focos es $F(0,3)$ notamos que se trata de una hipérbola vertical y que $c = 3$.
- Por otra parte,
$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{a} = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad a = 2.$$
- Entonces,
$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$
- Y los elementos de la hipérbola son:

Vértices: $V(0,2)$, $V'(0,-2)$.
Focos: $F(0,3)$, $F'(0,-3)$.
Long. eje transverso: 4
Long. eje conjugado: $2\sqrt{5}$

Asíntotas: $y = \frac{\sqrt{5}}{2}\,x,\; y = -\frac{\sqrt{5}}{2}\,x.$

Ecuación: $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1.$

14.2.2 Hipérbola con centro fuera del origen

Ahora vamos a calcular la ecuación ordinaria de la hipérbola, pero con el centro en el punto $C(h,k)$.

Esto ocasiona un cambio en la forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola horizontal a través de una traslación como:
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
y para el caso de la hipérbola vertical como:
$$-\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

La solución de los problemas de este tipo también se reducen a calcular los parámetros a, b y c de la hipérbola, pero hay que tener cuidado con el cálculo de los elementos de la hipérbola.

Recuerda que cuando la hipérbola las fórmulas para el cálculo de cada elemento de la misma cambia cuando es horizontal a cuando es vertical.

Ejemplo 1 Calcula la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el punto $C(2,2)$, un vértice en el punto $V(17,2)$ y un foco en $F'(-15,2)$.

- Para empezar, la distancia desde el centro de la hipérbola hasta uno de sus focos es c:
$$c = |-15-2| = 17$$

- También sabemos que la distancia desde el centro de la hipérbola hasta un vértice es a:

$$a = |17 - 2| = 15$$

- A partir de esta información podemos calcular el valor de b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8$$

- Y a partir de estos parámetros fácilmente calculamos todos los elementos de la hipérbola.
- Empezamos calculando el otro foco.
- Dado que del foco al centro hay 17 unidades, y el otro foco está a la derecha del centro, las coordenadas del foco faltante son: $F(19, 2)$.
- De manera semejante, para calcular las coordenadas del otro vértice, observa que éste se encuentra a la izquierda del centro de la hipérbola, y que la distancia del centro de la hipérbola a cada vértice es 15 unidades.
- Entonces, $V'(-13, 2)$.
- Los extremos del eje conjugado están a 8 unidades, uno arriba y el otro abajo del centro de la hipérbola:

$$B(2, 10) \qquad \text{y} \qquad B'(2, -6)$$

- La lista de todos los elementos de esta hipérbola se enlistan enseguida:

Centro: $C(2, 2)$
Vértices: $V(17, 2)$, $V'(-13, 2)$
Focos: $F(19, 2)$, $F'(-15, 2)$
Long. Eje Transverso: 30
Long. Eje Conjugado: 16
Excentricidad: $e = 17/15$
Ecuación: $\dfrac{(x+2)^2}{225} - \dfrac{(y+2)^2}{64} = 1$

- Se te queda como ejercicio graficar esta hipérbola.

Calcula la ecuación y todos los elementos de la hipérbola que tiene sus vértices en los puntos $V(1, 4)$ y $V'(-5, 4)$ y la longitud de su eje conjugado es igual a 8 unidades. **Ejemplo 2**

- Por simetría, el punto medio del eje transverso es el centro de la hipérbola.
- Los extremos del eje transverso son los vértices.
- Entonces, las coordenadas $C(x_C, y_C)$ del centro de la hipérbola son:

$$x_C = \frac{1-5}{2} = -2 \qquad\qquad y_C = \frac{4+4}{2} = 4$$

- Ahora que sabemos que el centro es el punto $C(-2, 4)$, podemos calcular el valor de a.
- Que es la distancia desde el centro hasta cualquiera de los vértices:

$$a = |1 - (-2)| = 3$$

- Y usando la longitud del eje conjugado calculamos el valor del parámetro b:

$$2\,b = 8 \qquad \Rightarrow \qquad b = 4$$

- Usando los valores de a y b podemos calcular el de c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

- Y a partir de esta información, fácilmente calculamos todos los elementos de la hipérbola.
- Para calcular los focos, sumamos y restamos $c = 5$ unidades a la coordenada x del centro de lahipérbola: $F(3,4)$ y $F'(-7,4)$.
- La longitud del eje transverso es $2\,a = 2(3) = 6$.
- La excentricidad es: $e = c/a = 5/3$.
- Y la ecuación de esta hipérbola:

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{16} = 1$$

Ejemplo 3 Calcula la ecuación y todos los elementos de la hipérbola vertical cuyo eje transverso mide 16 unidades y su eje conjugado mide 12 unidades, y tiene su centro en el punto $C(-1,7)$.

- Sabemos que la longitud del eje transverso es $2\,a$.
- Esto indica que $2\,a = 16$, es decir, $a = 8$.
- Por otra parte, la longitud del eje conjugado es $2\,b$.
- Entonces, $2\,b = 12$, es decir, $b = 6$.
- Ahora podemos calcular el valor de c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

- Ahora podemos calcular los elementos de la hipérbola.
- Empezamos con los vértices.
- Dado que la hipérbola es vertical, un vértice está 8 unidades arriba del centro y el otro está abajo 8 unidades:

$$V(-1, 7+8) = V(-1, 15) \qquad \text{y} \qquad V'(-1, 7-8) = V'(-1, -1)$$

- Los focos se encuentran de manera semejante, dado que están sobre el eje transverso al igual que los vértices.
- La distancia del centro a cada foco es: $c = 10$

$$F(-1, 7+10) = F(-1, 17) \qquad \text{y} \qquad F'(-1, 7-10) = F'(-1, -3)$$

- Los extremos del eje conjugado están a 6 unidades a la derecha y a la izquierda del centro, respectivamente.

- Por eso, para encontrar sus coordenadas sumamos y restamos ahora en la coordenada del eje x:

$$B(-1+6,7)=B(5,7) \qquad \text{y} \qquad B'(-1-6,7)=B'(-7,-7)$$

- La excentricidad de esta hipérbola es: $e=c/a=5/4$.
- Y la ecuación de esta hipérbola es:

$$-\frac{(x+1)^2}{64}+\frac{(y-7)^2}{36}=1$$

Calcula la ecuación y todos los elementos de la hipérbola que tiene su centro en el punto $C(-1,-4)$ y uno de sus vértices en el punto $V(-1,12)$ y cuya excentricidad es $e=17/8$. **Ejemplo 4**

- La distancia del centro de la hipérbola a cualquiera de sus vértices es a.
- Entonces, $a=|12-(-4)|=16$.
- Y con el valor de la excentricidad de la hipérbola, podemos calcular el valor de c:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{16}=17/8 \qquad \Rightarrow \qquad c=34$$

- Y el valor de b se calcula a partir de los dos anteriores:

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{34^2-16^2}=\sqrt{1156-256}=\sqrt{900}=30$$

- Ahora ya podemos calcular todos los elementos de la hipérbola.
- Observa que la hipérbola es vertical.
- Puedes darte cuenta de esto viendo que el vértice está arriba del centro de la hipérbola.
- Entonces, el otro vértice está debajo del centro: $V'(-1,-4-16)=V'(-1,-20)$.
- Los focos están uno arriba y otro debajo del centro:

$$F(-1,-4+34)=F(-1,30) \qquad \text{y} \qquad F'(-1,-4-34)=F'(-1,-38)$$

- La longitud del eje transverso es: $2a=2(16)=32$.
- La longitud del eje conjugado es: $2b=2(30)=60$.
- Finalmente, la ecuación de esta hipérbola es:

$$-\frac{(x+1)^2}{900}+\frac{(y+4)^2}{256}=1$$

Para todos los problemas resueltos en esta sección, tienes de tarea graficar cada una de las hipérbolas.

Se sugiere que vuelvas a leer el texto de cada problema y grafiques los datos y tú intentes sin ver la solución de cada ejemplo.

Esto te ayudará a entender mejor el procedimiento y así podrás poco a poco profundizar en el porqué del mismo.

El siguiente ejemplo, muestra todo el procedimiento, pero tú debes intentar resolverlo solo, leyendo los datos del problema solamente. Al final puedes verificar tus resultados.

Calcula la ecuación y todos los elementos de la hipérbola horizontal que tiene su centro en el punto $C(3,-3)$, excentricidad $e=13/12$, y longitud del eje transverso igual a 48 unidades. **Ejemplo 5**

- Observa que la hipérbolaes horizontal.
- Eso significa que los vértices como los focos están, uno a la derecha y el otro a la izquierda del centro.
- Dado que el eje transverso mide 48 unidades, $2a = 48$, implica $a = 24$.
- Usando $e = 13/12 = c/a$, podemos calcular el valor de c, dado que ya conocemos a:

$$\frac{c}{24} = \frac{13}{12} \qquad \Rightarrow \qquad c = 26$$

- Y el valor de b se calcula con la relación: $c^2 = a^2 + b^2$:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{676 - 576} = \sqrt{100} = 10$$

- Ahora podemos calcular todos los elementos de la hipérbola:

Centro: $C(3, -3)$

Vértices: $V(27, -3)$, $V'(-21, -3)$

Focos: $F(29, -3)$, $F'(-23, -3)$

Long. Eje Transverso: 48

Long. Eje Conjugado: 20

Excentricidad: $e = 26/24$

Ecuación: $\dfrac{(x+3)^2}{576} - \dfrac{(y-3)^2}{100} = 1$

Ejercicios 14.2.2 Calcula la ecuación y todos los elementos de la hipérbola faltantes a partir de los datos dados.

1) Información:

Centro: $C(4, -4)$

Vértices: $V(7, -4)$, $V'(1, -4)$

Focos: $F(9, -4)$, $F'(-1, -4)$

Long. Eje Transverso: 6

Long. Eje Conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x+4)^2}{9} - \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$

2) Información:

Centro: $C(1, -4)$

Vértices: $V(9, -4)$, $V'(-7, -4)$

Focos: $F(11, -4)$, $F'(-9, -4)$

Long. Eje Transverso: 16

Long. Eje Conjugado: 12

Excentricidad: $e = 10/8$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x+1)^2}{64} - \dfrac{(y-4)^2}{36} = 1$

3) Información:

Centro: $C(4,4)$

Vértices: $V(4,9)$, $V'(4,-1)$

Focos: $F(4,17)$, $F'(4,-9)$

Long. Eje Transverso: 10

Long. Eje Conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x-4)^2}{144} + \dfrac{(y-4)^2}{25} = 1$

4) Información:

Centro: $C(-2,-3)$

Vértices: $V(-2,12)$, $V'(-2,-18)$

Focos: $F(-2,14)$, $F'(-2,-20)$

Long. Eje Transverso: 30

Long. Eje Conjugado: 16

Excentricidad: $e = 17/15$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x+2)^2}{64} + \dfrac{(y+3)^2}{225} = 1$

5) Información:

Centro: $C(-2,6)$

Vértices: $V(-2,18)$, $V'(-2,-6)$

Focos: $F(-2,26)$, $F'(-2,-14)$

Long. Eje Transverso: 24

Long. Eje Conjugado: 32

Excentricidad: $e = 20/12$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x+2)^2}{256} + \dfrac{(y-6)^2}{144} = 1$

6) Información:

Centro: $C(-2,1)$

Vértices: $V(-2,8)$, $V'(-2,-6)$

Focos: $F(-2,26)$, $F'(-2,-24)$

Long. Eje Transverso: 14

Long. Eje Conjugado: 48

Excentricidad: $e = 25/7$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x+2)^2}{576} + \dfrac{(y-1)^2}{49} = 1$

7) Información:

Centro: $C(-1,-4)$

Vértices: $V(-1,20)$, $V'(-1,-28)$

Focos: $F(-1,22)$, $F'(-1,-30)$

Long. Eje Transverso: 48

Long. Eje Conjugado: 20

Excentricidad: $e = 26/24$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x+1)^2}{100} + \dfrac{(y+4)^2}{576} = 1$

8) Información:

Centro: $C(-5,5)$

Vértices: $V(16,5)$, $V'(-26,5)$

Focos: $F(24,5)$, $F'(-34,5)$

Long. Eje Transverso: 42

Long. Eje Conjugado: 40

Excentricidad: $e = 29/21$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{441} - \dfrac{(y+5)^2}{400} = 1$

9) Información:

Centro: $C(-6,7)$

Vértices: $V(10,7)$, $V'(-22,7)$

Focos: $F(28,7)$, $F'(-40,7)$

Long. Eje Transverso: 32

Long. Eje Conjugado: 60

Excentricidad: $e = 34/16$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x-6)^2}{256} - \dfrac{(y+7)^2}{900} = 1$

10) Información:

Centro: $C(-7,6)$

Vértices: $V(-7,15)$, $V'(-7,-3)$

Focos: $F(-7,47)$, $F'(-7,-35)$

Long. Eje Transverso: 18

Long. Eje Conjugado: 80

Excentricidad: $e = 41/9$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\frac{(x+7)^2}{1600} + \frac{(y-6)^2}{81} = 1$

11) Información:

Centro: $C(4,-7)$

Vértices: $V(4,-4)$, $V'(4,-10)$

Focos: $F(4,-2)$, $F'(4,-12)$

Long. Eje Transverso: 6

Long. Eje Conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+7)^2}{9} = 1$

12) Información:

Centro: $C(-1,-4)$

Vértices: $V(7,-4)$, $V'(-9,-4)$

Focos: $F(9,-4)$, $F'(-11,-4)$

Long. Eje Transverso: 16

Long. Eje Conjugado: 12

Excentricidad: $e = 10/8$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\frac{(x-1)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{36} = 1$

13) Información:

Centro: $C(6,3)$

Vértices: $V(11,3)$, $V'(1,3)$

Focos: $F(19,3)$, $F'(-7,3)$

Long. Eje Transverso: 10

Long. Eje Conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\frac{(x+6)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{144} = 1$

14) Información:

Centro: $C(4,4)$

Vértices: $V(19,4)$, $V'(-11,4)$

Focos: $F(21,4)$, $F'(-13,4)$

Long. Eje Transverso: 30

Long. Eje Conjugado: 16

Excentricidad: $e = 17/15$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x+4)^2}{225} - \dfrac{(y+4)^2}{64} = 1$

15) Información:

Centro: $C(-6, -5)$

Vértices: $V(-6, 7)$, $V'(-6, -17)$

Focos: $F(-6, 15)$, $F'(-6, -25)$

Long. Eje Transverso: 24

Long. Eje Conjugado: 32

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x+6)^2}{256} + \dfrac{(y+5)^2}{144} = 1$

16) Información:

Centro: $C(-3, -4)$

Vértices: $V(4, -4)$, $V'(-10, -4)$

Focos: $F(22, -4)$, $F'(-28, -4)$

Long. Eje Transverso: 14

Long. Eje Conjugado: 48

Excentricidad: $e = 25/7$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x-3)^2}{49} - \dfrac{(y-4)^2}{576} = 1$

17) Información:

Centro: $C(1, -5)$

Vértices: $V(1, 19)$, $V'(1, -29)$

Focos: $F(1, 21)$, $F'(1, -31)$

Long. Eje Transverso: 48

Long. Eje Conjugado: 20

Excentricidad: $e = 26/24$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x-1)^2}{100} + \dfrac{(y+5)^2}{576} = 1$

18) Información:

Centro: $C(4, -3)$

Vértices: $V(25, -3)$, $V'(-17, -3)$

Focos: $F(33, -3)$, $F'(-25, -3)$

Long. Eje Transverso: 42

Long. Eje Conjugado: 40

Excentricidad: $e = 29/21$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x+4)^2}{441} - \dfrac{(y-3)^2}{400} = 1$

19) Información:

Centro: $C(-7,1)$

Vértices: $V(9,1)$, $V'(-23,1)$

Focos: $F(27,1)$, $F'(-41,1)$

Long. Eje Transverso: 32

Long. Eje Conjugado: 60

Excentricidad: $e = 34/16$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x-7)^2}{256} - \dfrac{(y+1)^2}{900} = 1$

20) Información:

Centro: $C(-6,-2)$

Vértices: $V(-6,7)$, $V'(-6,-11)$

Focos: $F(-6,39)$, $F'(-6,-43)$

Long. Eje Transverso: 18

Long. Eje Conjugado: 80

Excentricidad: $e = 41/9$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x+6)^2}{1600} + \dfrac{(y+2)^2}{81} = 1$

21) Información:

Centro: $C(2,-3)$

Vértices: $V(5,-3)$, $V'(-1,-3)$

Focos: $F(7,-3)$, $F'(-3,-3)$

Long. Eje Transverso: 6

Long. Eje Conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$

22) Información:

Centro: $C(5,6)$

Vértices: $V(5,14)$, $V'(5,-2)$

Focos: $F(5,16)$, $F'(5,-4)$

Long. Eje Transverso: 16

Long. Eje Conjugado: 12

Excentricidad: $e = 10/8$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x-5)^2}{36} + \dfrac{(y-6)^2}{64} = 1$

23) Información:

Centro: $C(7,-5)$

Vértices: $V(7,0)$, $V'(7,-10)$

Focos: $F(7,8)$, $F'(7,-18)$

Long. Eje Transverso: 10

Long. Eje Conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x-7)^2}{144} + \dfrac{(y+5)^2}{25} = 1$

24) Información:

Centro: $C(7,6)$

Vértices: $V(22,6)$, $V'(-8,6)$

Focos: $F(24,6)$, $F'(-10,6)$

Long. Eje Transverso: 30

Long. Eje Conjugado: 16

Excentricidad: $e = 17/15$

Orientación: Horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x+7)^2}{225} - \dfrac{(y+6)^2}{64} = 1$

25) Información:

Centro: $C(3,-6)$

Vértices: $V(3,6)$, $V'(3,-18)$

Focos: $F(3,14)$, $F'(3,-26)$

Long. Eje Transverso: 24

Long. Eje Conjugado: 32

Excentricidad: $e = 20/12$

Orientación: Vertical

Ecuación: $-\dfrac{(x-3)^2}{256} + \dfrac{(y+6)^2}{144} = 1$

14.3 Ecuación general de la hipérbola

Ahora vamos a la forma general de la ecuación de la hipérbola.

Recuerda que para convertir de la forma ordinaria a la forma general, basta desarrollar las operaciones necesarias para llevar la ecuación ordinaria a la forma:

$$A\,x^2 + B\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

independientemente de que el centro de la hipérbola esté o no en el origen del sistema de coordenadas.

14.3.1 Conversión de f. ordinaria a f. general

Ejemplo 1

Expresa la ecuación ordinaria de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$$

en la forma general.

- Empezamos multiplicando ambos lados de la igualdad por $16 \times 25 = 400$:

$$\begin{aligned} \frac{400 \cdot x^2}{16} - \frac{400 \cdot y^2}{25} &= 400 \\ 25\,x^2 - 16\,y^2 - 400 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Ejemplo 2

Convierte la ecuación ordinaria de la hipérbola

$$-\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$$

a su forma general.

- Empezamos multiplicando por $64 \times 16 = 1024$ ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} -\frac{1024 \cdot x^2}{64} + \frac{1024 \cdot y^2}{16} &= 1024 \\ -16\,x^2 + 64\,y^2 - 1024 &= 0 \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Ejemplo 3

Convierte la ecuación ordinaria de la hipérbola:

$$\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

a su forma general.

- Empezamos multiplicando ambos lados de la igualdad por $16 \times 9 = 144$:

$$\begin{aligned}
\frac{144(x-4)^2}{16} - \frac{144(y-1)^2}{9} &= 144\\
9(x-4)^2 - 16(y-1)^2 &= 144
\end{aligned}$$

- Ahora debemos elevar al cuadrado los binomios que están indicados:

$$\begin{aligned}
9(x^2 - 8x + 16) - 16(y^2 - 2y + 1) - 144 &= 0\\
9x^2 - 72x + \cancel{144} - 16y^2 + 32y - 16 - \cancel{144} &= 0\\
9x^2 - 16y^2 - 72x + 32y - 16 &= 0
\end{aligned}$$

- Y hemos terminado multiplicando por cada factor dentro del paréntesis y después ordenando los términos.

Ejemplo 4

Convierte la ecuación odinaria de la hipérbola:

$$-\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-7)^2}{4} = 1$$

a su forma general.

- En este caso multiplicaremos primero la ecuación por $25 \times 4 = 100$:

$$\begin{aligned}
-\frac{100(x+3)^2}{25} + \frac{100(y-7)^2}{4} &= 100\\
-4(x+3)^2 + 25(y-7)^2 - 100 &= 0
\end{aligned}$$

- Y ahora vamos a elevar al cuadrado los binomios y a simplificar:

$$\begin{aligned}
-4(x^2 + 6x + 9) + 25(y^2 - 14y + 49) - 100 &= 0\\
-4x^2 - 24x - 36 + 25y^2 - 350y + 1225 - 100 &= 0\\
-4x^2 + 25y^2 - 24x - 350y + 1089 &= 0
\end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Ejemplo 5

Convierte la ecuación ordinaria de la hipérbola:

$$\frac{(x-5)^2}{576} - \frac{(y+7)^2}{49} = 1$$

a su forma general.

- Multiplicamos ambos lados de la igualdad por $576 \times 49 = 28224$:

$$\begin{aligned}
\frac{28224(x-5)^2}{576} - \frac{28224(y+7)^2}{49} &= 28224\\
49(x-5)^2 - 576(y+7)^2 - 28224 &= 0
\end{aligned}$$

- Ahora elevamos al cuadrado ambos binomios y luego simplificamos:

$$\begin{aligned}
49(x^2-10x+25)-576(y^2+14y+49)-28224 &= 0\\
49x^2-490x+1225-576y^2-8064y-28224-28224 &= 0\\
49x^2-576y^2-490x-8064y-55223 &= 0
\end{aligned}$$

- Y terminamos.

Y ahora nos vamos con la parte más interesante, que consiste en convertir la ecuación general a la forma ordinaria.

Convierte la ecuación de la hipérbola dada a su forma general. **Ejercicios 14.3.1**

1) $-\dfrac{(x-4)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

Ecuación: $-16x^2+9y^2+128x+18y-391=0$

Centro: $C(4,-1)$

Vértices: $V(4,2)$, $V'(4,-4)$

Focos: $F(4,4)$, $F'(4,-6)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e=5/3$

2) $\dfrac{(x+1)^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

Ecuaci'on: $+16x^2-9y^2+32x+36y-164=0$

Centro: $C(-1,2)$

Vértices: $V(2,2)$, $V'(-4,2)$

Focos: $F(4,2)$, $F'(-6,2)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e=5/3$

Orientación: Horizontal

3) $-\dfrac{(x+5)^2}{25}+\dfrac{(y+3)^2}{144}=1$

Ecuación: $-144x^2+25y^2-1440x+150y-6975=0$

Centro: $C(-5,-3)$

Vértices: $V(-5,2)$, $V'(-5,-8)$

Focos: $F(-5,10)$, $F'(-5,-16)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e=13/5$

4) $\dfrac{(x-5)^2}{64} - \dfrac{(y+2)^2}{36} = 1$

Ecuaci'on: $+36\,x^2 - 64\,y^2 - 360\,x - 256\,y - 1660 = 0$

Centro: $C(5,-2)$

Vértices: $V(13,-2)$, $V'(-3,-2)$

Focos: $F(15,-2)$, $F'(-5,-2)$

Long. eje transverso: 16

Long. eje conjugado: 12

Excentricidad: $e = 10/8$

Orientación: Horizontal

5) $-\dfrac{(x+4)^2}{25} + \dfrac{(y+5)^2}{144} = 1$

Ecuación: $-144\,x^2 + 25\,y^2 - 1152\,x + 250\,y - 5279 = 0$

Centro: $C(-4,-5)$

Vértices: $V(-4,0)$, $V'(-4,-10)$

Focos: $F(-4,8)$, $F'(-4,-18)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

6) $\dfrac{(x-5)^2}{49} - \dfrac{(y+3)^2}{576} = 1$

Ecuaci'on: $+576\,x^2 - 49\,y^2 - 5760\,x - 294\,y - 14265 = 0$

Centro: $C(5,-3)$

Vértices: $V(12,-3)$, $V'(-2,-3)$

Focos: $F(30,-3)$, $F'(-20,-3)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e = 25/7$

Orientación: Horizontal

7) $\dfrac{(x-5)^2}{225} - \dfrac{(y-3)^2}{64} = 1$

Ecuaci'on: $+64\,x^2 - 225\,y^2 - 640\,x + 1350\,y - 14825 = 0$

Centro: $C(5,3)$

Vértices: $V(20,3)$, $V'(-10,3)$

Focos: $F(22,3)$, $F'(-12,3)$

Long. eje transverso: 30

Long. eje conjugado: 16

Excentricidad: $e = 17/15$

Orientación: Horizontal

8) $-\dfrac{(x-3)^2}{144} + \dfrac{(y+2)^2}{256} = 1$

Ecuación: $-256\,x^2+144\,y^2+1536\,x+576\,y-38592=0$

Centro: $C(3,-2)$

Vértices: $V(3,10)$, $V'(3,-14)$

Focos: $F(3,18)$, $F'(3,-22)$

Long. eje transverso: 24

Long. eje conjugado: 32

Excentricidad: $e=20/12$

9) $\dfrac{(x-4)^2}{49}-\dfrac{(y-2)^2}{576}=1$

Ecuaci'on: $+576\,x^2-49\,y^2-4608\,x+196\,y-19204=0$

Centro: $C(4,2)$

Vértices: $V(11,2)$, $V'(-3,2)$

Focos: $F(29,2)$, $F'(-21,2)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e=25/7$

Orientación: Horizontal

10) $\dfrac{(x+1)^2}{81}-\dfrac{(y+5)^2}{1600}=1$

Ecuaci'on: $+1600\,x^2-81\,y^2+3200\,x-810\,y-130025=0$

Centro: $C(-1,-5)$

Vértices: $V(8,-5)$, $V'(-10,-5)$

Focos: $F(40,-5)$, $F'(-42,-5)$

Long. eje transverso: 18

Long. eje conjugado: 80

Excentricidad: $e=41/9$

Orientación: Horizontal

11) $\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$

Ecuaci'on: $+16\,x^2-9\,y^2-32\,x+54\,y-209=0$

Centro: $C(1,3)$

Vértices: $V(4,3)$, $V'(-2,3)$

Focos: $F(6,3)$, $F'(-4,3)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e=5/3$

Orientación: Horizontal

12) $-\dfrac{(x+5)^2}{9}+\dfrac{(y+4)^2}{16}=1$

Ecuación: $-16\,x^2+9\,y^2-160\,x+72\,y-400=0$

Centro: $C(-5,-4)$

Vértices: $V(-5,-1)$, $V'(-5,-7)$

Focos: $F(-5,1)$, $F'(-5,-9)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

13) $\dfrac{(x-1)^2}{25} - \dfrac{(y+5)^2}{144} = 1$

Ecuaci'on: $+144\,x^2 - 25\,y^2 - 288\,x - 250\,y - 4081 = 0$

Centro: $C(1,-5)$

Vértices: $V(6,-5)$, $V'(-4,-5)$

Focos: $F(14,-5)$, $F'(-12,-5)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

Orientación: Horizontal

14) $\dfrac{(x-3)^2}{64} - \dfrac{(y+1)^2}{36} = 1$

Ecuaci'on: $+36\,x^2 - 64\,y^2 - 216\,x - 128\,y - 2044 = 0$

Centro: $C(3,-1)$

Vértices: $V(11,-1)$, $V'(-5,-1)$

Focos: $F(13,-1)$, $F'(-7,-1)$

Long. eje transverso: 16

Long. eje conjugado: 12

Excentricidad: $e = 10/8$

Orientación: Horizontal

15) $\dfrac{(x+2)^2}{25} - \dfrac{(y+1)^2}{144} = 1$

Ecuaci'on: $+144\,x^2 - 25\,y^2 + 576\,x - 50\,y - 3049 = 0$

Centro: $C(-2,-1)$

Vértices: $V(3,-1)$, $V'(-7,-1)$

Focos: $F(11,-1)$, $F'(-15,-1)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

Orientación: Horizontal

16) $-\dfrac{(x+2)^2}{49} + \dfrac{(y-2)^2}{576} = 1$

Ecuación: $-576\,x^2 + 49\,y^2 - 2304\,x - 196\,y - 30332 = 0$

Centro: $C(-2,2)$

Vértices: $V(-2,9)$, $V'(-2,-5)$

Focos: $F(-2,27)$, $F'(-2,-23)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e=25/7$

17) $-\dfrac{(x+1)^2}{225}+\dfrac{(y-1)^2}{64}=1$

Ecuación: $-64\,x^2+225\,y^2-128\,x-450\,y-14239=0$

Centro: $C(-1,1)$

Vértices: $V(-1,16)$, $V'(-1,-14)$

Focos: $F(-1,18)$, $F'(-1,-16)$

Long. eje transverso: 30

Long. eje conjugado: 16

Excentricidad: $e=17/15$

18) $\dfrac{(x+5)^2}{144}-\dfrac{(y-2)^2}{256}=1$

Ecuaci'on: $+256\,x^2-144\,y^2+2560\,x+576\,y-31040=0$

Centro: $C(-5,2)$

Vértices: $V(7,2)$, $V'(-17,2)$

Focos: $F(15,2)$, $F'(-25,2)$

Long. eje transverso: 24

Long. eje conjugado: 32

Excentricidad: $e=20/12$

Orientación: Horizontal

19) $-\dfrac{(x+5)^2}{49}+\dfrac{(y+3)^2}{576}=1$

Ecuación: $-576\,x^2+49\,y^2-5760\,x+294\,y-42183=0$

Centro: $C(-5,-3)$

Vértices: $V(-5,4)$, $V'(-5,-10)$

Focos: $F(-5,22)$, $F'(-5,-28)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e=25/7$

20) $-\dfrac{(x+2)^2}{81}+\dfrac{(y+3)^2}{1600}=1$

Ecuación: $-1600\,x^2+81\,y^2-6400\,x+486\,y-135271=0$

Centro: $C(-2,-3)$

Vértices: $V(-2,6)$, $V'(-2,-12)$

Focos: $F(-2,38)$, $F'(-2,-44)$

Long. eje transverso: 18

Long. eje conjugado: 80

Excentricidad: $e = 41/9$

21) $-\dfrac{(x+2)^2}{9} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$

Ecuación: $-16x^2 + 9y^2 - 64x - 72y - 64 = 0$

Centro: $C(-2,4)$

Vértices: $V(-2,7)$, $V'(-2,1)$

Focos: $F(-2,9)$, $F'(-2,-1)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

22) $-\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

Ecuación: $-16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y - 124 = 0$

Centro: $C(1,2)$

Vértices: $V(1,5)$, $V'(1,-1)$

Focos: $F(1,7)$, $F'(1,-3)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

23) $-\dfrac{(x+2)^2}{25} + \dfrac{(y-5)^2}{144} = 1$

Ecuación: $-144x^2 + 25y^2 - 576x - 250y - 3551 = 0$

Centro: $C(-2,5)$

Vértices: $V(-2,10)$, $V'(-2,0)$

Focos: $F(-2,18)$, $F'(-2,-8)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

24) $-\dfrac{(x-2)^2}{64} + \dfrac{(y+5)^2}{36} = 1$

Ecuación: $-36x^2 + 64y^2 + 144x + 640y - 848 = 0$

Centro: $C(2,-5)$

Vértices: $V(2,3)$, $V'(2,-13)$

Focos: $F(2,5)$, $F'(2,-15)$

Long. eje transverso: 16

Long. eje conjugado: 12

Excentricidad: $e = 10/8$

25) $\dfrac{(x+4)^2}{25} - \dfrac{(y+3)^2}{144} = 1$

Ecuaci'on: $+144\,x^2-25\,y^2+1152\,x-150\,y-1521=0$

Centro: $C(-4,-3)$

Vértices: $V(1,-3)$, $V'(-9,-3)$

Focos: $F(9,-3)$, $F'(-17,-3)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e=13/5$

Orientación: Horizontal

14.3.2 Conversión de f. general a f. ordinaria

Nos vamos directamente a los ejemplos resueltos.

Ejemplo 1

Convierte la ecuación de la hipérbola:

$$100\,x^2-16\,y^2-1600=0$$

a su forma ordinaria.

- Dividimos ambos lados de la ecuación entre 1600 y pasamos el término independiente al lado derecho de la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{100\,x^2}{1600}-\frac{16\,y^2}{1600} &= \frac{1600}{1600} \\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{100} &= 1 \end{aligned}$$

- Se trata de una hipérbola horizontal con centro en el origen y parámetros $a=4$, $b=10$.
- el valor de c se puede calcular fácilmente:

$$c=\sqrt{4^2+10^2}=\sqrt{116}\approx 10.77$$

- Se te queda como ejercicio enlistar todos los elementos de esta hipérbola y graficarla.

Ejemplo 2

Convierte la ecuación de la hipérbola:

$$-36\,x^2+64\,y^2+288\,x+128\,y-2816=0$$

a su forma ordinaria y calcula sus tres parámetros a, b y c.

- Empezamos ordenando los términos de acuerdo a la literal:

$$-36\,x^2+288\,x+64\,y^2+128\,y=2816$$

- Ahora vamos a factorizar -36 de los términos que tienen a la literal x y 64 de los términos que incluyen a y:

$$-36\left(x^2-8x\right)+64\left(y^2+2y\right)=2816$$

- Ahora vamos a completar el cuadrado en cada polinomio encerrado entre paréntesis.
- Para eso, vamos a sumar 16 dentro del primer paréntesis y -36×16 afuera.
- De manera semejante para y, sumamos 1 dentro del paréntesis y afuera 64:

$$\begin{aligned}-36\left(x^2-8x+16\right)+64\left(y^2+2y+1\right) &= 2816-576+64\\ -36\,(x-4)^2+64\left(y+1\right)^2 &= 2304\end{aligned}$$

- Ahora dividimos ambos lados de la igualdad entre 2304 y simplificamos:

$$\begin{aligned}-\frac{36(x-4)^2}{2304}+\frac{64(y+1)^2}{2304} &= \frac{2304}{2304}\\ -\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(y+1)^2}{36} &= 1\end{aligned}$$

- De la ecuación en su forma ordinaria es evidente que:

$$\begin{aligned}a^2=64 \quad &\Rightarrow \quad a=8\\ b^2=36 \quad &\Rightarrow \quad b=6\end{aligned}$$

- A partir de estos valores podemos calcular el valor de c:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

- Y también de la ecuación es evidente que la hipérbola es vertical.
- Sus elementos son:

Centro: $C(4,-1)$
Vértices: $V(4,7)$, $V'(4,-9)$
Focos: $F(4,9)$, $F'(4,-11)$
Long. eje transverso: 16
Long. eje conjugado: 12
Excentricidad: $e=10/8$

- Se te queda como ejercicio graficar esta hipérbola.

Ejemplo 3

Convierte la ecuación de la hipérbola:

$$-16x^2+9y^2-128x-54y-319=0$$

a su forma ordinaria y calcula todos sus elementos.

- Empezamos ordenando los términos de acuerdo a la literal que contengan:

$$-16x^2-128x+9y^2-54y-319=0$$

- Ahora factorizamos el coeficiente del término cuadrático en todos los términos que contengan la misma literal:
$$-16\left(x^2+8\,x\right)+9\left(y^2-6\,y\right)=319$$

- Es hora de completar cuadrados:
$$\begin{aligned}-16\left(x^2+8\,x+16\right)+9\left(y^2-6\,y+9\right) &= 319-256+81\\ -16(x+4)^2+9(y-3)^2 &= 144\end{aligned}$$

- Ahora dividimos ambos lados de la ecuación entre 144:
$$\begin{aligned}-\frac{16(x+4)^2}{144}+\frac{9(y-3)^2}{144} &= \frac{144}{144}\\ -\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{16} &= 1\end{aligned}$$

- De la ecuación es fácil observar que se trata de una hipérbolahorizontal.

- También, los parámetros se deducen de ella, pues:
$$\begin{aligned}a^2=9 &\quad\Rightarrow\quad a=3\\ b^2=16 &\quad\Rightarrow\quad b=4\end{aligned}$$

- En este caso, el valor de c es 5, porque:
$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

- Los elementos de esta hipérbola son:

  Centro: $C(1,-2)$

  Vértices: $V(4,-2)$, $V'(-2,-2)$

  Focos: $F(6,-2)$, $F'(-4,-2)$

  Long. eje transverso: 6

  Long. eje conjugado: 8

  Excentricidad: $e=5/3$

Ejemplo 4

Convierte la ecuación de la hipérbola:
$$144\,x^2-25\,y^2-864\,x-150\,y-2529=0$$
a su forma ordinaria y calcula todos sus elementos.

- Empezamos ordenando los términos de acuerdo a la literal que contengan:
$$144\,x^2-864\,x-25\,y^2-150\,y=2529$$

- Ahora factorizamos el coeficiente del término cuadrático para cada grupo:
$$144\left(x^2-6\,x\right)-25\left(y^2+6\,y\right)=2529$$

- Sigue completar el cuadado en cada polinomio:

$$\begin{aligned}144\left(x^2-6x+9\right)-25\left(y^2+6y+9\right) &= 2529+1296-225\\ 144(x-3)^2-25(y+3)^2 &= 3600\end{aligned}$$

- Ahora dividimos ambos lados de la igualdad entre 3600:

$$\begin{aligned}\frac{144(x-3)^2}{3600}-\frac{25(y+3)^2}{3600} &= \frac{3600}{3600}\\ \frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y+3)^2}{144} &= 1\end{aligned}$$

- La hipérbola es horizontal con parámetros: $a=5$, $b=12$, y

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

- Los elementos de esta hipérbola son:

Centro: $C(3,-3)$

Vértices: $V(8,-3)$, $V'(-2,-3)$

Focos: $F(16,-3)$, $F'(-10,-3)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e=13/5$

- Se te queda como ejercicio graficar esta hipérbola.

Ejemplo 5

Convierte la ecuación de la hipérbola:

$$-576x^2+49y^2-1152x-98y-28751=0$$

a su forma ordinaria y calcula todos sus elementos.

- Realizamos el procedimiento de los últimos ejemplos.

$$\begin{aligned}-576x^2-1152x+49y^2-98y &= 28751\\ -576\left(x^2+2x\right)+49\left(y^2-2y\right) &= 28751\\ -576\left(x^2+2x+1\right)+49\left(y^2-2y+1\right) &= 28751-576+49\\ -576(x+1)^2+49(y-1)^2 &= 28224\\ -\frac{576(x+1)^2}{28224}+\frac{49(y-1)^2}{28224} &= \frac{28224}{28224}\\ -\frac{(x+1)^2}{49}+\frac{(y-1)^2}{576} &= 1\end{aligned}$$

- Los elementos de la hipérbola son:

Centro: $C(-1,1)$

Vértices: $V(-1,8)$, $V'(-1,-6)$

Focos: $F(-1, 26)$, $F'(-1, -24)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e = 25/7$

- Grafica esta hipérbola.

Calcula la ecuación de la hipérbola en su forma ordinaria y todos sus elementos. También grafícala.

Ejercicios 14.3.2

1) $16\,x^2 - 9\,y^2 - 160\,x + 72\,y + 112 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{9} - \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$

Centro: $C(5, 4)$

Vértices: $V(8, 4)$, $V'(2, 4)$

Focos: $F(10, 4)$, $F'(0, 4)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Horizontal

2) $16\,x^2 - 9\,y^2 - 32\,x + 90\,y - 353 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y-5)^2}{16} = 1$

Centro: $C(1, 5)$

Vértices: $V(4, 5)$, $V'(-2, 5)$

Focos: $F(6, 5)$, $F'(-4, 5)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Horizontal

3) $144\,x^2 - 25\,y^2 - 288\,x - 50\,y - 3481 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x-1)^2}{25} - \dfrac{(y+1)^2}{144} = 1$

Centro: $C(1, -1)$

Vértices: $V(6, -1)$, $V'(-4, -1)$

Focos: $F(14, -1)$, $F'(-12, -1)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

Orientación: Horizontal

4) $-36x^2 + 64y^2 - 72x + 640y - 740 = 0$

Ecuación: $-\dfrac{(x+1)^2}{64} + \dfrac{(y+5)^2}{36} = 1$

Centro: $C(-1,-5)$

Vértices: $V(-1,3)$, $V'(-1,-13)$

Focos: $F(-1,5)$, $F'(-1,-15)$

Long. eje transverso: 16

Long. eje conjugado: 12

Excentricidad: $e = 10/8$

5) $144x^2 - 25y^2 - 576x - 50y - 3049 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{25} - \dfrac{(y+1)^2}{144} = 1$

Centro: $C(2,-1)$

Vértices: $V(7,-1)$, $V'(-3,-1)$

Focos: $F(15,-1)$, $F'(-11,-1)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

Orientación: Horizontal

6) $576x^2 - 49y^2 - 5760x + 98y - 13873 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{49} - \dfrac{(y-1)^2}{576} = 1$

Centro: $C(5,1)$

Vértices: $V(12,1)$, $V'(-2,1)$

Focos: $F(30,1)$, $F'(-20,1)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e = 25/7$

Orientación: Horizontal

7) $64x^2 - 225y^2 + 640x - 1800y - 16400 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x+5)^2}{225} - \dfrac{(y+4)^2}{64} = 1$

Centro: $C(-5,-4)$

Vértices: $V(10,-4)$, $V'(-20,-4)$

Focos: $F(12,-4)$, $F'(-22,-4)$

Long. eje transverso: 30

Long. eje conjugado: 16

Excentricidad: $e = 17/15$

Orientación: Horizontal

8) $256x^2 - 144y^2 - 1024x - 288y - 35984 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{144} - \dfrac{(y+1)^2}{256} = 1$

Centro: $C(2,-1)$

Vértices: $V(14,-1)$, $V'(-10,-1)$

Focos: $F(22,-1)$, $F'(-18,-1)$

Long. eje transverso: 24

Long. eje conjugado: 32

Excentricidad: $e = 20/12$

Orientación: Horizontal

9) $576\,x^2 - 49\,y^2 + 5760\,x + 196\,y - 14020 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x+5)^2}{49} - \dfrac{(y-2)^2}{576} = 1$

Centro: $C(-5,2)$

Vértices: $V(2,2)$, $V'(-12,2)$

Focos: $F(20,2)$, $F'(-30,2)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e = 25/7$

Orientación: Horizontal

10) $1600\,x^2 - 81\,y^2 + 16000\,x + 486\,y - 90329 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x+5)^2}{81} - \dfrac{(y-3)^2}{1600} = 1$

Centro: $C(-5,3)$

Vértices: $V(4,3)$, $V'(-14,3)$

Focos: $F(36,3)$, $F'(-46,3)$

Long. eje transverso: 18

Long. eje conjugado: 80

Excentricidad: $e = 41/9$

Orientación: Horizontal

11) $-16\,x^2 + 9\,y^2 - 128\,x - 90\,y - 175 = 0$

Ecuación: $-\dfrac{(x+4)^2}{9} + \dfrac{(y-5)^2}{16} = 1$

Centro: $C(-4,5)$

Vértices: $V(-4,8)$, $V'(-4,2)$

Focos: $F(-4,10)$, $F'(-4,0)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

12) $-16\,x^2 + 9\,y^2 - 64\,x - 54\,y - 127 = 0$

Ecuación: $-\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

Centro: $C(-2,3)$

Vértices: $V(-2,6)$, $V'(-2,0)$

Focos: $F(-2,8)$, $F'(-2,-2)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e=5/3$

13) $144\,x^2-25\,y^2-576\,x-100\,y-3124=0$

Ecuación: $\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y+2)^2}{144}=1$

Centro: $C(2,-2)$

Vértices: $V(7,-2)$, $V'(-3,-2)$

Focos: $F(15,-2)$, $F'(-11,-2)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e=13/5$

Orientación: Horizontal

14) $36\,x^2-64\,y^2+360\,x+256\,y-1660=0$

Ecuación: $\frac{(x+5)^2}{64}-\frac{(y-2)^2}{36}=1$

Centro: $C(-5,2)$

Vértices: $V(3,2)$, $V'(-13,2)$

Focos: $F(5,2)$, $F'(-15,2)$

Long. eje transverso: 16

Long. eje conjugado: 12

Excentricidad: $e=10/8$

Orientación: Horizontal

15) $144\,x^2-25\,y^2-576\,x-50\,y-3049=0$

Ecuación: $\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y+1)^2}{144}=1$

Centro: $C(2,-1)$

Vértices: $V(7,-1)$, $V'(-3,-1)$

Focos: $F(15,-1)$, $F'(-11,-1)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e=13/5$

Orientación: Horizontal

16) $-576\,x^2+49\,y^2-5760\,x-490\,y-41399=0$

Ecuación: $-\frac{(x+5)^2}{49}+\frac{(y-5)^2}{576}=1$

Centro: $C(-5,5)$

Vértices: $V(-5,12)$, $V'(-5,-2)$

Focos: $F(-5,30)$, $F'(-5,-20)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e=25/7$

17) $-64\,x^2+225\,y^2+128\,x+2250\,y-8839=0$

Ecuación: $-\frac{(x-1)^2}{225}+\frac{(y+5)^2}{64}=1$

Centro: $C(1,-5)$

Vértices: $V(1,10)$, $V'(1,-20)$

Focos: $F(1,12)$, $F'(1,-22)$

Long. eje transverso: 30

Long. eje conjugado: 16

Excentricidad: $e=17/15$

18) $-256\,x^2+144\,y^2-512\,x-1152\,y-34816=0$

Ecuación: $-\frac{(x+1)^2}{144}+\frac{(y-4)^2}{256}=1$

Centro: $C(-1,4)$

Vértices: $V(-1,16)$, $V'(-1,-8)$

Focos: $F(-1,24)$, $F'(-1,-16)$

Long. eje transverso: 24

Long. eje conjugado: 32

Excentricidad: $e=20/12$

19) $576\,x^2-49\,y^2+3456\,x+490\,y-24265=0$

Ecuación: $\frac{(x+3)^2}{49}-\frac{(y-5)^2}{576}=1$

Centro: $C(-3,5)$

Vértices: $V(4,5)$, $V'(-10,5)$

Focos: $F(22,5)$, $F'(-28,5)$

Long. eje transverso: 14

Long. eje conjugado: 48

Excentricidad: $e=25/7$

Orientación: Horizontal

20) $1600\,x^2-81\,y^2-9600\,x+162\,y-115281=0$

Ecuación: $\frac{(x-3)^2}{81}-\frac{(y-1)^2}{1600}=1$

Centro: $C(3,1)$

Vértices: $V(12,1)$, $V'(-6,1)$

Focos: $F(44,1)$, $F'(-38,1)$

Long. eje transverso: 18

Long. eje conjugado: 80

Excentricidad: $e = 41/9$

Orientación: Horizontal

21) $16\,x^2 - 9\,y^2 - 64\,x - 18\,y - 89 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$

Centro: $C(2,-1)$

Vértices: $V(5,-1)$, $V'(-1,-1)$

Focos: $F(7,-1)$, $F'(-3,-1)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Horizontal

22) $16\,x^2 - 9\,y^2 + 64\,x + 36\,y - 116 = 0$

Ecuación: $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

Centro: $C(-2,2)$

Vértices: $V(1,2)$, $V'(-5,2)$

Focos: $F(3,2)$, $F'(-7,2)$

Long. eje transverso: 6

Long. eje conjugado: 8

Excentricidad: $e = 5/3$

Orientación: Horizontal

23) $-144\,x^2 + 25\,y^2 + 864\,x + 250\,y - 4271 = 0$

Ecuación: $-\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y+5)^2}{144} = 1$

Centro: $C(3,-5)$

Vértices: $V(3,0)$, $V'(3,-10)$

Focos: $F(3,8)$, $F'(3,-18)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e = 13/5$

24) $-36\,x^2 + 64\,y^2 - 144\,x - 128\,y - 2384 = 0$

Ecuación: $-\dfrac{(x+2)^2}{64} + \dfrac{(y-1)^2}{36} = 1$

Centro: $C(-2,1)$

Vértices: $V(-2,9)$, $V'(-2,-7)$

Focos: $F(-2,11)$, $F'(-2,-9)$

Long. eje transverso: 16

Long. eje conjugado: 12

Excentricidad: $e=10/8$

25) $-144\,x^2+25\,y^2+576\,x-50\,y-4151=0$

Ecuación: $-\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{144}=1$

Centro: $C(2,1)$

Vértices: $V(2,6)$, $V'(2,-4)$

Focos: $F(2,14)$, $F'(2,-12)$

Long. eje transverso: 10

Long. eje conjugado: 24

Excentricidad: $e=13/5$

Formulario Unidad Catorce

Ec. Hipérbola F. ordinaria: Horizontal con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ec. Hipérbola F. ordinaria: Vertical con centro en el origen:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ec. Hipérbola F. ordinaria: Horizontal con centro en el punto $C(h,k)$:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ec. Hipérbola F. ordinaria: Vertical con centro en el punto $C(h,k)$:

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Otras fórmulas: Hipérbola con centro en el punto $C(h,k)$:

- ✓ Longitud del eje transverso: $2\,a$.
- ✓ Longitud del eje conjugado: $2\,b$.
- ✓ Distancia entre los focos: $2\,c$.
- ✓ Relación entre a, b y c: $a^2 = c^2 - b^2$.
- ✓ Excentricidad: $e = c/a > 1$.

Hipérbola	**Vertical**	**Horizontal**
Lado Recto	$2\,b^2/a$	$2\,b^2/a$
Focos	$F(h, k \pm c)$	$F(h \pm c, k)$
Vértices	$V(h, k \pm a)$	$F(h \pm a, k)$
Ec. General	$A x^2 + B y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$	
A	b^2	$-b^2$
B	$-a^2$	a^2
D	$-2\,b^2 h$	$2\,b^2 h$
E	$2\,a^2 k$	$-2\,a^2 k$
F	$b^2 h^2 - a^2 k^2 - a^2 b^2$	$-b^2 h^2 + a^2 k^2 - a^2 b^2$

Parte IV

Funciones

Capítulo 15

Relaciones y funciones

Por aprender...

Por qué es importante...

Las funciones son los objetos matemáticos que sirven para describir cómo se relacionan dos cantidades. Por ejemplo, el área del cuadrado es una función de la longitud de su lado.

15.1 Relaciones y funciones

En matemáticas, una relación es un conjunto de pares ordenados. Como si se tratara de coordenadas de puntos, un conjunto de pares ordenados, forma una relación.

RELACIÓN
Es un conjunto no vacío de pares ordenados de valores. **Definición 1**

Por ejemplo, el siguiente conjunto es una relación:

$$\{(1,2),(2,3),(1,5),(7,-1),(2,-1)\}$$

En cierta manera podemos imaginar a una relación como una forma de indicar cómo se relacionan dos variables.

Por ejemplo, en una lista de asistencia, la relación consistiría en asignar un número de la lista a cada persona que se encuentra en esa lista.

No.	**Nombre**
1	Avendaño Apolinar Aarón
2	Arcadio Domínguez Joas L.
3	Bravo Cruz Julio César.
4	Chamlati Guillén Geordi.
5	Chargoy Rosas Claudia I.
6	González Flores Grabriel.
7	Flores Sobrevilla David.
8	Motilla Zapata Guillermo.
9	Sobrevilla Santos Isaac.
10	Sobrevilla Teniente Gabriela B.

El concepto central de todo este semestre es el concepto de función.

FUNCIÓN
Es una relación entre dos conjuntos, llamados dominio y contradominio, de tal manera que a cada elemento del dominio le corresponda a lo más, un elemento del contradominio. **Definición 2**

Puedes imaginar a una función como una máquina que transforma números. Nosotros le damos un número y esta máquina nos devuelve otro número (único).

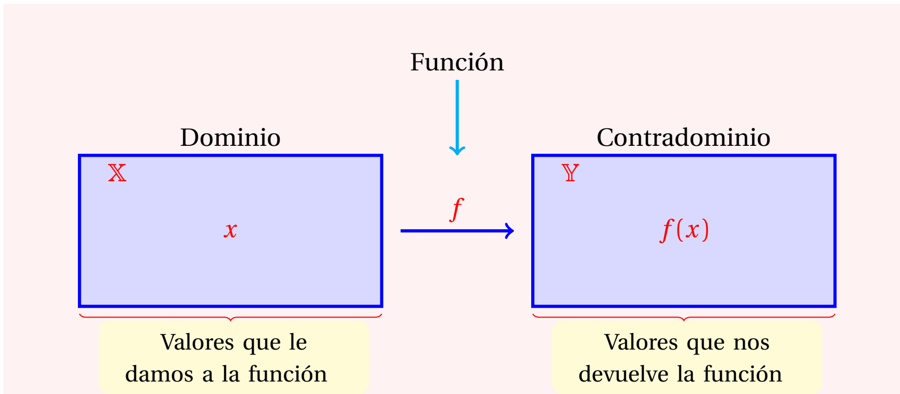
No es posible que al darle un valor la función nos devuelva dos o más valores, pero sí es posible que nosotros le demos un valor y la función no nos pueda devolver valor alguno.

En este último caso decimos que el valor que le dimos a la función no pertenece al dominio de la función, precisamente porque no lo puede transformar.

NOTACIÓN FUNCIONAL
Cuando se refiere a una función f, $\mathbb{X}$ se refiere al dominio de la función, $\mathbb{Y}$ se refiere al contradominio, $x \in \mathbb{X}$ es un elemento del dominio, y $f(x)$ es el valor del contradominio que le corresponde al valor x del dominio de la función. **Definición 3**

Utilizando la analogía de la máquina que transforma números, f es el nombre que le damos a esa máquina, es decir, es la función, x es el número que nosotros le damos a la máquina, el conjunto de todos los valores que esta máquina puede transformar se denota por $\mathbb{X}$ $(x \in \mathbb{X})$, $f(x)$ es el valor que la máquina nos devuelve cuando le damos x y $\mathbb{Y}$ es el conjunto de todos los valores que la máquina nos devuelve ($f(x) \in \mathbb{Y}$).

El siguiente diagrama puede ayudarte a entender mejor el concepto de función:



Ejemplo 6 Las siguientes expresiones son funciones.

- $f(x) = x$,
- $f(x) = 2x + 1$,
- $f(x) = x^2 - x + 1$,
- $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 7}$,
- $f(x) = \sqrt{2x + 1}$,
- $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$,
- $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$,
- $f(x) = e^{-x}$,
- $f(x) = x \cdot e^x + \ln(x)$.

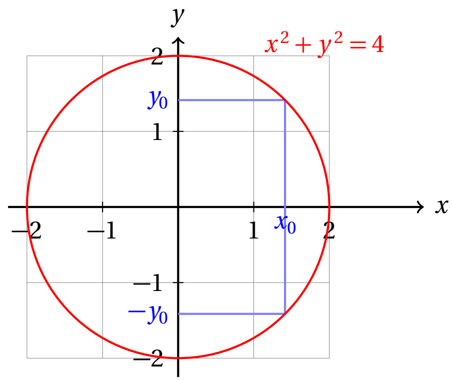
Para identificar una función debemos verificar que se cumple la condición que dice: «*para cada valor del dominio le corresponde a lo más un valor del contradominio.*»

Si **no** se cumple esta condición, entonces se trata de una relación que no es una función.

Veremos una forma sencilla de verificarlo en el siguiente ejemplo.

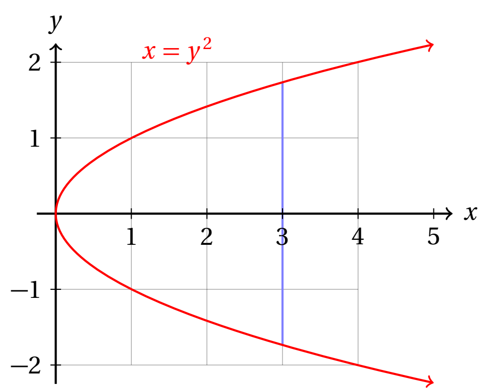
Ejemplo 7 Las siguientes son relaciones que no son funciones.

- $x^2 + y^2 = 4$, porque cuando graficamos esta relación, obtenemos una circunferencia. Si x es elemento del dominio, y y es elemento del contradominio, no se cumple que para todo elemento del dominio haya a lo más un elemento del contradominio.



En este caso, para un valor que le damos x_0 la relación nos devuelve dos: y_0 y $-y_0$.

- $y^2 = x$, porque cuando graficamos obtenemos una parábola horizontal:



Ahora, para $x = 3$, obtenemos dos valores, $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$.

Para diferenciar una función de una relación que no es función frecuentemente utilizamos el criterio de la línea vertical.

> CRITERIO DE LA LÍNEA VERTICAL
> *Si al dibujar una recta vertical sobre la gráfica de una función ésta puede ser cortada en dos puntos, entonces la relación no es una función.*
>
> **Definición 4**

En el ejemplo anterior, al dibujar una recta vertical es posible cortar la función con la recta en dos de sus puntos. Esto nos indica que la gráfica corresponde a una relación que **no** es una función. Porque si fuera una función, para cada valor de x debería existir a lo más un solo valor de y, pero en cada caso hay dos valores, por lo que ya no se puede tratar deuna función.

Nota: No todas las relaciones son funciones, pero por definición, todas las funciones son relaciones.

Entonces, cuando desees verificar sin una relación es o no una función, la graficaremos y le aplicaremos el criterio de la recta vertical.

Las funciones se aplican muy frecuentemente.

Por ejemplo, cuando vas a enviar un paquete a través del correo postal, el importe del envío depende del peso del paquete. En términos matemáticos decimos que el importe está en función del peso del paquete. Si I es el importe que debemos pagar por un paquete de peso p, entonces, $I = f(p)$.

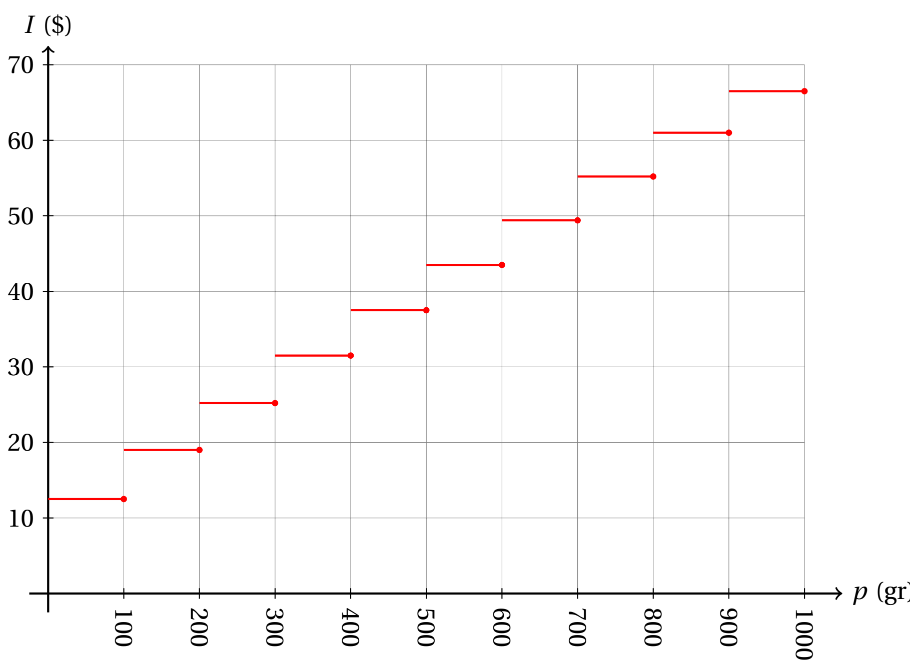
Ejemplo 8

En el correo postal un paquete enviado a nivel nacional con un peso de p gramos cuesta I pesos, de acuerdo a la siguiente tabla:

Peso (gr)	**Importe** ($)	**Peso** (gr)	**Importe** ($)
$0 < p \leq 100$	12.50	$500 < p \leq 600$	43.50
$100 < p \leq 200$	19.00	$600 < p \leq 700$	49.35
$200 < p \leq 300$	25.25	$700 < p \leq 800$	55.20
$300 < p \leq 400$	31.50	$800 < p \leq 900$	61.00
$400 < p \leq 500$	37.50	$900 < p \leq 1000$	66.50

¿Representa esta relación entre las variables una función?

- Para verificar si se trata de una función debemos verificar que satisface la definición.
- Si a cada elemento del dominio (peso) le corresponde a lo más un elemento del contradominio (importe), entonces sí se trata de una función.
- Ahora podemos convertir la pregunta a: «*¿Existe un peso para el cual se asignen dos importes?*»
- Como para cada peso del paquete se le asigna un único importe, entonces sí se trata de una función.
- Ahora vamos a aplicar la regla de la recta vertical.
- Para eso, primero debemos graficar la función:



- ¿Puedes dibujar una recta vertical que corte en dos puntos a la gráfica de la función?
- Pues no, porque se trata de una función.
- Observa que la gráfica no está definida para $p = 0$, porque si no vas a enviar un paquete, no hay necesidad de calcular el importe.

La función que graficamos se conoce como una función definida por intervalos, porque los valores que va tomando la función están definidos por distintas expresiones. Dependiendo del valor del dominio que le demos será la expresión que utilizará para calcular el valor que nos va a devolver.

Otro ejemplo de función definida por intervalos es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cuando los valores de x que le damos son negativos, es decir, si $x < 0$, entonces utilizamos $2x - 1$ para calcular el valor que la función nos devolverá. Pero si $x \geq 0$, entonces usamos $3x + 1$.

Si graficas estas dos ramas de la función, obtienes la gráfica que está definida por intervalos como se indicó.

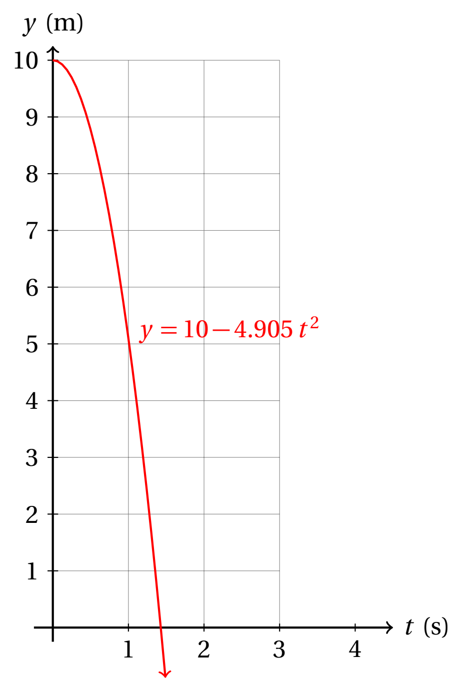
Ejemplo 9

Cuando se deja caer una piedra desde 10 metros de altura, la distancia y desde el suelo a la piedra, t segundos después de haberse soltado puede calcularse con la ecuación:

$$y = 10 - 4.05\,t^2$$

Verifica si esta ecuación es una función.

- Lo más sencillo en este caso es graficar la ecuación que nos dieron y verficar si se trata de una función aplicando la regla de la recta vertical.



- Como no es posible cortar la gráfica con una recta vertical en dos de sus puntos, se trata de una función.

A lo largo del curso seguirás viendo más aplicaciones de las funciones en problemas cotidianos, técnicos y matemáticos.

Ejemplo 10 Los taxis cobran \$7.40 pesos por solicitar en servicio y \$4.40 pesos por kilómetro recorrido. Encuentra la función que transforma los kilómetros recorridos (x) en el importe que debemos pagar al taxista (y).

- Si recorremos cero kilómetros debemos pagar solamente el importe por solicitar el servicio.
- Si recorremos un kilómetro debemos pagar, además \$4.40, esto hace un total de \$7.40 + \$4.40 = \$11.80 pesos.
- Si recorremos dos kilómetros debemos pagar: \$7.40 + 2×\$4.40 = \$16.20 pesos.
- En general, si recorremos x kilómetros, debemos pagar:

$$y = 7.40 + 4.40\,x$$

- Esta es la función que nos pidieron encontrar.
- Por ejemplo, si deseamos conocer cuánto debemos pagar si recorremos 25 kilómetros en el taxi, basta evaluar la función en $x = 25$:

$$y = 7.40 + 4.40(25) = 117.40 \text{ pesos.}$$

- Esta expresión es una función porque a cada valor de x (elemento de su dominio) le asigna a lo más un valor y (elemento de su contradominio).s
- Se te queda como ejercicio graficar esta función.

La evaluación de una función en un punto nos ayuda a conocer el valor de la función en ese punto. En el ejemplo anterior pudimos calcular el importe gracias a este procedimiento. Por eso es muy importante.

Para evaluar la función, simplemente sustituye el valor de x donde quieres evaluarla y realiza todos los cálculos que quedan indicados por la función. El resultado que obtengas es el valor que toma la función en ese punto.

Por ejemplo, la función $f(x) = 3^x$ evaluada en $x = 2$ es $3^2 = 9$. Observa que solamente basta sustituir 3 en lugar de x. Realizamos los cálculos y el resultado obtenido es el valor que tiene la función en ese punto.

Ejemplo 11 Dados $f(x) = 2^x - x^2$, $x_0 = 5$, y $c = 1$, calcula:

a. $f(x_0)$

b. $f(x_0 + c)$

c. $f(x_0) + c$

d. $c \cdot f(x_0)$

e. $f(c \cdot x_0)$

f. $f(x_0 - c)$

g. $f(x_0) - c$

- Sabemos que $x_0 = 5$ y que $c = 1$.
- Primero calculamos $f(x_0)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x - x^2 \\ f(x_0) &= 2^{x_0} - x_0^2 \\ f(5) &= 2^5 - 5^2 \\ &= 32 - 25 = 7 \end{aligned}$$

- Para calcular $f(x_0+c)$, antes de sustituir x_0 debemos sumarle c, porque la expresión dice: «*el valor de f evaluada en el punto x_0+c*».
- Pero $x_0+c=5+1=6$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(x_0+c) &= 2^{x_0+c}-(x_0+c)^2 \\ f(6) &= 2^6-6^2 \\ &= 64-36=28 \end{aligned}$$

- $f(x_0)+c$ lo único que nos pide es que sumemos c al valor que obtuvimos de $f(x_0)$, esto es:

$$f(x_0)+c=7+1=8$$

- De manera semejante, $c\cdot f(x_0)$ nos pide que multipliquemos el valor de $f(x_0)$ por c:

$$c\cdot f(x_0)=(1)\cdot(7)+1=7$$

- $f(c\cdot x_0)$ nos indica que multipliquemos los números c y x_0 y el resultado lo sustituyamos en f:
- Pero $f(c\cdot x_0)=f(1\cdot x_0)=f(x_0)$, porque $c=1$.
- Entonces, $f(c\cdot x_0)=f(1\cdot 5)=f(5)=7$.
- Ahora calcularemos $f(x_0-c)$.
- Primero calculamos $x_0-c=5-1=4$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(x_0-c) &= 2^{x_0-c}-(x_0-c)^2 \\ f(4) &= 2^4-4^2 \\ &= 14-16=0 \end{aligned}$$

- Finalmente, $f(x_0)-c$ nos pide que restemos c unidades al valor $f(x_0)$.

$$f(x_0)-c=f(5)-1=7-1=6$$

Dado que las funciones nos devuelven números después de transformarlos, realizar una operación (suma, resta, etc.) a un par de funciones se puede realizar siempre que éstas estén definidas.

Por ejemplo si f y g son dos funciones definidas en un intervalo, entonces, podemos calcular $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ en cualquier caso y $f(x)\div g(x)$ siempre que $g(x)\neq 0$.

Otra operación importante sobre funciones es la composición que se estudia en la sección 15.2.3, página 651

Determina si las siguientes relaciones son o no son funciones. **Ejercicios 15.1**

1) $f(x)=x+1$ Si

2) $f(x)=x$ Si

3) $f(x)=\sqrt{x+1}$ Si

4) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ Si

5) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ Si

6) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}$ Si

7) $f(x)=\dfrac{x}{2-x}+\sqrt{x}$ Si

8) $f(x)=x^2-1$ Si

9) $f(x)=1-x+x^2$ Si

10) $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ \dfrac{x}{2}+1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ No

11) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\leq 10 \\ x^2-1 & \text{si } x>10 \end{cases}$ Si

12) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2-1} & \text{si } x<k \\ \sqrt{x}-\dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x>k \end{cases}$ Si

Instrucciones En cada uno de los siguientes ejercicios calcula los valores solicitados a partir de f, x_0 y c.

13) $f(x)=x^2-1$, $x_0=4$, $c=1$.

- ✓ $f(x_0)$ 15
- ✓ $f(x_0)+c$ 16
- ✓ $f(x_0+c)$ 24
- ✓ $f(c)$ 0

14) $f(x)=x^2+2x-1$, $x_0=-1$, $c=3$.

- ✓ $f(x_0)$ –2
- ✓ $f(-x_0)$ 2
- ✓ $c\cdot f(x_0)$ –6
- ✓ $-f(x_0)$ 2
- ✓ $f(c\cdot x_0)$ 2
- ✓ $f(x_0-c)$ 7

15) $f(x)=(x-1)(x+1)$, $x_0=12$, $c=2$.

- ✓ $f(x_0)$ 143
- ✓ $f(x_0-c)$ 99
- ✓ $f(-x_0)$ 143
- ✓ $f(x_0)-c$ 141
- ✓ $-f(x_0)$ –143
- ✓ $-c\cdot f(x_0)$ –286

16) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $x_0=5$, $c=-1$.

- ✓ $f(x_0+c)$ $15/17\approx 0.8823529$
- ✓ $f(x_0)-c$ $25/13\approx 1.9230769$
- ✓ $f(x_0)+c$ $-1/13\approx -0.076923$
- ✓ $c\cdot f(x_0)$ $-12/13\approx -0.923$
- ✓ $f(x_0-c)$ $35/37\approx 0.9459459$
- ✓ $f(c\cdot x_0)$ $12/13\approx 0.9230769$

17) $f(x)=2^x$, $x_0=5$, $c=1$.

✓ $f(x_0)$ 32
✓ $f(-x_0)$ 1/32
✓ $-f(x_0)$ −32
✓ $f(x_0 - c)$ 16
✓ $f(x_0) - c$ 31
✓ $\dfrac{f(x_0 + c) - f(x_0)}{c}$ 32

18) $f(x) = x^x$, $x_0 = 3$, $c = 1$.

✓ $f(x_0)$ 27
✓ $f(-x_0)$ 1/27
✓ $-f(x_0)$ −27
✓ $f(x_0 - c)$ 4
✓ $f(x_0) - c$ 26
✓ $\dfrac{f(x_0 + c) - f(x_0)}{c}$ 229

19) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $x_0 = 3$, $c = 1$.

✓ $f(x_0)$ 4
✓ $f(-x_0)$ 4
✓ $-f(x_0)$ −4
✓ $f(x_0 - c)$ 3
✓ $f(x_0) - c$ 3
✓ $\dfrac{f(x_0 + c) - f(x_0)}{c}$ −1

20) $f(x) = (x - 1)^3$, $x_0 = 5$, $c = 1$.

✓ $f(x_0)$ 64
✓ $f(-x_0)$ −216
✓ $-f(x_0)$ −64
✓ $f(x_0 - c)$ 27
✓ $f(x_0) - c$ 63
✓ $\dfrac{f(x_0 + c) - f(x_0)}{c}$ 61

15.2 Clasificación y transformación de funciones

En esta sección vamos a conocer la forma en como se han clasificado las funciones para su estudio.

También vamos a conocer ciertas funciones que «*hacen la transformación inversa*» que realiza una función dada, conocidas como funciones inversas y finalmente vamos a aprender a graficar funciones sin necesidad de tabular.

15.2.1 Tipos de funciones

En matemáticas hay varias formas de clasificar las funciones.

Definición 1

Función Algebraica

Las funciones algebraicas son las funciones que pueden obtenerse a partir de operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, raíz) entre polinomios.

Ejemplo 1

Las siguientes funciones son algebraicas.

- $f(x) = x + 4$
- $f(x) = x^2 - 1$
- $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
- $f(x) = 5x^{12} - 12x^5$
- $f(x) = \sqrt{2}\,x^5 + \sqrt[3]{5}\,x^3 + 1$
- $f(x) = \dfrac{17x + 19}{3x - 5}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{6}}$
- $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$
- $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 11}{2x^3 - 3x^2 + 5x - 7}$
- $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x - 1}$
- $f(x) = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Definición 2

Función Trascendente

Las funciones trascendentes son las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y las trigonométricas inversas.

Ejemplo 2

Las siguientes funciones son trascendentes.

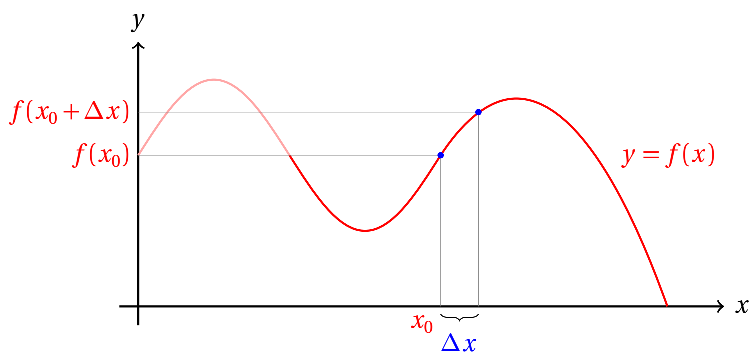
- $f(x) = \log x + 2$
- $f(x) = \ln(x - e)$
- $f(x) = 2\ln\left(x^2 + 1\right)$
- $f(x) = \log\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)$
- $f(x) = e^{1-x}$
- $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$
- $f(x) = \sin x$
- $f(x) = \cos(x - \pi)$
- $f(x) = \tan\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$
- $f(x) = \sec x + \tan x$
- $f(x) = \csc(2x) + \cot(3x)$
- $f(x) = \arctan x - \arcsin x$

Definición 3

FUNCIÓN CONTÍNUA (DEFINICIÓN INFORMAL)
Una función es contínua si su gráfica tiene solamente una rama. En otras palabras, si su gráfica consta de una sola línea ininterrumpida.

La definición formal de función contínua indica que si al dar un valor x_0 a la función $y = f(x)$, y damos un incremento muy al valor de Δx, el valor de $f(x)$ también debe cambiar, pero ese cambio debe ser más pequeño conforme damos incrementos más pequeños a x_0, es decir, si hacemos que Δx se haga casi cero, el valor de $f(x_0 + \Delta x)$ debe estar muy cerca del valor de $f(x_0)$.

La siguiente gráfica ilustra esta situación.



Conforme hacemos Δx más pequeño, el valor de $f(x_0 + \Delta x)$ se acerca más al valor de $f(x_0)$. Por eso concluimos que la función es contínua.

Si esta condición se cumple solamente para algún intervalo, decimos que la función es contínua en él, pero posiblemente presente discontiuidades fuera de ese intervalo.

Definición 4

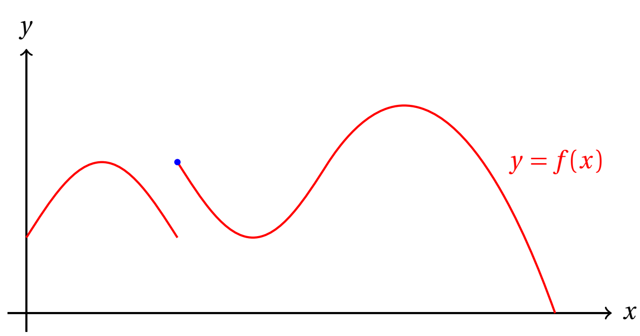
FUNCIÓN DISCONTÍNUA
Una función es discontínua si no es contínua. Geométricamente una función discontínua presenta al menos un «salto» en su gráfica.

En la sección anterior (página 628) se menciona la forma como se cobra el envío a través de una oficina postal. La gráfica de esta función es discontínua. Esto es evidente de la gráfica misma.

Observa que $I(700) = 49.35$. Si damos incrementos a 700 cada vez más pequeños, siempre vamos a obtener 55.20, independientemente de lo pequeño que sea el incremento.

Esto nos indica que la gráfica de la función dio un salto, lo cual es característico de esta función.

Otro ejemplo de la gráfica de una función discontínua es el siguiente:



En cualquier caso, la gráfica consta de varias ramas, es decir, segmentos de líneas que forman la gráfica de la función.

Precisamente por esa razón estas funciones se llaman «*discontínuas*», porque no es posible dibujar su gráfica con una sola línea contínua.

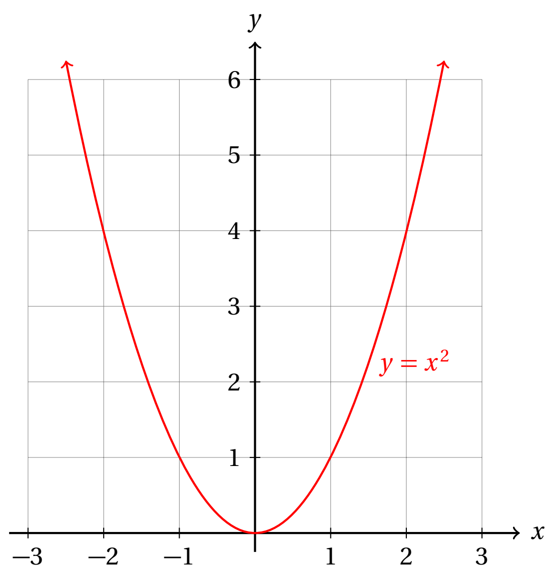
Definición 5

FUNCIÓN CRECIENTE

Una función es creciente en un intervalo I si para cualesquiera $x_1, x_2 \in I$, se cumple que si $x_2 > x_1$, entonces $f(x_2) > f(x_1)$.

Geométricamente esto indica que conforme nos movemos a la derecha de la gráfica en un intervalo que es creciente, la gráfica va hacia arriba.

La siguiente gráfica muestra un caso:



En la gráfica de esta parábola, a partir del origen, la función empieza a crecer.

Definición 6

FUNCIÓN DECRECIENTE

Una función es creciente en un intervalo I si para cualesquiera $x_1, x_2 \in I$, se cumple que si $x_2 > x_1$, entonces $f(x_2) < f(x_1)$.

Este es el caso contrario al anterior. Si la gráfica de la función va hacia abajo cuando nos movemos a la derecha en un intervalo, entonces la función es decreciente en ese intervalo.

Inmediatamente observamos que la función $y = x^2$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

También hemos mencionado que esa misma función es creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

Definición 7

UNO A UNO

Una función se dice que es «uno a uno» cuando a elementos distintos de su dominio le corresponden diferentes elementos de su contradominio. Es decir, si $a = b$, entonces, $f(a) = f(b)$ y si $a \neq b$, entonces $f(a) \neq f(b)$.

Por ejemplo, la función $y = 7x + 1$ es una función uno a uno, porque a distintos valores de x le corresponden distintos valores de y.

Demostrar lo anterior es muy sencillo:

$$\begin{array}{rcrcl} f(a)=f(b) & \Rightarrow & 7a+1 & = & 7b+1 \\ & & 7a & = & 7b \quad \Rightarrow \quad a=b \end{array}$$

La función $y = x^2$ **no** es uno a uno, porque si $x = 2$ la función asigna $y = 4$, pero también asigna el mismo valor a y cuando $x = -2$.

A las funciones uno a uno también se les conoce como funciones *inyectivas*.

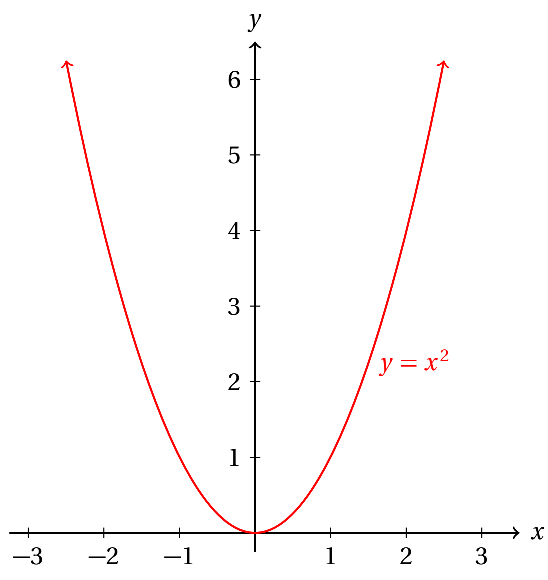
Si una función es inyectiva, entonces, es posible asociar los elementos de su dominio $\mathbb{X}$ con los elementos de su contradominio $\mathbb{Y}$ de tal manera que a cada elemento del dominio le corresponda exactamente un elemento de su contradominio y viceversa, a cada elemento de su contradominio le corresponda exactamente un elemento de su dominio.

Entonces, otra forma de definir a las funciones inyectivas es decir que «*nunca toman el mismo valor dos veces*», es decir, una vez que la función ha asignado un valor de y_0 a su correspondiente x_0, jamás lo volverá a asignar a algún otro valor de x que le demos. Esto es,

$$\text{Si } a \neq b, \text{ entonces } f(a) \neq f(b)$$

Para verificar si una función es *uno a uno*, basta trazar una recta horizontal y ver si corta a la gráfica de la función en dos de sus puntos. Si es así, entonces **no** es una función *uno a uno*, porque asigna el mismo valor de y a diferentes valores de x.

En la gráfica ahora puedes justificar por qué **no** es *uno a uno*.



Definición 8 FUNCIÓN SOBRE

Una función se dice que es «sobre» cuando a cada elemento de su contradominio le corresponde a lo menos un elemento de su dominio.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es *sobre*.Piensa un número. Siempre puedes encontrar un número x tal que al elevarlo al cubo obtengas el número que pensaste, no importa cuál sea[1].

A las funciones *sobre* también se les conoce como funciones «*sobreyectivas*».

[1] Ese número es igual a la raíz cúbica del número que pensaste.

Indica a qué tipo de función corresponde cada una de las siguientes. Una sola función puede ser, por ejemplo, trascendente, contínua, creciente, etc. En caso de ser posible, indica además el dominio y el contradominio de la función.

Ejercicios 15.2.1

1) $f(x) = 1 - x$ Algebraica/Contínua/Decreciente
2) $f(x) = \sin(2\pi x)$ Trigonométrica/Trascendente/Contínua
3) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ Algebraica/Discontinua
4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ Algebraica/Discontinua/Creciente
5) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ Algebraica/Discontinua
6) $f(x) = \arctan(x) - 1$ Trigonométrica/Trascendente/Continua
7) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^3+x^2+x+1}$ Algebraica/Contínua
8) $f(x) = \dfrac{x}{3} - 1$ Algebraica/Creciente/Contínua
9) $f(x) = -x^2 + x + 1$ Algebraica/Contínua
10) $f(x) = \dfrac{\tan x}{1 - \sin x}$ Trascendente/Discontínua
11) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ Trascendental/Contínua
12) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$ Algebraica/Discontinua
13) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ Trascendental/Contínua
14) $f(x) = \sin x + \cos x$ Trascendental/Trigonométrica
15) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} + \dfrac{x+1}{x-1}$ Algebraica/Discontínua
16) $f(x) = 1 + e^x$ Trascendente/Contínua/Creciente
17) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ Algebraica/Continua/Creciente
18) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ Algebraica/Discontinua/Decreciente
19) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ Algebraica/Discontinua/Decreciente
20) $f(x) = e^{-x}$ Trascendente/Contínua/Decreciente

En cada uno de los siguientes ejercicios dibuja la grafica la función en el intervalo $(-10, 10)$ para su dominio e indica si es uno a uno, sobre, biyectiva o ninguno de los casos anteriores. Recuerda que si dices que es *biyectiva*, estás diciendo que es *uno a uno* y *sobre*. **Sugerencia:** Utiliza la calculadora científica para realizar los cálculos para las funciones trascendentales.

Instrucciones

21) $f(x) = -2x$ Biyectiva

22) $f(x) = \sqrt{x}$ Uno a uno

23) $f(x) = x^2$ Ninguno de los casos

24) $f(x) = x^5$ Biyectiva

25) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ Biyectiva

26) $f(x) = e^x$ Uno a uno

27) $f(x) = 7$ Ninguno de los casos

28) $f(x) = x^3 + x$ Sobre

29) $f(x) = \dfrac{1}{x} + x$ Ninguno de los casos

30) $f(x) = e^{x^2}$ Ninguno de los casos

31) $f(x) = 1 - 2x$ Biyectiva

32) $f(x) = x^3 - x^2 + x$ Sobre

33) $f(x) = \cos(\pi)$ Ninguno de los casos

34) $f(x) = \ln x$ Uno a uno

35) $f(x) = \dfrac{1}{5} \cdot x(x-5)(x+5)$ Sobre

36) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ Ninguno de los casos

37) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ Sobre

38) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ Ninguno de los casos

39) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ Sobre

40) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ Biyectiva

15.2.2 Función Inversa

Una función es una relación entre dos variables, de manera que para cada valor de la variable independiente existe a lo más un único valor asignado a la variable independiente por la función.

Imagina que tienes la función $y = f(x)$. Tú le das un valor (x) y ella te devuelve otro $(f(x))$.

Una buena idea sería encontrar una función que cuando le demos el valor $f(x)$ nos devolviera x, es decir, una máquina que haga la transformación inversa de $f(x)$.

En otras palabras, queremos encontrar una función que deshace la transformación que ocasiona la función f sobre los números que le damos.

FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función con dominio $\mathbb{X}_f$ y contradominio $\mathbb{Y}_f$. Si existe una función g con dominio $\mathbb{X}_g$ y contradominio $\mathbb{Y}_g$ tal que:

i. $f(g(x)) = x$ *para toda* $x \in \mathbb{X}_g$

ii. $g(f(x)) = x$ *para toda* $x \in \mathbb{X}_f$

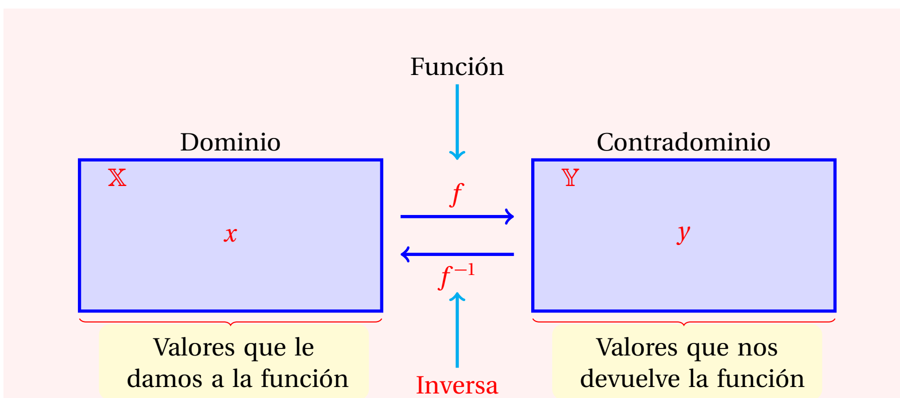
entonces decimos que las funciones f y g son inversas una de la otra.
f^{-1} denota la función inversa de f.

Definición 1

En otras palabras, si intercambiamos las coordenadas de los pares formados por $(x, f(x))$ obtenemos $(f(x), x)$, que no son sino los puntos de la función inversa f^{-1}. Es decir, el dominio de f es el contradominio de f^{-1} y el contradominio de f es el dominio de f^{-1}.

Importante[2]: $f^{-1}(x)$ *no* significa $\dfrac{1}{f(x)}$.

Utilizando el diagrama de función, podemos explicar el nuevo concepto:



No todas las funciones tienen función inversa. Esto se debe a la definición de función.

Para que una relación sea considerada función, para cada elemento del dominio le debe corresponder a lo más un elemento del contradominio.

Si una función debe tener función inversa, a cada elemento del contradominio le debe corresponder a lo más un elemento del dominio (por definición de función inversa).

En otras palabras, para cada elemento del dominio de f le corresponde un elemento de su contradominio y viceversa.

Esto implica que para dos valores a, b distintos, entonces $f(a) \neq f(b)$. En otras palabras solamente para las funciones «*uno a uno*» podemos calcular su función inversa.

Ya se había mencionado en la sección anterior que si la función f es uno a uno (inyectiva), entonces cumple con:

$$\text{Si } a \neq b, \text{ entonces } f(a) \neq f(b)$$

y además, si g es la inversa de f, entonces, $g(f(a)) = a$ y $g(f(b)) = b$, por lo que si $f(a) = f(b)$, se sigue que $a = b$.

Lo anterior nos indica que:

[2]La notación de función inversa sugiere alguna relación con los exponentes, pero no es así.

Teorema 1

Si la funcion f tiene inversa, entonces, para cualesquiera dos elementos a, b en el dominio de f que cumplen $a \neq b$, se tiene que $f(a) \neq f(b)$.

En otras palabras, si una función tiene inversa, entonces es uno a uno y viceversa, si una función es uno a uno, entonces tiene unversa. Si y_0 está en el contradominio de la función f, entonces este valor tiene asociado un único valor x_0 a partir del cual se le calculó usando f. Es decir, $y_0 = f(x_0)$.

Si definimos la función g que toma como su dominio al contradominio de f y asignamos al contradominio de g los elementos del dominio de f, estamos diciendo que g es la función inversa de f.

Tanto f como g son funciones (una inversa de la otra) porque cumplen con la condición de que «*a cada elemento del dominio le corresponde a lo más un elemento del contradominio*», impuesto por la definición de función.

Ejemplo 1

Calcula la función inversa de la función:

$$y = 2\,x + 7$$

- Por definición de función inversa, para cada x le corresponde un y y viceversa.
- La función «*directa*» es: $y = 2\,x + 1$.
- La función inversa «*deshace*» la transformación, es decir, le damos y y ésta nos devuelve x.
- En otras palabras, la variable independiente de la función «*directa*» viene siendo la variable independiente de la función inversa.
- Y la variable dependiente de la función «*directa*» juega el papel de la variable independiente en la función inversa.
- Así que vamos a despejar x en términos de y.

$$\begin{aligned} y &= 2\,x + 7 \\ y - 7 &= 2\,x \\ \frac{y-7}{2} &= x \end{aligned}$$

- Esta expresión puede verse como una función: nosotros le damos el valor de y y ésta nos devuelve el valor de x.
- Ahora cambiamos las variables para que se trate de la función inversa:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{2}$$

- Con esto hemos terminado.

Vamos a verificar que el resultado del ejemplo anterior es correcto. Para eso, vamos a calcular valores de y para la función «*directa*» y después vamos a hacer los cálculos resectivos para la función inversa.

$y = 2\,x + 7$

x	y
0	7
1	9
2	11
3	13
4	15

$$y = \frac{x-7}{2}$$

x	y
7	0
9	1
11	2
13	3
15	4

Vamos a llamar F a la función $y = 2x + 7$, y G a la función $y = (x-7)/2$.

De las tablas vemos que si damos 0 a la función F obtenemos 7. Por otra parte, si damos 7 la función G obtenemos 0.

Si damos 3 a F ésta nos devuelve 13, y si damos 13 a G nos devuelve 3.

Esto está de acuerdo con la definición de función inversa. Es decir, $G = F^{-1}$, la función G es la función inversa de la función F.

Es evidente de las tablas que el dominio de F es el contradominio de G y que el dominio de G es el contradominio de F.[3]

Puedes asignar otros valores y verás que para todos se cumple que $G(F(x)) = x$. Es decir, cuando sustituimos el valor que nos devuelve la función F (una vez que le damos un valor x), en la función G obtenemos x.

Si la función *directa* no es *uno a uno*, entonces su dominio no es igual al contradominio de su inversa. También, su contradominio no es igual al dominio de su inversa.

Ejemplo 2

Calcula la función inversa de la función:

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

- Vamos a utilizar el mismo procedimiento.
- Despejamos x y después cambiamos las literales de lugar.
- El problema ahora consiste en que tendremos que resolver una ecuación cuadrática.
- Por eso tendremos que usar la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Empezamos escribiendo la ecuación cuadrática en su forma general:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2-1}{2x} \\ 2xy &= x^2 - 1 \\ x^2 - 2yx - 1 &= 0 \end{aligned}$$

- Entonces, en este caso:
  - ✓ $a = 1$,
  - ✓ $b = -2y$,

[3]Recuerda que $F(x)$ está en el contradominio de F y que x está en su dominio.

✓ $c = -1$.

- Ahora sustitumos en la fórmula general:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2y)\pm\sqrt{(-2y)^2-4(1)(-1)}}{2(1)} \\ &= \frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2} \\ &= \frac{2y\pm\sqrt{4(y^2+1)}}{2} \\ &= \frac{2y\pm 2\sqrt{y^2+1}}{2} \\ &= y\pm\sqrt{y^2+1} \end{aligned}$$

- Observa que el símbolo $\pm$ nos indica que para cada valor de x le corresponden dos valores de y.
- Esto se debe a que la función cuadrática $y = a\,x^2 + b\,x + c$ no es uno a uno.
- Así que tendremos que considerar solamente una parte de esta función.
- Vamos a considerar solamente la parte que tiene el signo de suma.
- Entonces, la función inversa de f es:

$$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

Debido a la forma como se define la función inversa, ésta tiene cierta simetría con la función *directa*. Al graficar f y su inversa nos damos cuenta. El siguiente muestra eso.

Ejemplo 3

Calcula la función inversa de la función:

$$y = f(x) = 3x + 4$$

y grafica ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas.

- Primero vamos a calcular la inversa:

$$\begin{aligned} y &= 3x+4 \\ y-4 &= 3x \\ \frac{y-4}{3} &= x \end{aligned}$$

- Y esto implica que la función inversa es:

$$y = \frac{x-4}{3}$$

- A partir de esta función podemos llegar a la función «*directa*».
- Para este fin necesitamos calcular su inversa.

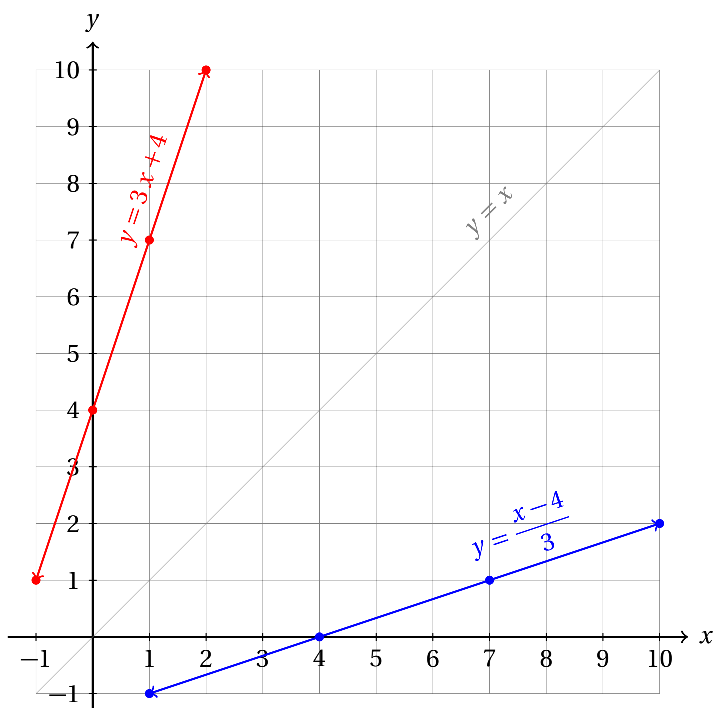
- Utilizamos el mismo procedimiento:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-4}{3} \\ 3\,y &= x-4 \\ 3\,y+4 &= x \end{aligned}$$

- Ahora cambiamos las literales de posición y obtenemos la función «*directa*».

$$y = 3\,x + 4$$

- Entonces, la función inversa de la función inversa es la función «*directa*».
- Lo anterior se cumple para cualquier función uno a uno.
- La siguiente gráfica muestra ambas funciones:



- La recta $y = x$ sirve como referencia. ¿Puedes explicar por qué?

Al observar las gráficas de las funciones fácilmente puedes verificar que las coordenadas de x de la función «*directa*» son las coordenadas de y de la función inversa y viceversa.

Esto se puede observar inmediatamente en la siguiente tabla:

f					f^{-1}
x	−1	0	1	2	y
y	1	4	7	10	x

donde f es la función $y = 3\,x + 4$, mientras que f^{-1} es la función: $y = (x-4)/3$.

Esto te debe permitir observar claramente que el dominio de f es el contradominio de f^{-1} y que el contradominio de f es el dominio de $f-1$.

Esto es así porque la función es *uno a uno*.

Cuando desees calcular la función inversa de una función que no sea *uno a uno* esto último no se cumplirá.

El siguiente ejemplo muestra otro caso.

Ejemplo 4

Calcula la función inversa de la función:

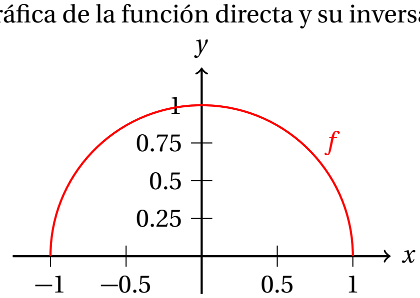
$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

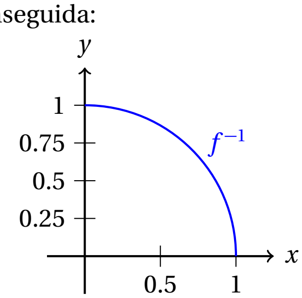
y grafica ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas.

- En este caso parece muy sencillo el despeje:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1-x^2} \\ y^2 &= 1-x^2 \\ x^2 &= 1-y^2 \\ x &= \sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

- Observa que solamente hemos considerado la parte positiva del despeje.
- Del resultado tenemos que: $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$.
- La gráfica de la función directa y su inversa se muestran enseguida:





- Observa que la función inversa solamente puede tomar valores no negativos de x.
- ¿Puedes explicar por qué?

Como solamente consideramos los valores positivos del contradominio de f, en la función inversa, la el dominio de f^{-1} solamente toma valores positivos.

La gráfica dada en el ejemplo muestra este resultado.

Esto ocurrirá cada vez que la función no sea uno a uno.

Ejemplo 5

Calcula la función inversa de la función:

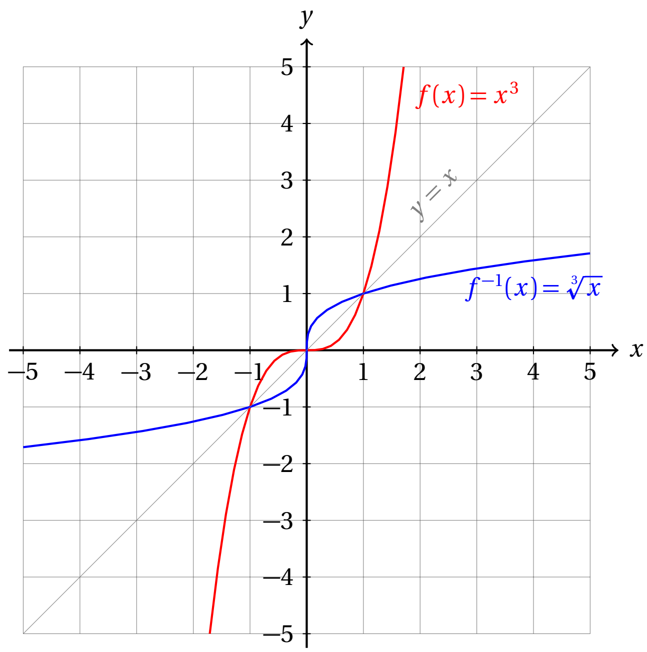
$$y = f(x) = x^3$$

y grafica ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas.

- Primero calculamos la inversa:

$$\begin{array}{rcl} y & = & x^3 \\ y^{1/3} & = & x \\ \sqrt[3]{y} & = & x \end{array}$$

- Entonces, $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$.
- La gráfica de la función y su inversa se muestra enseguida:



- En este caso, el dominio de f corresponde con el contradominio de f^{-1} y el contradominio de f con el dominio de f^{-1}.
- Esto gracias a que f es uno a uno.
- ¿Puedes calcular $f^{-1}(x)$ si $f(x) = \sqrt[3]{x}$?

En los siguientes capítulos estudiaremos varios tipos de funciones. Algunas de ellas tendrán inversa en intervalos adecuadamente definidos.

En segundo semestre estudiamos las funciones trigonométricas, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, Sus inversas son las funciones $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ y $y = \arctan x$, respectivamente, las cuales muy frecuentemente se escriben $y = \sin^{-1} x$, $y = \cos^{-1} x$ y $y = \tan^{-1} x$, para denotar las inversas de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, en las calculadoras científicas se utiliza más esta notación.

Las funciones exponenciales y logarítmicas también son *uno a uno* y por tanto, tienen inversa. Estas funciones serán estudiadas en el capítulo cuatro de este semestre.

Para cada una de las siguientes funciones calcula su función inversa y grafica ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas. **Ejercicios 15.2.2**

1) $f(x) = 2x + 5$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$

2) $f(x) = 1 - 7x$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{7}$

3) $f(x) = mx + b$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{m}$

4) $f(x) = x^2 + 16$ $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x-16}$

5) $f(x) = 16 - x^2$ $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt{16-x}$

6) $f(x) = \sqrt{x^2+2}$ $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x^2-2}$

7) $f(x) = \dfrac{7x+1}{2}$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{2x-1}{7}$

8) $f(x) = \dfrac{3x-5}{7}$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{7x+5}{3}$

9) $f(x) = \dfrac{mx+b}{a}$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{ax-b}{m}$

10) $f(x) = 1 - 4x^2$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{2}$

11) $f(x) = 16x^2 + 81$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{x-81}}{4}$

12) $f(x) = ax^2 + c$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{y-c}}{\sqrt{a}}$

13) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ $\qquad f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x},\ f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x}$

14) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ $\qquad f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x},\ f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x}$

15) $f(x) = x^2 - 2kx + k^2$ $\qquad f^{-1}(x) = k - \sqrt{x}$

16) $f(x) = x^2 - 6x + 10$ $\qquad f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x-1},\ f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x-1}$

17) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ $\qquad f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-1},\ f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-1}$

18) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ $\qquad f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-3},\ f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-3}$

19) $f(x) = x^2 - 2kx + k^2 + a$ $\qquad f^{-1}(x) = k + \sqrt{x-a},\ f^{-1}(x) = k - \sqrt{x-a}$

20) $f(x) = x^2 + 5x - 6$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{-5 + \sqrt{25 + 4(6+x)}}{2}$

15.2.3 Funciones especiales

En esta sección estudiaremos algunas funciones que son muy importantes en el estudio del análisis matemático.

Empezamos con algunos casos particulares de las funciones polinomiales.

Función constante

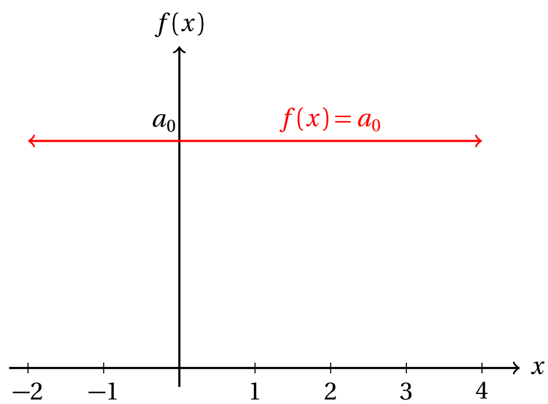
El caso especial: $f(x) = a_0$, con $a_0 \in \mathbb{R}$ es una función polinomial de grado cero, conocida como función constante.

En este caso, f en realidad no es una máquina que transforma números. Simplemente los ignora.

Por ejemplo, si nosotros asignamos $x = 2$, la máquina siempre nos devolverá el valor a_0. Y ese mismo valor devolverá idependientemente del valor que asignemos a x. Por eso no los transforma.

Puedes imaginar a la función constante como una máquina que no quiere batallar: simplemente te devuelve siempre el mismo valor.

Geométricamente obtenemos una recta horizontal, pues el valor de $f(x)$ no cambia:



Observa que la función **no** involucra a la literal x, pues los valores que nos devolverá f no dependen de ninguna manera de los valores x que nosotros le vayamos dando.

También es una buena idea notar que la gráfica de esta función corta al eje vertical (y) en $y = a_0$. Esto es obvio, puesto que $f(x)$ siempre es igual a a_0, independientemente del valor del x que nosotros asignemos. En particular, cuando $x = 0$, $y = f(x) = a_0$. Por eso la ordenada al origen de esta función es el punto $(0, a_0)$.

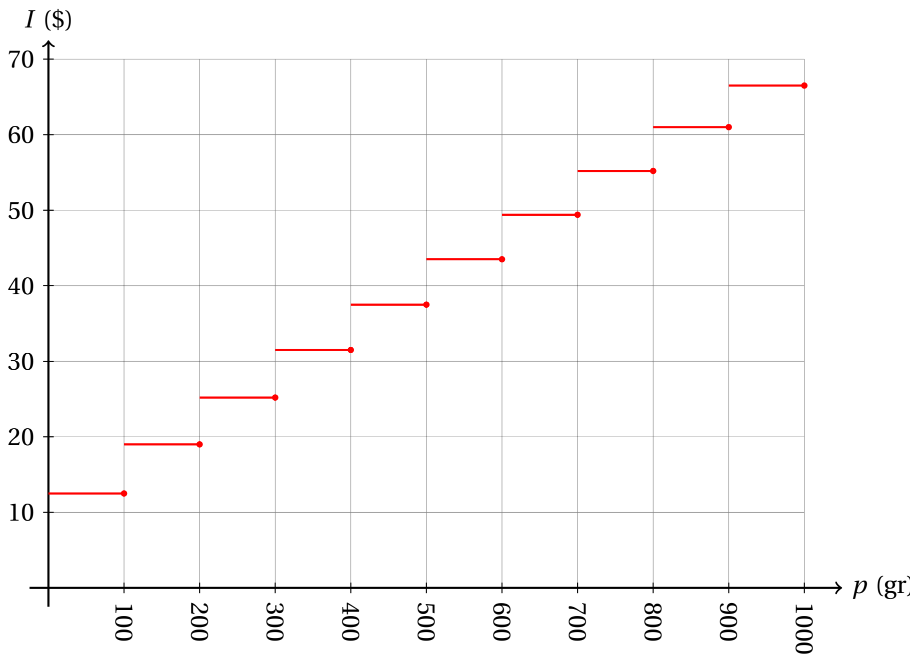
Funciones escalonadas

Las funciones escalonadas tienen su nombre debido a que sus gráficas parecen escalones.

En el ejemplo estudiado en la sección **??**, página 628, se explica un ejemplo que muestra una tabla con los importes del envío de paquetes de diferentes pesos.

Peso (gr)	**Importe** ($)	**Peso** (gr)	**Importe** ($)
$0 < p \leq 100$	12.50	$500 < p \leq 600$	43.50
$100 < p \leq 200$	19.00	$600 < p \leq 700$	49.35
$200 < p \leq 300$	25.25	$700 < p \leq 800$	55.20
$300 < p \leq 400$	31.50	$800 < p \leq 900$	61.00
$400 < p \leq 500$	37.50	$900 < p \leq 1000$	66.50

Al graficar los datos de la tabla obtenemos la siguiente gráfica escalonada:



En el ejemplo mencionado se explica por qué esta relación sí es una función.

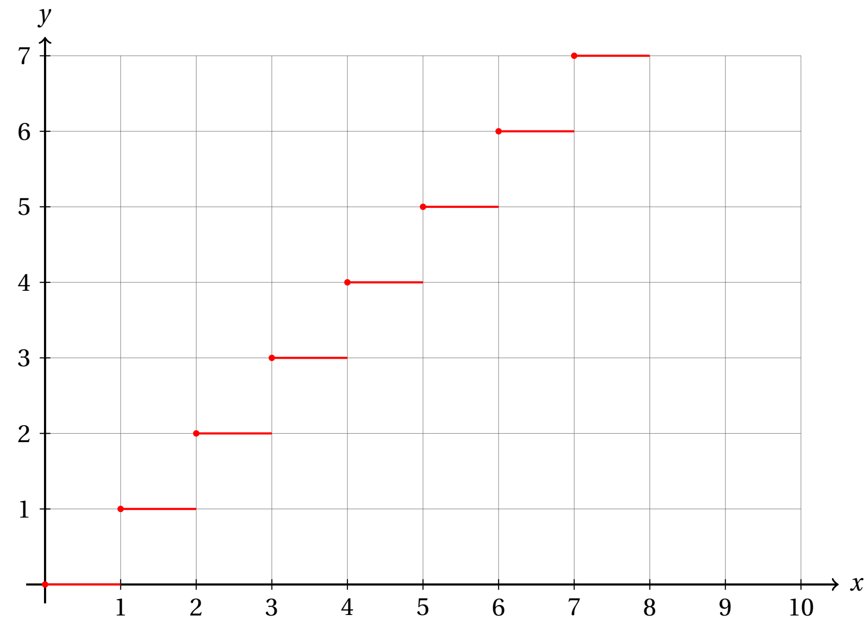
Además, se trata de una función escalonada.

Ejemplo 1

Grafica la función piso, que se denota por: $y = \lfloor x \rfloor$, y que se define como sigue:

$$\lfloor x \rfloor = \text{mayor entero } \leq x$$

- Por ejemplo, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, porque 3 es el número entero más grande que es menor que $\pi \approx 3.141592654\cdots$.
- $\lfloor \sqrt{26} \rfloor = 5$, porque 5 es el número entero más grande que es menor que $\sqrt{26}$.
- Considerando que $e = 2.718281828\cdots$, entonces, $\lfloor e \rfloor = 2$.
- $\lfloor \sin 45^{\text{o}} \rfloor = 0$, porque $\sin 45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071067812\cdots$.
- $\lfloor \cos 30^{\text{o}} \rfloor = 0$, porque $\cos 30^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660254\cdots$.
- Observa que la función *piso* solamente ignora los decimales del número y lo deja como un entero.
- Otra forma de definir la función es: «*es la función que trunca todos los dígitos a la derecha del punto decimal del número*».
- La gráfica de esta función es la siguiente:



- ¿Puedes justificar por qué está definida en el punto $(k, k+0.5)$ $(k \in \mathbb{Z})$ a partir de la definición?

Otra función escalonada es la función *cielo* que se denota por $f(x) = \lceil x \rceil$, y que se define por:

$$\lceil x \rceil = \text{menor entero} \geq x$$

Por ejemplo $\lceil \pi \rceil = 4$, porque 4 es el menor número entero que es mayor que π.

Se te queda como ejercicio elaborar la gráfica de esta función.

Funciones compuestas

La composición de funciones se puede interpretar de dos maneras distintas.

(a) Suma de dos o más funciones diferentes para obtener una nueva función.

(b) Sustituir una función en otra función para obtener una nueva función.

Ejemplo 2

Considera la función:

$$y = 2\,x + \sqrt{x}$$

como una función compuesta y muestra sus funciones componentes, es decir, sus distintas partes.

- La función $y = 2\,x + \sqrt{x}$ está compuesta como la suma de las funciones:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2\,x \\ f_2(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

- El dominio de la función f_1 es el conjunto de todos los números reales
- El dominio de la función f_2 es el conjunto de los números reales no negativos.

- Entonces, el dominio de la función compuesta:

$$y = f_1(x) + f_2(x) = 2\,x + \sqrt{x}$$

  es $x \geq 0$, con $x \in \mathbb{R}$.

- Observa que tomamos la intersección de los dominios de las funciones f_1 y f_2, porque, por ejemplo, si $x = -5$, la función f_1 sí puede transformar este valor, es decir, $x = -5$ sí está en el dominio de f_1, pero **no** está en el dominio de f_2 porque $\sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$.

En este sentido, una función polinomial

$$y = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \cdots + a_n\,x^n$$

es una función compuesta cuyas funciones componentes son los monomios:

$$a_0, \qquad a_1\,x, \qquad a_2\,x^2, \qquad a_3\,x^3, \qquad \cdots, \qquad a_n\,x^n$$

En el siguiente capítulo veremos por qué el dominio de cualquier función polinomial es el conjunto de todos los números reales. Esto se debe a que el dominio de cada una de las funciones elementales tiene el mismo dominio: $\mathbb{R}$.

Para el caso (**b**), primero vamos a dar la definición de la operación composición de funciones.

Definición 1

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean $y = f(x)$ y $y = g(x)$ dos funciones. La composición de f en g, denotado por $f \circ g = f(g(x))$ se obtiene sustituyendo la expresión que le corresponde a g en f.

Ejemplo 3

Considera las funciones:

$$f(x) = \frac{7\,x + 1}{x^2 + 1} \qquad y \qquad g(x) = x + 1$$

Calcula $f \circ g$.

- Para calcular $f \circ g$ basta sustituir g en f y simplificar la expresión, si es posible:

$$f \circ g = f(g(x)) = \frac{7(g(x)) + 1}{(g(x))^2 + 1} = \frac{7(x+1) + 1}{(x+1)^2 + 1} = \frac{7\,x + 8}{x^2 + 2\,x + 2}$$

Con esta definición de composición de funciones, podemos enunciar una propiedad de las funciones inversas:

Comentario

Propiedad de simetría de las funciones inversas

Sean f y g funciones inversas. Entonces,

$$f \circ g = f(g(x)) = x \qquad y \qquad g \circ f = g(f(x)) = x$$

Ejemplo 4

En la página 646 se muestra que $f(x) = x^3$ tiene por función inversa a la función $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Verifica que cumplen con la propiedad antes mencionada.

- Vamos a verificarlo sustituyendo de acuerdo a como se menciona en la propiedad:

$$\begin{aligned} f \circ g &= f(g(x)) = \big(g(x)\big)^3 = \big(\sqrt[3]{x}\big)^3 = \big(x^{1/3}\big)^3 = x \\ g \circ f &= g(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{x^3} = \big(x^3\big)^{1/3} = x \end{aligned}$$

- Entonces, estas funciones si satisfacen esa condición.

En la lista de ejercicios se te pide que verifiques que las funciones que se estudiaron en la sección anterior (**??**) cumplen con la propiedad de simetría de las funciones inversas.

Para las siguientes funciones, indica si se trata de una de las funciones especiales que se estudiaron en esta sección. En caso afirmativo, grafícala. **Ejercicios 15.2.3**

1) $f(x) = 1$
2) $f(x) = 0$
3) $f(x) = -1$
4) $f(x) = |x|$ No
5) $f(x) = 5$
6) $x = 2$ No
7) $f(x) = \lfloor x \rfloor + 1$
8) $f(x) = \rfloor x \rfloor$
9) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ No
10) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
11) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \lfloor x \rfloor$ No
12) $f(x) = 3\,x - |x|$ No
13) $f(x) = 1 + x - x^2$
14) $f(x) = 2 - x$
15) $f(x) = x^2 - 1$
16) Encuentra (o inventa) 3 aplicaciones prácticas (comercio, industria, etc.) de las funciones escalonadas. Grafica cada función y calcula su dominio y contradominio.
17) De los ejemplos que se resolvieron en la sección **??** verifica que cada función y su inversa cumplen con la condición de simetría. Obviamente, el último ejemplo no requieres hacerlo.
18) De la lista de ejercicios de la sección **??** verifica que cada función y su inversa cumplen con la condición de simetría. En caso necesario grafíca ambas funciones: tanto a f como a f^{-1}.

15.3 Graficación de funciones

La graficación de las funciones es como un retrato de la función. Nos ayuda a tener una idea de cómo transforma la función los valores que le vamos dando.

A partir de la gráfica de la función podemos encontrar el dominio, el contradominio, describir su comportamiento: dónde crece, dónde decrece, dónde se hace cero, dónde tiene un mínimo o un máximo, etc.

Para graficar una función de la manera más sencilla, basta sustituir valores de x en la función y calcular los valores correspondientes para y, ubicar estos puntos en el sistema de coordenadas cartesianas y unir los puntos por una curva suave.

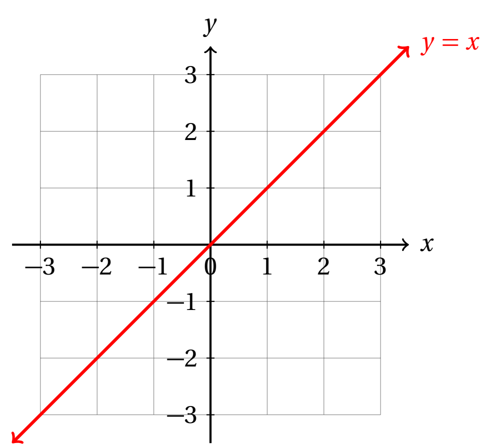
En el análisis que se presenta aquí no usaremos ese método. En su lugar, describiremos cómo se comporta la función y haremos un estudio más bien descriptivo. El objetivo consiste en que tú logres «*ver*» la gráfica de la función antes de empezar a graficarla, es decir, que conozcas el comportamiento de la función, más que los puntos precisos por donde pasa.

Algunas veces no se requiere precisión, sino un bosquejo es suficiente para obtener la información que requerimos.

Por ejemplo, cuando queremos saber si la población de una especie en peligro de extinción va a salir de esa denominación: «*en peligro de extinción*», debemos estudiar cómo se comporta el modelo matemático (que en este caso en una función que nos dice cuántos individuos de esa población habrá dependiendo del tiempo). No nos interesa saber cuántos habrá en diez o veinte años, sino si crecerá lo suficiente como para que ya no corra el peligro de extinguirse.

Grafica la función: $y = x$. **Ejemplo 5**

- La gráfica de esta función es inmediata. Esta función, estrictamente hablando, "*no transforma*" los valores de x que le damos.
- En palabras dice: "*el mismo valor que me des de x, se lo asignaré a la variable y, sin hacerle ningún cambio*".
- En realidad no requerimos tabular distintos valores de x y calcular los valores de y. La gráfica de esta función forma un ángulo de 45° con ambos ejes:

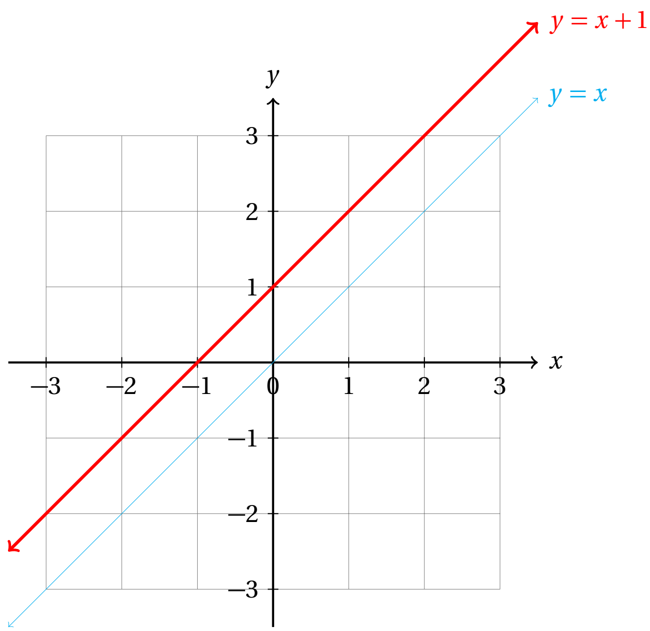


- En la gráfica se observa claramente que a cada valor de x le corresponde un valor de y. En este caso $y = x$, que es como se definió la función.

- Encuentra el dominio y el contradominio de esta función. Recuerda que esta función es polinomial.

Ejemplo 6 Grafica la función: $y = x + 1$.

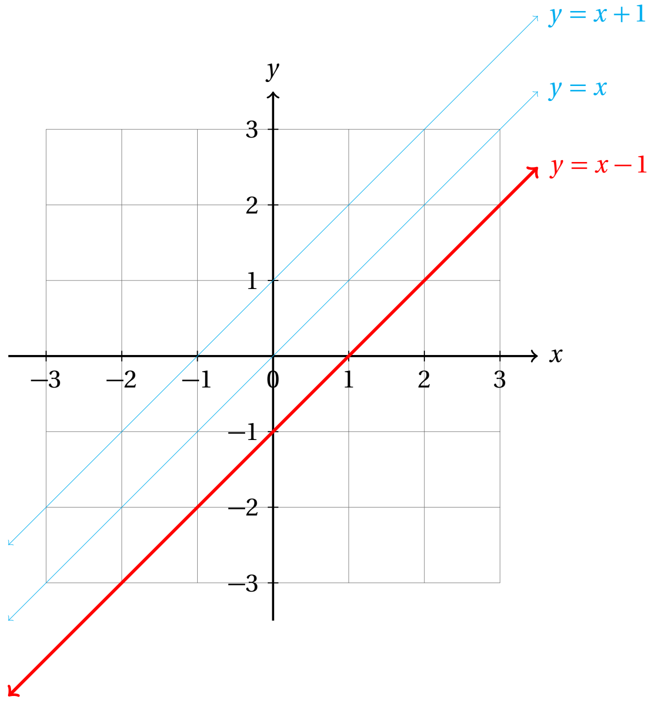
- La gráfica de esta función es hermana de la anterior.
- Esta función, en palabras dice: "*al valor que me des de x le sumaré 1, y ese valor se lo asignaré a la variable y.*
- De nuevo, no requerimos tabular distintos valores de x y calcular los valores de y.
- La gráfica de esta función forma un ángulo de 45° con ambos ejes, como la anterior, pero ahora no pasa por el origen del sistema de coordenadas:



- La gráfica en palabras nos dice: "*A los antiguos valores de y (de la función $y = x$) les sumo 1; en otras palabras, estoy moviendo la gráfica de la función $y = x$ una unidad hacia arriba y obtengo la gráfica de la función $y = x + 1$*".

Ejemplo 7 Grafica la función: $y = x - 1$.

- La gráfica de esta función es hermana de las dos anteriores.
- Esta función, en palabras dice: "*al valor que me des de x le restaré 1, y ese valor se lo asignaré a la variable y.*
- Como la gráfica anterior, ésta no pasa por el origen del sistema de coordenadas.
- La gráfica de la función fue trasladada en una unidad también, pero ahora hacia abajo:



- La gráfica en palabras nos dice: "*A los antiguos valores de y (de la función $y = x$) les resto 1; en otras palabras, estoy moviendo la gráfica de la función $y = x$ una unidad hacia abajo y obtendo la gráfica de la función $y = x - 1$*".

A partir de estos tres ejemplos tú fácilmente puedes graficar la función $y = x + k$, donde k es un número real.

TRANSLACIÓN VERTICAL
Si a la gráfica de la función $y = f(x)$ la trasladamos verticalmente k unidades, obtenemos la gráfica de la función $y = f(x) + k$.

Definición 2

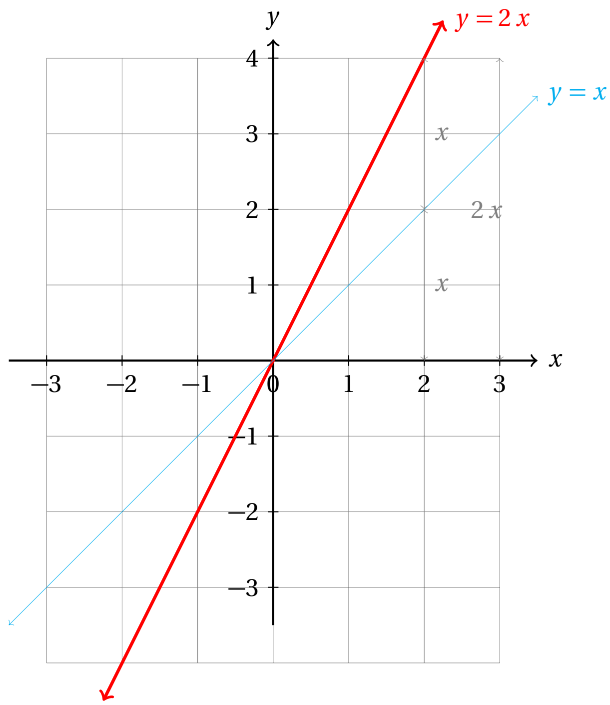
Ahora veremos una nueva transformación.

Grafica la función: $y = 2x$.

Ejemplo 8

- La gráfica de esta función es hermana de las anteriores.

- Esta función, en palabras dice: "*al valor que me des de x lo multiplicaré por 2, y ese valor se lo asignaré a la variable y.*

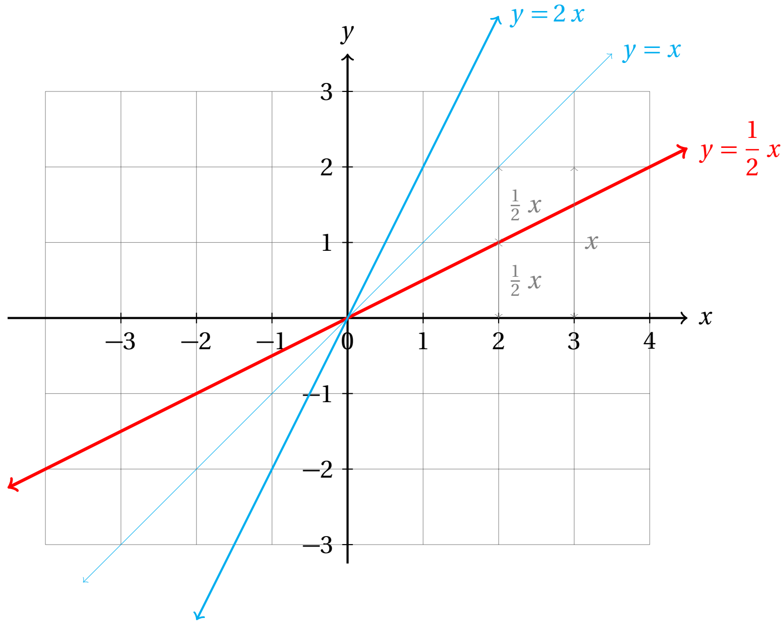


- Al comparar las dos gráficas, vemos que la transformación consistió en aumentar al doble las alturas de los puntos de la gráfica de la función.

Ejemplo 9 Grafica la función: $y = \dfrac{1}{2}\,x$.

- La gráfica de esta función es el reflejo de la función $y = 2\,x$ respecto a la función $y = x$.

- Esta función, en palabras dice: «*al valor que me des de* x *lo multiplicaré por* $\dfrac{1}{2}$*, y ese valor se lo asignaré a la variable* y»*.*



- En el ejemplo anterior la altura de cada punto aumentó al doble; en este ejemplo la altura disminuyó a la mitad.

DILATACIÓN
Si a la gráfica de la función la transformamos de manera que la altura de cada uno de sus puntos lo multiplicamos por la constante k, entonces obtenemos la gráfica de la función $y = k \cdot f(x)$.

Definición 3

Hasta aquí hemos visto dos transformaciones: traslación vertical, cuando le sumamos una constante a la función, su gráfica se corre hacia arriba o hacia abajo, dependiendo de que el valor de la constante sea positivo o negativo; dilatación, que ocurre cuando multiplicamos la variable x por un número, la gráfica "*se estira*" si el coeficiente (el número que usamos para multiplicar) es mayor que 1, o se hace "*más chaparra*" o se "*aplana*" cuando el coeficiente es menor a 1 y mayor a cero.

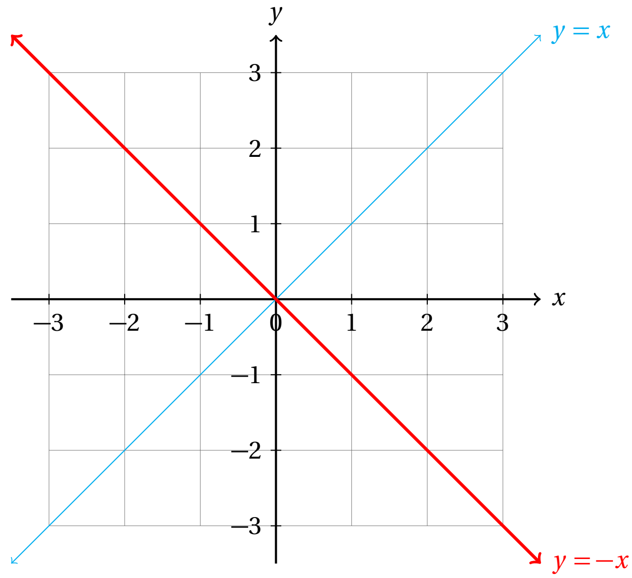
Ahora trabajaremos con una nueva transformación. Esta transformación se llama reflexión (respecto al eje x) y consiste en multiplicar la variable x por un número negativo. Empezamos con el caso más sencillo.

Grafica la función: $y = -x$.

Ejemplo 10

- Esta función es un reflejo de la función: $y = x$ respecto del eje x.

- En palabras dice:"*...nada más le voy a cambiar el signo al valor que me des de x, y el resultado se lo voy a asignar a y*".



- Si comparamos esto con la función: $y = x$ la gráfica diría: "*...a lo que antes era positivo ahora lo consideraré negativo, y viceversa, lo que antes era negativo, ahora lo consideraré positivo...*"
- Así que lo que antes estaba arriba del eje x, ahora estará por debajo, y a la misma distancia del eje, y viceversa, lo que antes estaba por encima del eje x ahora estará por debajo, y a la misma distancia.
- El nombre de esta transformación viene del hecho que parece que la gráfica de la función $y = x$ *se reflejó* respecto al eje x, como si el eje x fuera un espejo.
- Debes observar que en este caso la pendiente de la recta $m = -1$, es decir, es negativa y la gráfica de la función desciende conforme avanzamos en la dirección positiva del eje x.
- Esto indica que la función siempre decrece.
- Por cada unidad que nos movemos hacia la derecha, la gráfica de la función desciende uno.
- Es decir, por cada uno que nos movemos en la dirección positiva del eje x la gráfica se mueve uno hacia abajo en el sentido del eje y.

Ejemplo 11 Grafica la función: $y = -2x + 1$.

- Realizaremos la gráfica de esta función en 4 pasos:

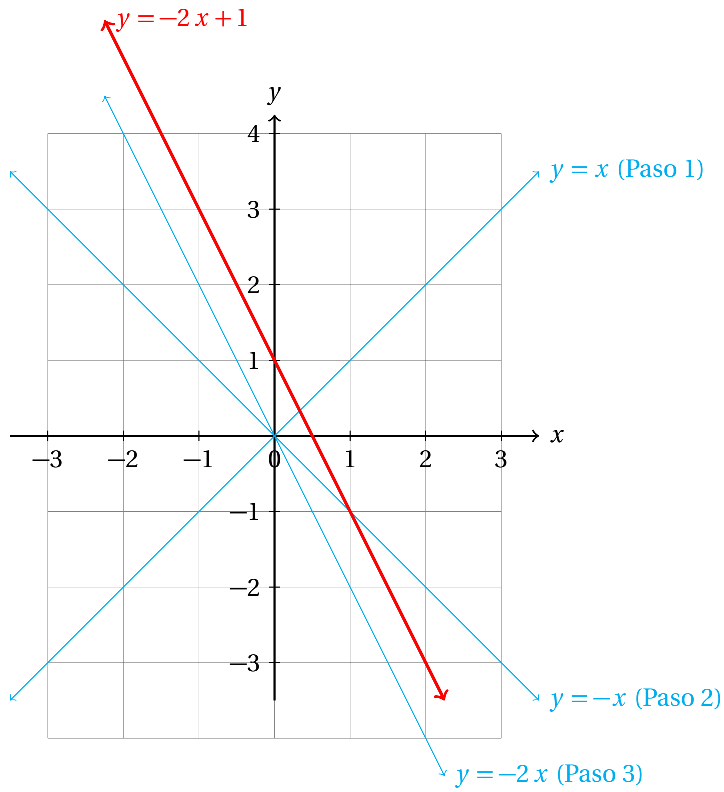
Paso i. Graficamos la función $y = x$.

Paso ii. Hacemos la reflexión del la gráfica anterior para obtener la gráfica de la función $y = -x$.

Paso iii. Dilatamos la función $y = -x$ multiplicándola por 2, así obtenemos la gráfica de la función: $y = -2x$.

Paso iv. Hacemos una traslación vertical: sumamos 1 a la función anterior y obtenemos la gráfica de: $y = -2x + 1$

- Cada uno de los pasos se muestra en la siguiente gráfica:



- Ahora encuentra la pendiente de la recta y tanto el dominio como el contradominio de la función.

En realidad, graficar una función lineal es muy sencillo. Solamente tienes que pensar en términos de las transformaciones sucesivas que se realizaron sobre las gráficas.

Para graficar una función lineal empieza siempre con la reflexión, después aplica la dilatación y termina con la traslación.	**Comentario**

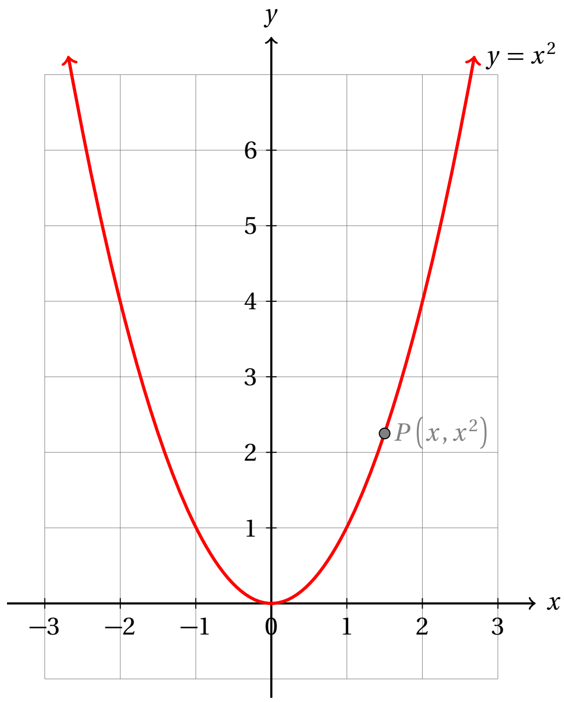
El orden en las transformaciones geométricas sí importa porque afecta el resultado final. Así que sigue el orden que se da en el tip anterior.

Ahora recordaremos cómo graficar una función polinomial de segundo grado, es decir, una parábola.

Grafica la función: $y = x^2$.	**Ejemplo 12**

- Esta función polinomial en palabras dice: "*El número que tú le asignes a la variable x lo multiplicaré por sí mismo (es decir, lo elevaré al cuadrado) y el resultado es el valor que le asignaré a la variable y*".

- Para graficar esta función observa que los valores de y siempre serán positivos (salvo cuando $x = 0$), independientemente del signo de x.



- Observa que esta fución es polinomial.
- Además, dado que x^2 nunca toma valores negativos, la gráfica de esta función abarca todo el lado positivo del eje y.
- Con esto, podemos afirmar que el contradominio de esta función es el conjunto de todos los números reales no negativos.
- Matemáticamente, el contradominio de esta función es: $\{x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$.

Observa que, para la función $y = x^2$ se cumple $f(-x) = f(x)$ para toda x.

Definición 4

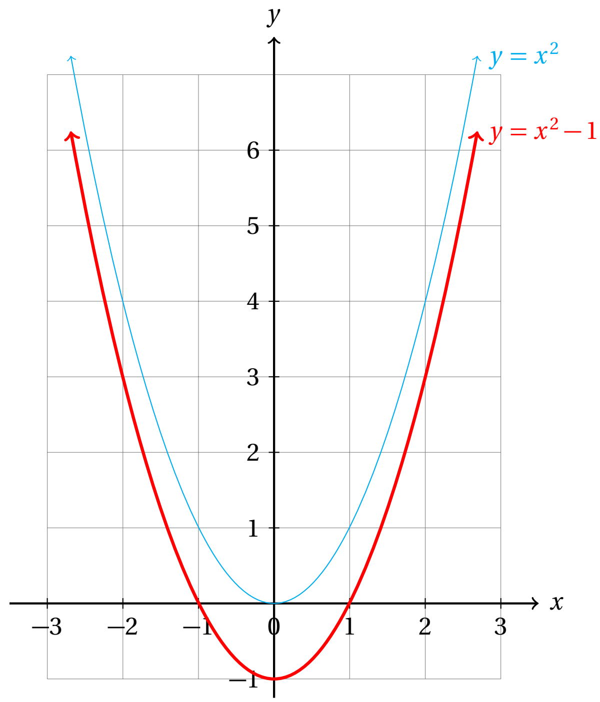
FUNCIÓN PAR

Una función es par si para toda x que sea elemento de su dominio se cumple que $f(x) = f(-x)$.

A partir del ejemplo anterior es muy fácil realizar el siguiente:

Ejemplo 13 Grafica la función: $y = x^2 - 1$.

- Esta función polinomial en palabras dice: "*El número que tú le asignes a la variable x lo multiplicaré por sí mismo, al resultado le restaré 1 y el valor así obtenido se lo asignaré a la variable y*".
- Para graficar esta función observa que se transformó la función anterior con una traslación vertical.



- Ahora encuentra el dominio y el contradominio de esta función.

- SUGERENCIA: Observa la gráfica y el eje y. ¿Te dice esto algo respecto al contradominio de la función?

- Se te queda como ejercicio verificar si esta función es par.

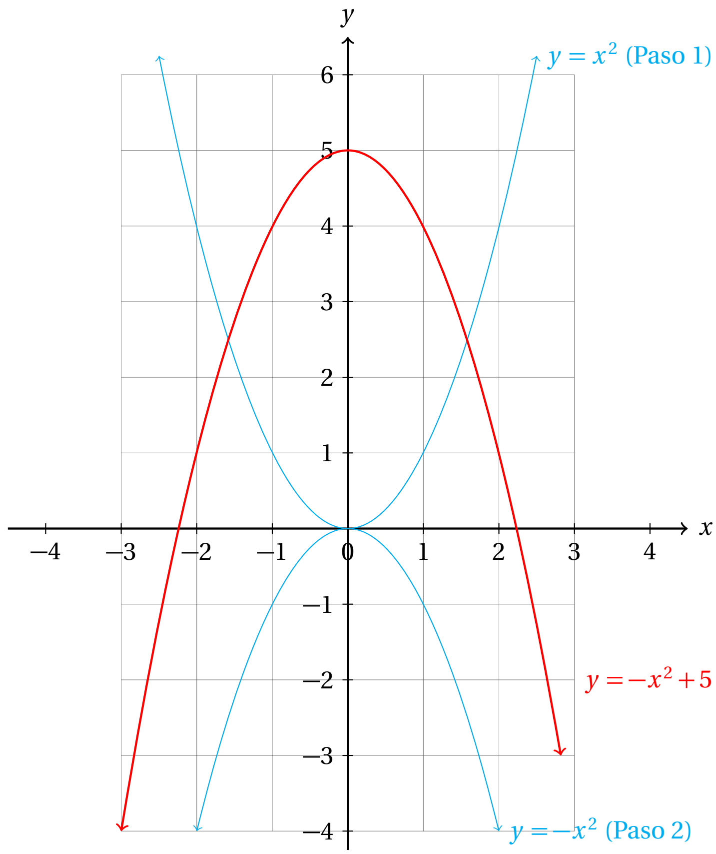
Grafica la función: $y = -x^2 + 5$. **Ejemplo 14**

- Graficamos esta función con los siguientes pasos:

Paso i. Graficamos la función $y = x^2$

Paso ii. Hacemos una reflexión respecto al eje x multiplicando por -1, así obtenemos la gráfica de la función: $y = -x^2$

Paso iii. Hacemos una traslación vertical sumando 5 a la función; así obtenemos la gráfica de la función: $y = -x^2 + 5$



- En el primer paso obtenemos la gráfica de la parábola.
- En el segundo paso hemos encontrado su reflejo respecto al eje x.
- Observa que multiplicar por el signo negativo solamente refleja la gráfica respecto al eje x.
- En el tercer paso hacemos la traslación del al última gráfica 5 unidades hacia arriba.

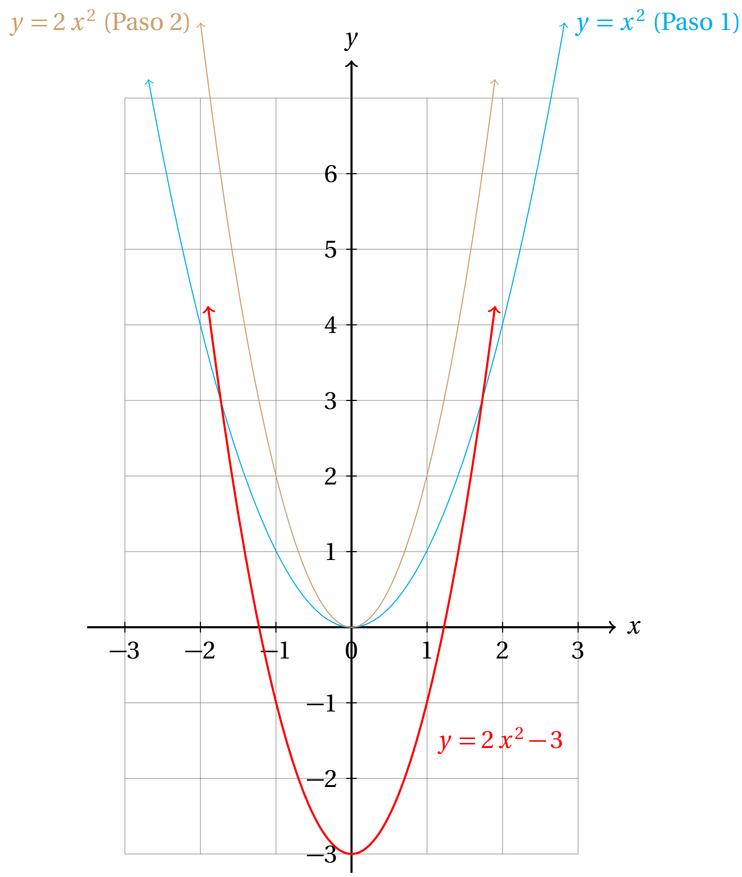
Ejemplo 15 Grafica la función: $y = 2x^2 - 3$.

- De nuevo, realizamos la gráfica de esta función por pasos:

Paso 1. Graficamos la función $y = x^2$

Paso 2. Dilatamos la gráfica multiplicando la función por 2; así obtenemos la gráfica de $y = 2x^2$.

Paso 3. Hacemos una traslación vertical restando 3 a la función $y = 2x^2$; así obtenemos la gráfica de $y = 2x^2 - 3$.

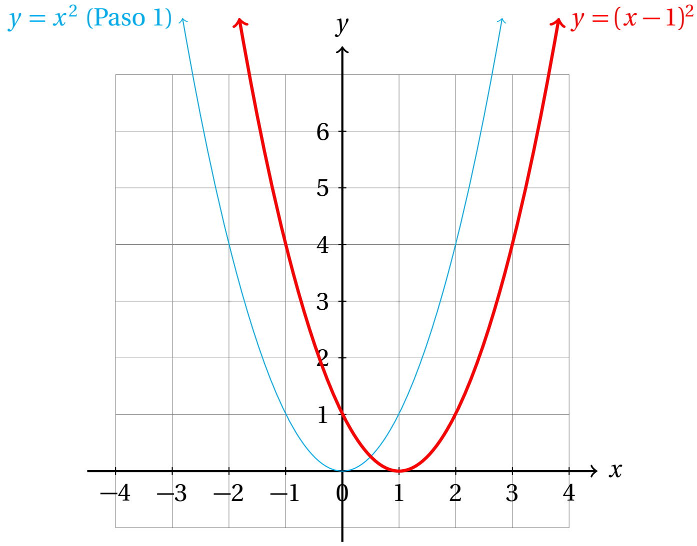


- Observa que ahora no hemos usado la reflexión, porque el término cuadrático no es negativo.
- Sin embargo, aparece multiplicado por dos, por eso usamos la dilatación.

Ahora estudiaremos una última transformación: la traslación horizontal.

Grafica la función: $y = (x-1)^2$. **Ejemplo 16**

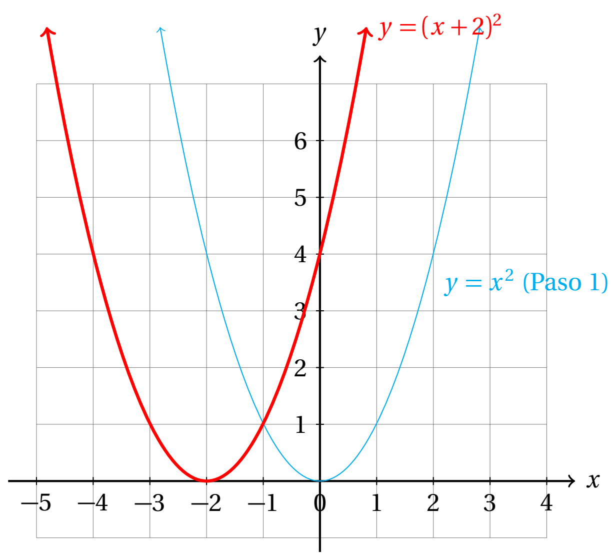
- Como el binomio $x-1$ está elevado al cuadrado, la parábola abre hacia arriba.
- La primer pregunta que debes hacerte cuando tengas este tipo de función es: "*¿qué valor debe darle a x para que y tenga el mínimo valor?*"... o en otras palabras: "*¿qué valor de x hace que $x-1$ sea igual a cero?*"
- Y la respuesta es: si $x = 1$, entonces $x - 1 = 0$.
- Entonces, la función: $y = (x-1)^2$, tiene su vértice en el punto $(1, 0)$.
- Es decir, $y = x^2$ (que tiene su vértice en $(0, 0)$) se trasladó horizontalmente hacia la derecha en una unidad.
- En otras palabras, sufrió una traslación horizontal.



- ¿Cuál es el dominio y contradominio de esta función?

Ejemplo 17 Grafica la función: $y = (x+2)^2$.

- Como el binomio $x+2$ está elevado al cuadrado, la parábola abre hacia arriba.
- "*¿Qué valor de x hace que $x+2$ sea igual a cero?*"
- Y la respuesta es: si $x = -2$, entonces $x+2 = 0$.
- Entonces, la función: $y = (x+2)^2$, tiene su vértice en el punto $(-2, 0)$.
- Es decir, $y = x^2$ (que tiene su vértice en $(0,0)$) se trasladó horizontalmente hacia la izquierda en dos unidades.



- Calcula el dominio y el contradominio de esta función.

TRASLACIÓN HORIZONTAL
Si a la gráfica de la función $y = f(x)$ la trasladamos horizontalmente k unidades, (con $k > 0$ la traslación ocurre hacia la izquierda y con $k < 0$ hacia la derecha) obtenemos la gráfica de la función $y = f(x+k)$.

Definición 5

Con esta transformación podemos graficar fácilmente cualquier función cuadrática. En caso de que encuentres una función de la forma: $y = a\,x^2 + b\,x + c$, basta completar cuadrados[4] y convertir la función a la forma: $y = (x-\alpha)^2 + \beta$.

El número α causa una traslación horizontal; el número β causa una traslación vertical. El peor de los casos tendremos una función de la forma: $y = k(x-\alpha)^2 + \beta$, con $k < 0$, es decir un número negativo, lo que indica una dilatación junto con una reflexión respecto al eje x.

Como ves, el álgebra elemental (productos notables y factorización) se requiere para realizar el procedimiento.

El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos.

Grafica la función: $y = x^2 - 4\,x + 1$.

Ejemplo 18

- **Método 1.** Completando cuadrados
- Primero debes observar que es una función cuadrática, y que se trata de una parábola.
- Vamos a completar cuadrados.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4\,x + 1 \\ &= (x^2 - 4\,x + 1) + (4 - 4) \\ &= (x^2 - 4\,x + 4) + (1 - 4) \\ &= (x-2)^2 - 3 \end{aligned}$$

- En esta forma, es mucho más fácil y rápido hacer la gráfica de la función.
- Para completar cuadrados más fácilmente, calcula la mitad del coeficiente del término lineal, en este caso, la mitad de -4 es -2, y usa ese valor para completar el binomio.
- He aquí un segundo método de llegar al mismo resultado.
- **Método 2.** Fórmula general
- Encontramos las raíces de la función, es decir, los puntos donde la gráfica corta al eje x, con la ayuda de la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

- En este caso: $a = 1$, $b = -4$ y $c = 1$. Sustituimos los valores en la fórmula general y resolvemos para

[4] Si no recuerdas cómo completar cuadrados, debes estudiarlo de nuevo.

encontrar los valores de x:

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(1)}}{2(1)} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

- Ahora ubicamos los puntos:

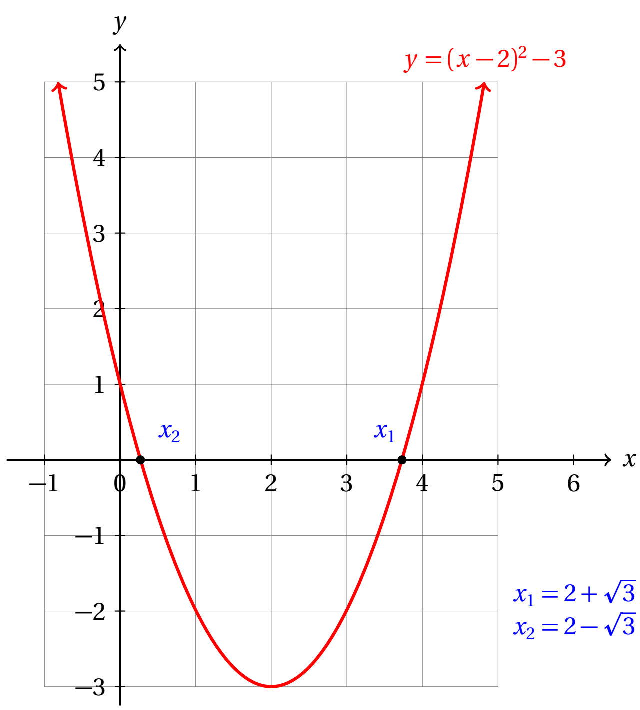
$$x_1 = 2 + \sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

en el eje x y a partir de estos graficamos la parábola. Sabemos que la parábola abre hacia arriba.

- En caso de que quieras mayor precisión, podemos usar la información del método 1, el vértice se encuentra en el punto $(2, -3)$.
- **Método 3.** Geométricamente
- Usando la interpretación geométrica de las raíces de la ecuación cuadrática, podemos fácilmente encontrar las coordenadas del vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = 2$$

- Y la ordenada del vértice es: $y(2) = (2)^2 - 4(2) + 1 = -3$. Entonces, el vértice es: $(2, -3)$
- Sabemos que la parábola abre hacia arriba porque el coeficiente del término cuadrático es positivo, y ya podemos hacer un bosquejo de la gráfica de la función.



- Ahora tú encuentra el dominio y el rango de esta función.

Grafica cada una de las siguientes funciones. Donde sea apropiado aplicar transformaciones para evitarte calcular puntos por donde pasa la gráfica, aplícalas.

Ejercicios 15.3.0

1) $y = 2x - 7$

2) $y = -2x + 7$

3) $y = 3x - \pi$

4) $y = 3x + \dfrac{1}{3}$

5) $y = -3x + \dfrac{1}{4}$

6) $y = \dfrac{1}{3}x + 1$

7) $y = \dfrac{1}{3}x - 1$

8) $y = \dfrac{1}{2}x - 2$

9) $y = \dfrac{1}{2}x + 2$

10) $y = \dfrac{1}{5}(x+1) + 7$

11) $y = x^2 - 3$

12) $y = (x-3)^2$

13) $y = (x-3)^2 + 4$

14) $y = -(x-3)^2 + 4$

15) $y = (3-x)^2 + 4$

16) $y = x^3$

17) $y = x^3 + 2$

18) $y = x^3 - 2$

19) $y = (x-2)^3$

20) $y = (x+2)^3 - 2$

21) $y = \sqrt{x}$

22) $y = \sqrt{x+1}$

23) $y = \sqrt{x-1}$

24) $y = \sqrt{x+5} + 1$

25) $y = \sqrt{x-5} + 1$

26) $y = 2\sqrt{x}$

27) $y = 2\sqrt{x+1}$

28) $y = 3\sqrt{x-1}$

29) $y = 3\sqrt{x+5} - 1$

30) $y = 3\sqrt{x-5} - 3$

31) $y = -\sqrt{x} + 1$

32) $y = -\sqrt{x+1} + 1$

33) $y = -3\sqrt{x-1} + 2$

34) $y = -3\sqrt{x+3} + 4$

35) $y = -3\sqrt{x-3} - 2$

Capítulo 16

Funciones polinomiales

Por aprender...

Por qué es importante...

Las funciones polinomiales son una generalización de las transformaciones que podemos hacer los números. Estas funciones sirven para hacer aproximaciones a funciones más complicadas. En las calculadoras científicas casi todos los cálculos relacionados con las funciones trascendentales se realizan utilizando funciones polinomiales.

16.1 La función polinomial

En este capitulo vamos a estudiar las funciones polinomiales.

Estas funciones son muy importantes en matemáticas porque cualquier función se puede aproximar como una función polinomial de ciertos grados.

Por ejemplo, la función exponencial puede escribirse como:

$$y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

donde $k!$ indica el factorial del número k, que es igual al producto de todos los números naturales desde 1 hasta k.

Mientras más términos incluyamos, mejor aproximación tendremos al valor verdadero de e^x.

De hecho, las calculadoras utilizan esta definición para calcular valores de e^x.

16.1.1 Concepto de función polinomial

Función polinomial

Una función es polinomial si se puede escribir de la forma:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_n, a_{n-1}, etc., son números reales y los exponentes n, $n-1$, etc., son números enteros no negativos.
El coeficiente a_n es el coeficiente principal y n es el grado de la función.

Definición 1

Las siguientes son funciones polinomiales:

Ejemplo 1

- En la siguiente tabla se muestran algunas funciones indicando el coeficiente principal y su grado.

Función polinomial	Grado	Coef. Principal
$y = mx + b$	1	m
$y = \frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x + \pi$	2	$\frac{1}{2}$
$y = x^3 + x^2 - x + 5$	3	1
$y = (5x+3)^{11}$	11	Requiere desarrollo

Un concepto importante que nos va a ayudar a describir más fácilmente los elementos de una función es el siguiente:

Cerradura

Sea $\mathbb{A}$ un conjunto. Decimos que los elementos del conjunto $\mathbb{A}$ son cerrados bajo la operación $\divideontimes$ si para cualesquiera $a_1, a_2 \in \mathbb{A}$ se cumple: $a_1 \divideontimes a_2 \in \mathbb{A}$.

Definición 2

Aquí, $\divideontimes$ representa el símbolo de una operación, bien puede ser $+, -, \times$ ó $\div$.

La cerradura nos indica si el resultado de una operación con dos elementos del mismo conjunto está en ese conjunto.

¿Es el conjunto de los números naturales cerrado bajo la suma?

Ejemplo 2

- Para contestar a esta pregunta debemos verificar si al elegir dos números naturales el resultado siempre está en el conjunto de los números naturales.
- La respuesta a esta pregunta es obvia.
- Siempre que sumamos dos números naturales obtenemos otro número natural.
- Entonces, el conjunto de los números naturales es cerrado bajo la suma.

Ejemplo 3 ¿Es el conjunto de los números reales cerrado bajo la suma? ¿Bajo la multiplicación? ¿Bajo la división?

- Siempre que sumamos dos números reales obtenemos otro número real, no importa qué números sumamos.
- Esto nos indica que el conjunto $\mathbb{R}$ es cerrado bajo la suma.
- Cuando multiplicamos dos números reales siempre obtenemos otro número real.
- Por eso decimos que el conjunto de los números reales es cerrado bajo la multiplicación.
- Para cualesquiera a, b con $b \neq 0$, el resultado de $a \div b$ es un número real.
- Entonces, $\mathbb{R}$ es cerrado bajo la división, siempre que el divisor sea distinto de cero.

Esta definición implica, entonces, que para cualquier función polinomial, el dominio siempre será el conjunto de los números reales.

Nota que las funciones polinomiales solamente involucran las 4 operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. Independientemente de los valores de los coeficientes y de la variable x, siempre es posible realizar las operaciones que indica la función polinomial.

Independientemente del valor de x, siempre podemos encontrar potencias de ese número, que no son sino multiplicaciones repetidas de x. Esto gracias a la cerradura del conjunto de los números reales bajo la multiplicación.

Por esa misma razón podemos multiplicar la potencia obtenida por el coeficiente que le corresponde.

Igualmente podemos sumar difernтes porencias de x y obtenemos otro número real. Gracias a la cerradura de los reales bajo la suma sabemos que el resultado es otro número real.

El valor que la función asigna a y siempre se puede calcular. De aquí que el dominio de cualquier función polinomial sea el conjunto de los números reales: $\mathbb{R}$.

Comentario El dominio de cualquier función polinomial es $\mathbb{R}$.

No podemos decir lo mismo del contradominio de las funciones polinomiales. Para que te dés cuenta considera los contradominios de las funciones $y = x$, y $y = x^2$.

El problema yace en que las potencias pares arrojan resultados positivos o cero, es decir, no negativos, mientras que las impares tanto positivos como negativos.

Gracias a la cerradura de los números reales en la suma y la multiplicación, pudimos concuir que el dominio de cualquier función polinomial es $\mathbb{R}$. Por esto mismo, podemos deducir que todas las funciones polinomiales son contínuas en su dominio.

Verifica si cada uno de los siguientes conjuntos es cerrado bajo las operaciones que se indican.

Ejercicios 16.1.1

1) $\mathbb{A} = \{0\}$. Operaciones: $+, -, \times, \div$.
2) $\mathbb{A} = \{0, 1\}$. Operaciones: $+, -, \times$.
3) $\mathbb{U} = \{x | x$ es un número par$\}$. Operaciones: $+, -, \times$.
4) $\mathbb{V} = \{x | x$ es un número impar$\}$. Operaciones: $+, -, \times$.
5) $\mathbb{T} = \{x | x$ es un múltiplo de tres$\}$. Operaciones: $+, -, \times$.
6) $\mathbb{S} = \{x | x$ es un múltiplo de siete$\}$. Operaciones: $+, -, \times$.
7) $\mathbb{K} = \{x | x$ es un múltiplo del número $k \in \mathbb{Z}\}$. Operaciones: $+, -, \times$.
8) $\mathbb{P} = \{x | x$ es un número natural primo$\}$. Operaciones: $+, -, \times$.
9) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$. Operaciones: $+, -, \times, \div$.
10) $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$. Operaciones: $+, -, \times, \div$.
11) $\mathbb{Q} = \left\{x | x = \dfrac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$. Operaciones: $+, -, \times, \div$.
12) $\mathbb{D} = \{x | x = a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$. Operaciones: $+, -, \times, \div$.
13) $\mathbb{D} = \{x | x = a + b\sqrt{5}; a$ es un número par, $b \in \mathbb{Z}\}$. Operaciones: $+, -, \times$.
14) $\mathbb{O} = \{x | x = a + b\sqrt{p}; p$ es un número primo$\}$. Operaciones: $+, -, \times, \div$.
15) $\mathbb{D} = \{x | x = a + b\,\pi; a, b \in \mathbb{Z}\}$. Operaciones: $+, -, \times, \div$.

16.1.2 La función constante

Ya hemos estudiado la función constante en la sección 15.2.3.

Entonces solamente mencionamos que se trataba de un caso especial de la función polinomial de grado cero y la graficamos.

Ahora vamos a aprender un poco más acerca de ella.

En primer lugar vamos a calcular el dominio de esta función.

Si recuerdas, esta función siempre devuelve el mismo valor, independientemente del valor de x que le demos. Es decir, siempre nos devuelve un valor, no importa qué valor de x le hayamos dado.

Esto nos indica que el dominio de esta función es el conjunto de los números reales: $\mathbb{R}$.

El contradominio de esta función consiste en un solo valor, y es precisamente el valor que la función nos devuelve cada vez que le damos un valor de x.

Si la función es: $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$, entonces el contradominio de esta función es $\{k\}$.

Aunque parezca raro, este resultado es correcto. Y esto porque la función siempre asigna el mismo valor a cualquier elemento del dominio que le demos.

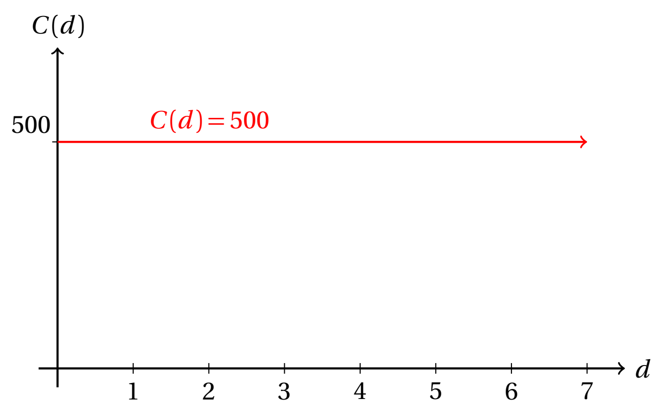
Por eso, vamos a decir que esta función es del tipo: «*muchos a uno*». Es decir, a muchos valores distintos le asigna el mismo valor.

Por ejemplo, una función constante se puede generar en la siguiente situación:

Ejemplo 1

El alquiler de un camión de mudanza cuesta \$500.00 pesos por transportar muebles dentro de la zona metropolitana de la ciudad de México. Grafica la función que muestra el costo en función de la distancia medida en kilómetros.

- Ya sabemos que el costo es idependiente de la distancia recorrida.
- Así que en este caso tenemos una función constante.
- La gráfica es la siguiente:



- En la gráfica,
  - ✓ d representa la distancia recorrida medida en kilómetros, y
  - ✓ $C(d)$ representa el costo en función de la distancia recorrida.

Hay muchos otros casos que podemos mencionar de este tipo. Por ejemplo, al enviar un paquete dentro de nuestro país a través del correo postal, el costo del envío depende del peso, pero no de la distancia que recorrerá.

Entonces, si escribimos el costo del envío del paquete en función de la distancia, obtenemos una función constante.

Otro ejemplo consiste en el pasaje de los autobúses urbanos. El costo del boleto no depende del peso del pasajero, sino de la ruta que elijas. Así, si expresamos el costo del viaje en función del peso del pasajero, obtenemos una función constante.

Ahora tú, busca otros tres ejemplos donde obtengas funciones constantes al modelar cada situación.

16.1.3 La función lineal

Una función polinomial de grado uno tiene la forma:

$$y = a_0 + a_1 x$$

El semestre pasado estudiamos la ecuación de la recta.

$$y = m\,x + b$$

En la notación de funciones polinomiales, el coeficiente a_0 corresponde a la ordenada al origen b de la notación que usamos el semestre pasado y a_1 corresponde a la pendiente m.

Ya estudiamos también el concepto de pendiente de la recta y vimos su interpretación geométrica.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Incremento en } y}{\text{Incremento en } x}$$

La pendiente m de la recta nos dice cuánto debemos subir (en la dirección del eje y) por cada unidad que avancemos hacia la derecha (en la dirección del eje x).

En otras palabras, la pendiente es una razón de cambio.

Ejemplo 1

David necesita comprar pintura para pintar su casa. El litro de pintura le cuesta \$125.00 pesos. Escibe una función que le ayude a calcular el importe y al comprar x litros de pintura.
Explica cómo debemos interpretar la pendiente de esta función polinomial de grado uno.

- Sabemos que cada litro le cuesta \$125.00 pesos.
- Si compra x litros, el importe y será de $125 \cdot x$ pesos.
- La función es, entonces:
$$y = 125 \cdot x$$
- En esta función $a_0 = 0$, y $a_1 = 125$, el precio de cada litro de pintura.
- Y esa es la interpretación de la pendiente: ésta nos indica el precio unitario de pintura.
- Un litro de pintura cuesta \$125.00 pesos.

Observa cómo es que la pendiente nos indica que si queremos comprar un litro más de pintura debemos pagar \$125.00 pesos más. Y de hecho, por cada litro de pintura, pagamos esa cantidad.

La pendiente nos dice a qué razón crece el importe de la pintura comprada por David.

Ejemplo 2

Gabriel viaja en su coche de Chetumal a Cancún a una velocidad promedio de 85 km/h. Escribe la distancia y medida en kilómetros como una función del tiempo x medido en horas.

- El problema dice que Gabriel viaja a una velocidad constante de 85 km/h.
- Esto significa que en una hora avanza 85 km.
- En dos horas avanza el doble y así sucesivamente.
- Entonces, la distancia y que recorre en x horas es:
$$y = 85\,x$$
- En este caso, la pendiente nos indica cuántos kilómetros de distancia recorre en una hora de tiempo.
- Es decir, la pendiente nos indica la velocidad.

En la sección ?? tuvimos oportunidad de deducir que el dominio de cualquier función polinomial es el conjunto de todos los números reales.

Ahora vamos a deducir el contradominio de la función lineal, es decir, de la función polinomial de grado 1.

Utilizando el concepto de cerradura, y sabiendo que los números reales son cerrados bajo la suma y bajo la multiplicación, es evidente que, independientemente del valor x que le demos a la función, ésta siempre podrá devolvernos un número para asignarlo a y.

Si suponemos que el coeficiente principal, que en este caso coincide con la pendiente de la recta, es positivo, cuando los valores de x sean negativos y suficientemente grandes, tendremos valores de y negativos también.

Por otra parte, cuando los valores de x sean positivos y suficientemente grandes, vamos a tener valores de y positivos.

Usando este mismo argumento podemos mostrar que si $a_1 < 0$, los valores de y van desde $-\infty$ hasta ∞.

Es decir, el contradominio de la función lineal $y = a_1\,x + a_0$ con $a_1 \neq 0$, es el conjunto de los números reales.

El caso particular cuando $a_1 = 0$ convierte la función en la función constante que estudiamos en la sección anterior: $y = a_0$.

Como ya dijimos, en este caso el contradominio consta de un solo punto: a_0.

También es claro que la función polinomial de grado uno no incluye a la recta vertical.

En primer lugar, debes recordar que una recta vertical no es una función, pues asigna a un solo valor de x una infinidad de valores de y.

Y en segundo lugar, la pendiente en ese caso no estaría definida para la función[1].

De los ejemplos que hemos estudiado en lo que llevamos de esta sección podrás ver que podemos calcular el valor y en cada caso usando una regla de tres directa.

Esto es así porque cada uno de los ejemplos resueltos involucra a dos cantidades que presentan variación directa.

Para resolver el problema del viaje de Gabriel en forma de regla de tres, escribimos en una columna el número de horas que ha viajado y en otra la distancia en kilómetros que ha recorrido en ese tiempo:

	Tiempo (hr)	$\Rightarrow$	**Distancia** (km)
Datos conocidos:	1	$\Rightarrow$	85
Para calcular:	x	$\Rightarrow$	y

Entonces,

$$y = \frac{(85)\cdot(x)}{1} = 85\,x$$

Y para el problema de David, tenemos:

[1] Recuerda la definición de pendiente para convencerte de que esto es verdad.

	Pintura (L)	$\Rightarrow$	**Importe** ($)
Datos conocidos:	1	$\Rightarrow$	125
Para calcular:	x	$\Rightarrow$	y

Entonces,

$$y = \frac{(125)\cdot(x)}{1} = 125\,x$$

Esto ya lo sabías, pero lo que tal vez no habías observado es que podemos relacionar a la función polinomial de grado uno con la variación directa, pero esto ocurre solamente en el caso en el que $a_0 = 0$. Porque si $a_0 \neq 0$ no se cumplirá en la regla de tres que cuando una cantidad sea cero, la otra sea cero también.

Cuando $a_0 \neq 0$ lo que podemos hacer es «*forzar*» a que pase por el origen, definiendo $a_0 = 0$, y realizar el cálculo. Después, sumamos de nuevo el valor que restamos a la función.

Así podemos crear nuevos modelos lineales.

Ahora vamos a recordar cómo graficar funciones lineales. Para eso es una buena idea recordar lo que estudiamos en la sección 15.2.3 y en el semestre pasado al estudiar la ecuación de la recta.

Cuando escribimos la función polinomial de la forma:

$$y = a_0 + a_1\,x$$

✓ a_0 es la ordenada al origen, es decir, el punto donde la gráfica de la función corta aleje y,

✓ a_1 es la pendiente de la recta.

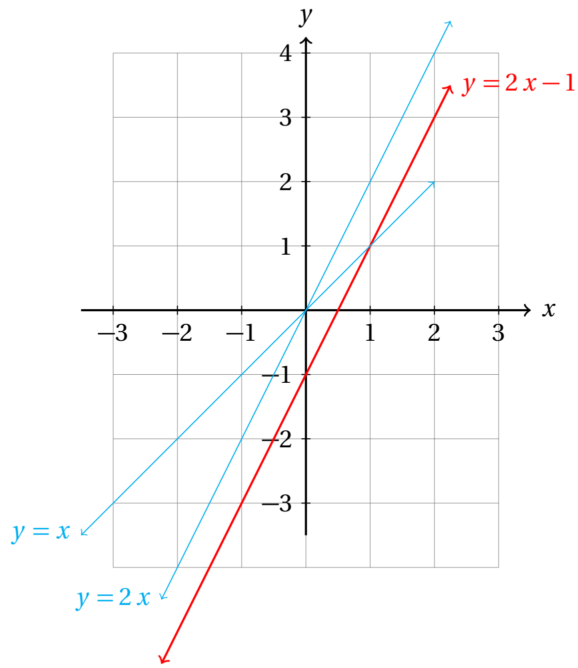
La función, entonces, debe cortar al eje y en el punto $(0, a_0)$, que es la ordenada al origen, y por cada uno que avancemos en el sentido del eje x debemos subir a_1 en el sentido del eje y, si $a_1 > 0$ o bajar cuando este coeficiente sea negativo.

Ejemplo 3

Grafica la función polinomial de primer grado:

$$y = 2\,x - 1$$

- Para graficarla, empezamos con la gráfica de la función $y = x$
- En el siguiente paso dilatamos, multiplicando por dos.
- Finalmente hacemos una traslación vertical.



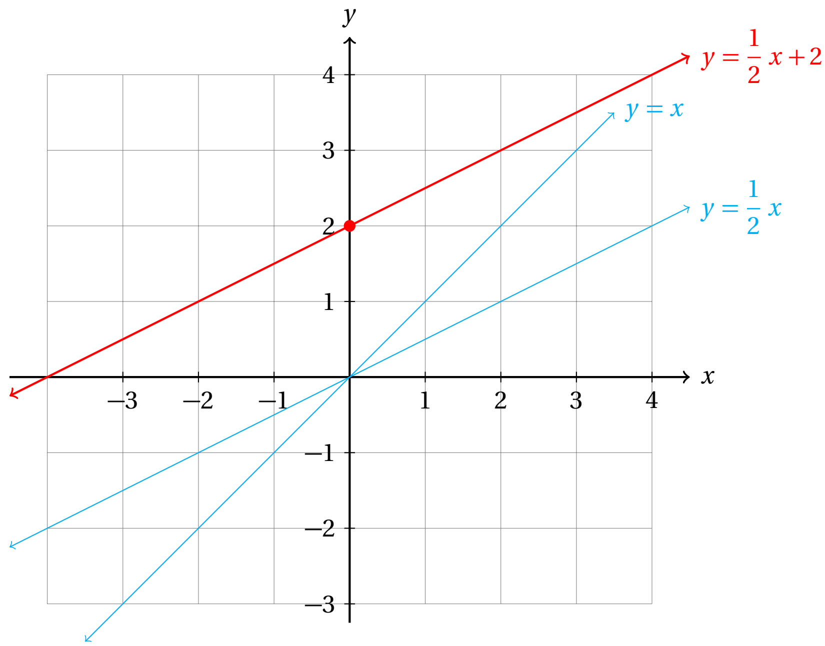
- Observa que en este caso, $a_0 = -1$.
- Por eso la gráfica corta al eje y en el punto $(0, -1)$.
- Esta gráfica también satisface que por cada uno que nos movemos en el sentido positivo del eje x avanzamos $a_1 = 2$ en el sentido del eje y.

Ejemplo 4

Grafica la función polinomial de primer grado:

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

- Ahora vamos a aplicar el método que aprendimos el semestre pasado.
- Primero vemos que la ordenada al origen de esta recta es el punto $(0, 2)$.
- También la pendiente nos está diciendo que por cada dos unidades que avanzamos en el sentido positivo del eje x debemos subir una unidad en el sentido positivo del eje y:



En los anteriores casos los dominios estaban formados por variables que podían tomar valores contínuos. Pero no siempre será así.

Ahora graficaremos un caso aplicado. Aquí, el dominio estará formado por números racionales, dado que los precios se consideran ordinariamente en múltiplos de centavos, que equivalen a un centésimo de un peso.

Ejemplo 5

Doña Carmen compra y vende libros usados. Siempre los compra a un precio razonable para la persona que se los vende y los vende aumentando un 15% del precio al que lo compró. Grafica la función que considera a x como el precio del libro cuando lo compra Doña Carmen y a y como el precio de venta del mismo libro.

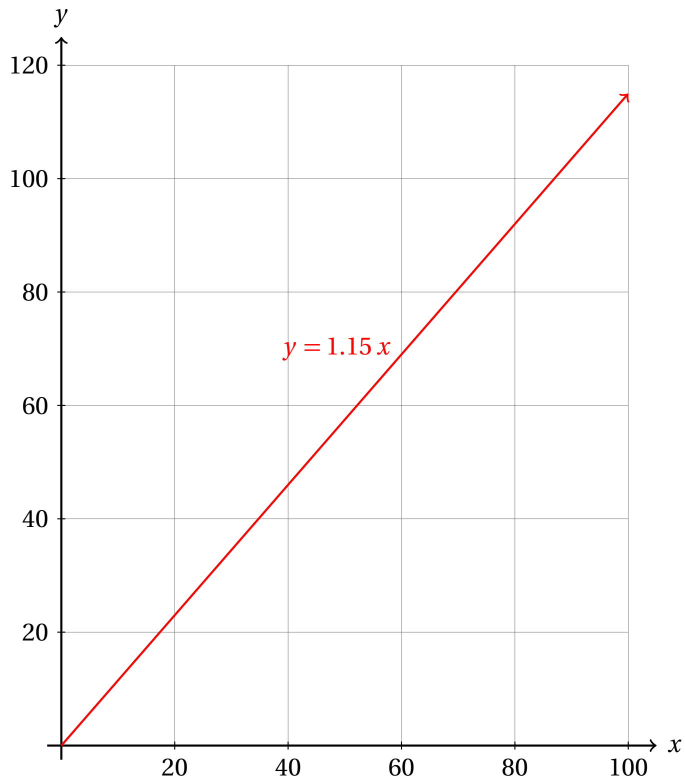
- En este caso, si el precio del libro era de \$1.00 peso, ella lo vende a \$1.15 pesos.

- Es decir, por cada peso que invierte al comprar un libro ella recibe \$1.15 pesos al venderlo.

- En otras palabras, la pendiente de la recta es ese número: $m = a_1 = 1.15$.

- Obviamente, si invierte cero pesos obtiene cero pesos.

- Así que la gráfica de la función pasa por el origen de coordenadas.



- Observa que cuando el libro le cuesta \$100.00 pesos ella lo vende a \$115.00 pesos.

Puedes ver que el dominio de esta función está formado por todos los múltiplos de un centésimo mayores a cero. Sin embargo, se ha graficado como si se tratara de una función contínua. Esto se hace así para facilitar su estudio. Cuando realicemos un cálculo, es muy sencillo redondear el resultado al centésimo más cercano y así conocer el valor que tomará la función.

Ejemplo 6 Una fotocopiadora imprime 2 hojas por segundo. Si y representa el número de hojas impresas y t es el número de segundos, calcula la función $y = f(t)$.

- En primer lugar, observamos que esta función tiene por dominio al conjunto de los números enteros no negativos.
- Esto, porque no podemos poner a trabajar la fotocopiadora un número negativo de segundos.
- El contradominio de esta función también es el conjunto de los números enteros no negativos, porque no se pueden imprimir, por ejemplo, 23.12 hojas.
- La función debe indicar cómo depende el número de hojas impresas del tiempo.
- Esto es muy sencillo: como se imprimen dos hojas por segundo, multiplicamos el número de segundos por 2:
$$y = 2\,t$$

Aunque la función que encontramos en este último ejemplo, estrictamente hablando es una función escalonada, es mejor tratarla como si fuera contínua. Si la vamos a graficar, tardamos menos y si la vamos a estudiar, sabemos que debemos truncar el resultado.

En este caso no es conveniente redondear porque si obtenemos que en 10.25 segundos la fotocopiadora puede imprimir 20.5 hojas, no tiene caso decir que se imprimieron 21, puesto que hay 20 impresas, la última está en proceso dentro de la fotocopiadora.

Tú debes reconocer estos detalles.

En matemáticas generalmente se hacen este tipo de simplificaciones para hacer el análisis de sistemas y el analísta debe saber qué es lo que la ecuación o función dice y qué otras cosas no puede notar.

Un inversionista sabe que si alquila cuartos para estudiantes universitarios a \$1 200.00 pesos la mensualidad, puede rentar 25 cuartos, pero si la mensualidad es de \$1 000 pesos, puede rentar 30 cuartos. Encuentra la ecuación de la recta que modela esta situación.

Ejemplo 7

- Podemos considerar a y como el precio mensual del alquiler del cuarto y a la variable x como el número de cuartos alquilados a ese precio.
- Entonces, tenemos dos puntos por donde pasa la recta: $A(25, 1\,200)$ y $B(30, 1\,000)$.
- Primero encontramos la pendiente de esta recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1\,200 - 1\,000}{25 - 30} = -\frac{200}{5} = -40$$

- Ahora podemos calcular la ecuación de la recta usando la forma punto - pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1\,000 &= -40(x - 30) \\ y &= -40\,x + 1\,200 + 1\,000 \\ &= -40\,x + 2\,200 \end{aligned}$$

- Entonces, la ecuación que modela esta situación es:

$$y = -40\,x + 2\,200$$

  donde x es el precio mensual de alquiler del cuarto y y es el número de cuartos que puede alquilar a ese precio.
- En palabras, esta función nos dice que si cobra la renta mensual a \$2 200 pesos, podrá alquilar cero cuartos.
- Si aumenta el precio de alquiler en \$40.00 pesos, deja de alquilar un cuarto.
- Si resolvemos $-40\,x + 2\,200 = 0$, obtenemos $x = 55$.
- Es decir, si logra rentar 55 cuartos, tendría que alquilarlos a \$0.00 pesos.

Observa que si damos un valor a x obtenemos un valor para y diferente. Esto nos sugiere que si desea cambiar el número de cuartos que logre alquilar debe cambiar la renta mensual.

Igualmente, podemos despejar x para saber cuántos cuartos va a poder alquilar dependiendo del precio de la renta mensual:

$$x = \frac{2\,200 - y}{40}$$

Al escribir la función de esta forma vemos que si $y = 2\,200$, se sigue que $x = 0$.

Ejercicios 16.1

Para cada uno de los siguientes ejercicios, encuentra la función polinomial de primer grado que modela la situación y grafícala. Indica para cada una su dominio, contradominio y su ordenada al origen. Explica la interpretación de la pendiente de cada función de los ejercicios de acuerdo al contexto del problema.

1) Un árbol crece a razón de 3.5 cm por mes. Si y representa la altura del arbol y x representa la edad del árbol medida en meses, encuentra $y = f(x)$. $y = 3.5\,x$

2) Una bomba de agua potable envía agua a razón de 100 litros por segundo. Si y es el volumen de agua bombeado en x segundos, calcula $y = f(x)$. $y = 100\,x$

3) Un disco de acetato gira a 35.2 revoluciones por minuto. Si y es el número de revoluciones y t es el tiempo medido en segundos, calcula $y = f(t)$. $y = \dfrac{35.2}{60}\,t$

4) Una onda eléctrica oscila 60 veces por segundo en una línea de voltaje. Si y es el número de oscilaciones y t es el número de segundos, calcula $y = f(t)$. $y = 60\,t$

5) Una atleta puede correr 100 metros en 9.75 segundos. Suponiendo que en ese recorrido su velocidad fuera constante, escribe una función que nos indica la distancia y recorrida en función de las x milésimas de segundo que han transcurrido desde el instante en que arrancó. $y = 0.975\,t$

6) Una lámpara fluorescente (ahorradora) consume 35 watts (un watt es igual a una unidad de energía por segundo). Calcula cuántas unidades de energía y consume la lámpara como una función del tiempo t medido en segundos. $y = 35\,t$

7) En un accidente automovilístico se dañó una tubería de agua potable, por lo que ocasionó una fuga que derramaba 25.5 litros de agua por segundo. Escribe la función $y = f(t)$ que describe el volumen de agua (medida en litros) que se derrama en t minutos. $y = 1\,530\,t$

8) Una tienda de ropa ofrece un descuento del 25% en todos los precios debido a que desean adquirir prendas con una nueva tendencia en moda. Si p es el precio con descuento y q era el precio original (sin descuento) de cada prenda, ¿qué función les permite calcular los nuevos precios? $p = 0.75\,q$

9) Una máquina para hacer tortillas produce 90 tortillas por minuto. Escribe la función que expresa el número de tortillas n producidas por esa máquina en función del número t de segundos que ha estado trabajando. $n = 1.5\,t$

10) Una avioneta viaja a 250 kilómetros por hora. Escribe la función que describe la relación entre la distancia D recorrida medida en metros con el tiempo t medido en segundos. $D = \dfrac{625}{9}\,t \approx 69.444\,t$

Instrucciones

Para cada una de las siguientes funciones lineales, calcula su dominio, contradominio, ordenada al origen, pendiente y grafícala para $-10 \leq x \leq 10$. Explica en cada caso qué transformación en la gráfica ocasiona un cambio en la expresión (coeficiente o signo) respecto a las función anterior cuando las dos sean muy parecidas.

11) $f(x) = x - 3$

12) $f(x) = 2\,x + 1$

13) $f(x) = -2\,x + 1$

14) $f(x) = -3\,x + 5$

15) $f(x) = 3\,x + 5$

16) $f(x) = -3\,x - 5$

17) $f(x) = 3\,x - 5$

18) $f(x) = 2(x - 1) + 5$

19) $f(x) = 2(x - 1) - 5$

20) $f(x) = 2(x + 1) + 5$

21) $f(x)=2(x+1)-5$
22) $f(x)=-2(x-1)+5$
23) $f(x)=-2(x-1)-5$
24) $f(x)=-2(x+1)+5$
25) $f(x)=-2(x+1)-5$
26) $f(x)=\frac{x}{2}+3$
27) $f(x)=-\frac{x}{2}+3$
28) $f(x)=\frac{x}{2}-3$
29) $f(x)=-\frac{x}{2}-3$
30) $f(x)=\frac{x-1}{2}+3$
31) $f(x)=\frac{x+1}{2}+3$
32) $f(x)=\frac{x-1}{2}-3$
33) $f(x)=\frac{x+1}{2}-3$
34) $f(x)=\frac{3x}{2}$
35) $f(x)=\frac{3x}{2}+2$
36) $f(x)=\frac{3x-1}{2}$
37) $f(x)=\frac{3x+1}{2}$
38) $f(x)=\frac{3x-1}{2}+2$
39) $f(x)=\frac{3x-1}{2}-2$
40) $f(x)=\frac{3x+1}{2}+2$

16.1.4 La función cuadrática

En primer semestre estudiamos las ecuaciones cuadráticas. También resolvimos estas ecuaciones por el método gráfico. Para esto, tuvimos que convertir la ecuación en una función igualándola a la variable y.

Ahora vamos a estudiar la función cuadrática, pero considerándola como un caso particular de la función polinomial.

Definición 1

Función cuadrática

La función polinomial de grado dos:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2$$

también se conoce como función cuadrática.

Cuando definimos la ecuación cuadrática utilizamos la forma:

$$a\,x^2+b\,x+c=0$$

Si la convertimos a función obtenemos:

$$y=a\,x^2+b\,x+c$$

De cuerdo a la nueva definición de función polinomial de segundo grado, tenemos que:

$$a_0=c \qquad a_1=b \qquad \text{y} \qquad a_2=a$$

También debes recordar que los nombres de cada término están relacionados a las funciones polinomiales:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Cuadrático Lineal Independiente

Los nombres de cada término es importante, porque la mayor parte de las explicaciones está basada en estos términos y conceptos.

En matemáticas, como en cualquier otro lenguaje, las reglas y los nombres de cada una de sus partes es muy importante.

Ejemplo 1 Indica el término cuadrático, lineal e independiente de cada una de las siguientes funciones cuadráticas.

- En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos.

- Tú debes ser capaz de identificar a cada uno de los términos.

Función		**Término**	
$y = ax^2 + bx + c$	**Cuadrático**	**Lineal**	**Independiente**
$y = 2x^2$	$2x^2$	0	0
$y = \sqrt{5}x^2 + 12x - \dfrac{7}{2}$	$\sqrt{5}x^2$	$12x$	$-\dfrac{7}{2}$
$y = \dfrac{x^2}{5} + x = 100$	$\dfrac{x^2}{5}$	x	-100
$y = (x-2)(3x+5)$	$3x^2$	$-x$	-10

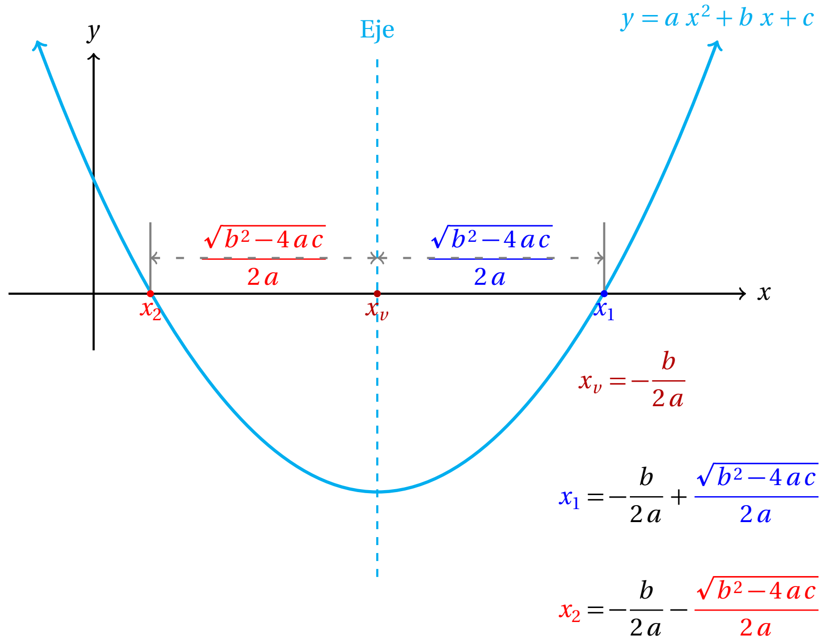
- Observa que en el último caso se requiere realizar la multiplicación indicada para conocer cada uno de los términos.

Para calcular las soluciones de la ecuación cuadrática usamos diferentes métodos. Esos mismos métodos son los que vamos a utilizar para encontrar los puntos donde la gráfica de la función corta al eje x.

Definición 2 RAÍZ DE UNA FUNCIÓN

Una raíz de la función $y = f(x)$ es un valor x_0 que hace que $f(x_0) = 0$.
La raíz de la función también se conoce como «cero» de la función.

Solamente para recordar, de nuevo mencionamos la interpretación geométrica de las raíces de la ecuación cuadrática, que están relacionadas con la fórmula general y la función cuadrática:



Entonces, si sustituyes x_1 ó x_2 en la función $y = a\,x^2 + b\,x + c$ obtenemos cero, precisamente porque estos valores son las raíces de la función.

En otras palabras, x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

Observa de la definición que si al sustituir el valor x_0 en la función $y = f(x)$ obtenemos cero, es decir, $f(x_0) = 0$, entonces el valor x_0 es una raíz de la función.

Ejemplo 2

Calcula las raíces de la siguiente función cuadrática:

$$y = x^2 + 6\,x + 8$$

- Podemos calcular las raíces de la función utilizando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

- Ya sabemos que $a = 1$, $b = 6$, y $c = 8$.

- Así que si sustituimos y realizamos los cálculos obtenemos el resultado buscado:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\ &= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4\,(1)(8)}}{2\,(1)} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - (32)}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} \end{aligned}$$

- Lo cual puede reducirse a:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-6 \pm 2}{2} \\ x_1 &= \frac{-6+2}{2} = -2 \\ x_2 &= \frac{-6-2}{2} = -4 \end{aligned}$$

- Para comprobar que en realidad esos valores son las raíces de la función, sustituimos:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= (-2)^2 + 6(-2) + 8 = 4 - 12 + 8 = 0 \\ f(x_2) &= (-4)^2 + 6(-4) + 8 = 16 - 24 + 8 = 0 \end{aligned}$$

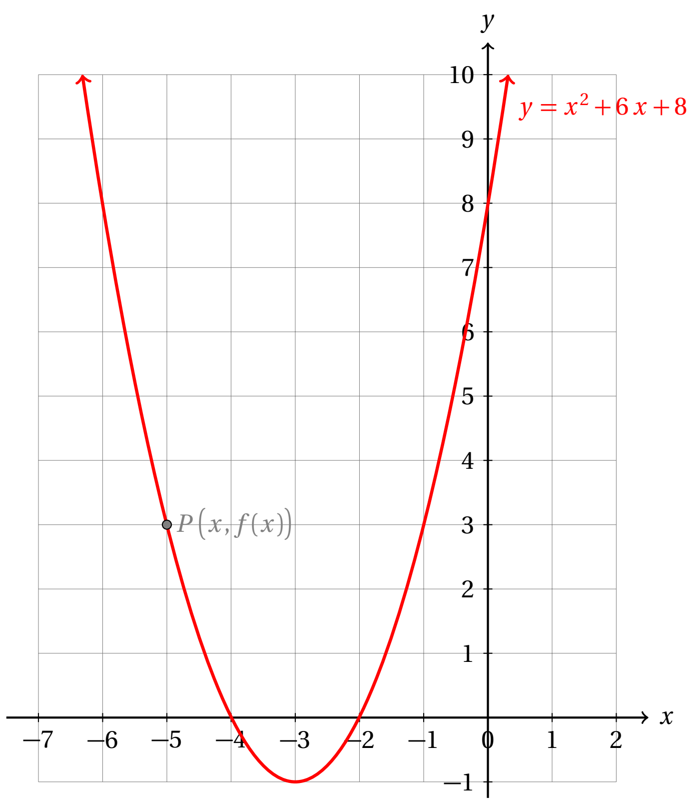
- Por definición, estas son las raíces de la función.

Ejemplo 3

Grafica la función:

$$y = x^2 + 6x + 8$$

- Ahora vamos a graficar la función del ejemplo anterior.
- Sabemos que la parábola abre hacia arriba porque el coeficiente principal es positivo.
- También sabemos que en $x = -2$, y en $x = -4$ la función se hace cero, dado que esas son sus raíces.
- Finalmente, cuando sustituimos $x = 0$ en la función encontramos que $y = 8$.



- Como ya sabes, el dominio de esta función es el conjunto de los números reales.
- Para calcular el contradominio observa que los valores de y para los cuales la función tiene gráfica empiezan en $y = -1$ y se extienden haste ∞.
- Entonces, el contradominio de la función es: $[-1, \infty)$.
- observa que hemos usado un corchete en lugar de un paréntesis para indicar que el valor frontera $y = -1$ también está en el contradominio de la función.
- Para comprobar que es así, sustituye $x = -3$ en $f(x) = x^2 + 6x + 8$.

Como en el caso de las ecuaciones cuadráticas, las funciones cuadráticas *tienen* exactamente dos raíces.

En algunos casos las dos raíces serán reales y repetidas. Esto ocurrirá cuando la parábola toque *tangentemente* al eje x. En ese caso, el valor del discriminante $b^2 - 4ac$ será igual a cero[2].

Finalmente, el caso extremo consiste cuando la gráfica de la función no corta al eje x, entonces tendremos dos raíces complejas conjugadas. Es decir, si $x_1 = p + iq$, es una raíz de la función, entonces también lo será el valor: $x_2 = p - iq$.

Definición 3

CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z = a + ib$ un número complejo. El conjugado de z denotado por $\bar{z}$ es:

$$\bar{z} = a - ib$$

Ejemplo 4

Calcula las raíces de la función:

$$y = x^2 + 4x + 8$$

y grafícala.

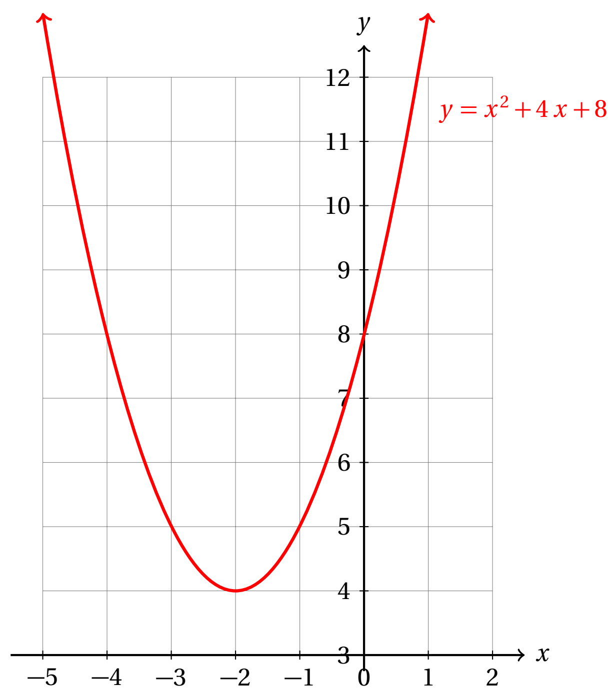
- Ahora utilizamos el método de completar cuadrados.
- Es fácil observar que
$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$
- Nosotros vamos a sumar 4 en ambos lados de la igualdad anterior y obtenemos:
$$y = (x+2)^2 + 4 = x^2 + 4x + 8$$
- Para encontrar las raíces de la función vamos a igualar a cero la expresión anterior y despejamos x:
$$\begin{aligned} y = (x+2)^2 + 4 &= 0 \\ (x+2)^2 &= -4 \end{aligned}$$
- Observa cómo debemos elevar al cuadrado un número y obtener como resultado -4.
- Esto nos indica que la gráfica de la función no corta al eje x.

[2] Regresa a la interpretación geométrica dada algunas páginas atrás.

- De cualquier manera vamos a calcular sus raíces:

$$\begin{aligned} x+2 &= \pm\sqrt{-4} \\ x &= -2\pm\sqrt{(-1)(4)} \\ &= -2\pm 2\sqrt{-1} \\ &= -2\pm 2\,i \end{aligned}$$

- Observa que las raíces de la función son complejas conjugadas.
- Ahora no podemos usar las raíces para graficar la función.
- Es mejor usar la forma que obtuvimos cuando completamos el cuadrado.
- Solamente aplicamos una traslación vertical y una horizontal a la parábola $y = x^2$.



- Ahora indica cuál es el contradominio de esta función. $[4,\infty)$

Observa que el mínimo valor que toma esta función es $y = 4$, precisamente cuando $x = -2$.

En otras palabras, el vértice de la parábola corresponde con el mínimo o máximo de una función cuadrática.

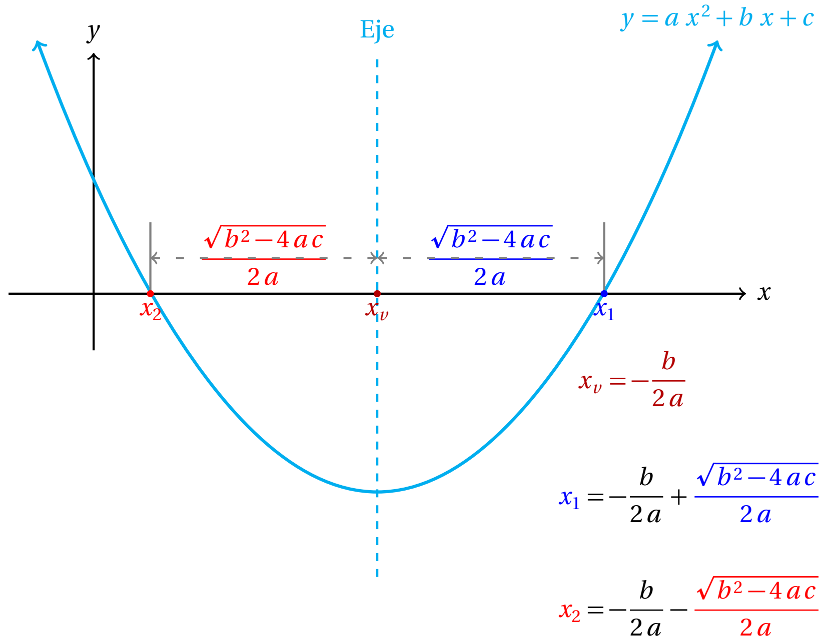
Observando la fórmula general:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}$$

vemos que si la función tiene dos raíces reales, éstas están a la misma distancia del eje de la parábola.

Esto nos sugiere una forma sencilla de calcular el vértice de la parábola, es decir, el mínimo o máximo de la función cuadrática.

Si el discriminante $D = b^2 - 4\,a\,c = 0$ la distancia del eje a cada raíz es cero, es decir, las dos raíces son iguales y están sobre el eje, y el valor ambas es: $x_v = -b/(2\,a)$.



Esta es una fórmula que nos permitirá calcular muy fácilmente el máximo o mínimo de una función cuadrática.

Grafica la función:

$$y = -x^2 + 2\,x$$

Y calcula las coordenadas de su vértice.

Ejemplo 5

- Primero calculamos las raíces de esta función.
- Para esto, utilizaremos el método de factorización:

$$\begin{array}{rcl} -x^2 + 2\,x = 0 & \Rightarrow & -x(x-2) = 0 \qquad \Rightarrow \\ x & = & 0 \\ x & = & 2 \end{array}$$

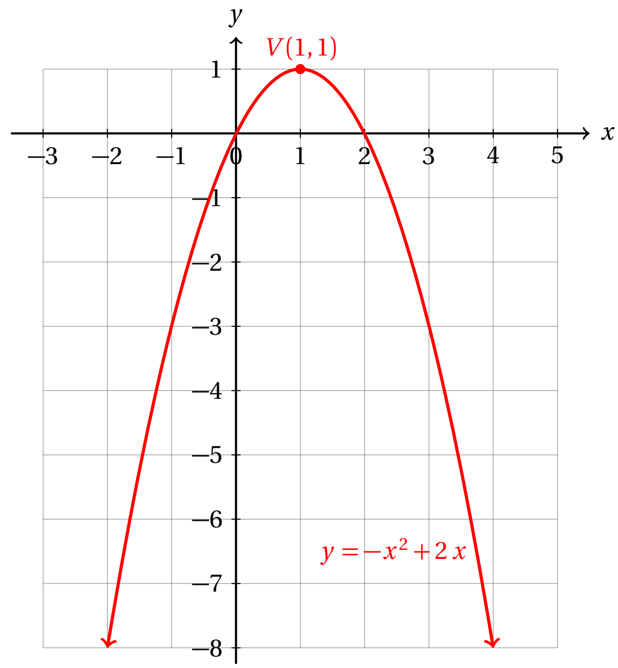
- También podemos calcular dónde está el vértice.
- Primero observa que el punto que está exactamente en medio de $x = 0$ y $x = 2$ es $x = 1$.
- Ahora verificamos aplicando la fórmula:

$$x_v = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$$

- Para saber el valor de y cuando $x = 1$ sustituimos en la función:

$$y(1) = -(1)^2 + 2(1) = -1 + 2 = 1$$

- Entonces, el vértice de la parábola está en el punto $V(1,1)$.
- Como el coeficiente principal es negativo, la parábola abre hacia abajo y tiene un máximo:



- ¿Cuál es el contradominio de esta función? $[1, -\infty)$

Observa que el vértice de la parábola corresponde a un máximo cuando el coeficiente principal de la función es negativo, es decir cuando $a_2 < 0$, porque entonces la parábola abre hacia abajo.

Por otra parte, la función tendrá un mínimo cuando a_2 sea positivo, porque entonces la parábola abrirá hacia arriba.

Comparando las dos formas de la función cuadrática:

$$\begin{aligned} y &= a\,x^2 + b\,x + c \\ y &= a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

y recordando que el vértice de la parábola está en

$$x_v = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{a_1}{2\,a_2}$$

vemos que el vértice de la función cuadrática está en el punto:

$$V\left(-\frac{a_1}{2\,a_2}, f\left(-\frac{a_1}{2\,a_2}\right)\right)$$

Ejemplo 6 Encuentra dos números tales que su suma sea 10 y su producto sea máximo.

- Si consideramos solamente números enteros, tenemos un número infinito de pares de números que suman 10.
- Por ejemplo, 12 y −2 son uno de esos pares.
- Si x es uno de los dos números, el otro será $10 - x$, porque al sumarlos obtenemos 10:

$$x + (10 - x) = 10$$

- El problema exige que el producto de los dos números sea máximo.
- Para esto, vamos a definir la función:

$$y = x\,(10 - x) = 10\,x - x^2$$

- Ahora el problema se convierte en encontrar el vértice de esta función cuadrática.
- El valor de x que hace que $y = x\,(10 - x) = 10\,x - x^2$ sea máximo está en el vértice:

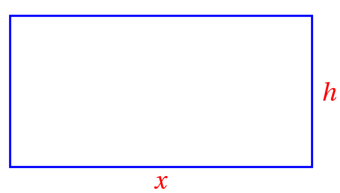
$$x_v = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{10}{2(-1)} = 5$$

- Si $x = 5$, entonces, $10 - x$ también vale 5.
- Así que los dos números que sumados dan 10 y dan producto máximo son 5 y 5.
- Se te queda como ejercicio calcular las dos raíces de esta función y graficarla.

Este procedimiento servirá para resolver problemas prácticos.

Don Gabriel debe cercar un terreno con los 40 metros de cerca que tiene para encerrar los becerros. Él desea crear el rectángulo que tenga mayor superficie. ¿Qué dimensiones debe tener el corral?	**Ejemplo 7**

- Sabemos que Don Gabriel va a utilizar toda la cerca con la que cuenta, porque quiere formar el corral con la mayor área posible.
- Entonces, el perímetro del corral será de 40 metros.
- Vamos a hacer un dibujo para representar la situación:



- Como el perímetro del corral es de 40 metros,

$$2\,x + 2\,h = 40$$

- Podemos dividir ambos lados de la ecuación entre 2 y así obtenemos:

$$x + h = 20$$

- El problema puede resolverse ahora como el anterior: encontrar dos números que sumados den 20 y que al multiplicarlos obtengamos el producto máximo.
- Observa que el área del corral se calcula con el producto $x \cdot h$ (porque Área = base × altura), y que $h = 20 - x$.

- Entonces, la función cuadrática que nos ayudará a resolver este problema puede definirse como:

$$y = x \cdot h = x \cdot (20 - x) = 20\,x - x^2$$

- Como el coeficiente principal de la función es negativo el problema tiene un máximo.
- El vértice de esta función está en el punto:

$$x_v = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{20}{2(-1)} = 10$$

- Ahora podemos calcular: $h = 20 - x = 20 - 10 = 10$.
- Entonces, se trata de un corral de forma cuadrada de 10 metros de lado.
- El perímetro es, evidentemente $(4)(10) = 40$ metros.
- El área de este terreno es de $(10)(10) = 100$ metros cuadrados.

Ejemplo 8 Un topógrafo sabe que el largo de un terreno es un metro mayor a su ancho. Si el área del terreno es de 600 metros cuadrados, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

- Si x es el ancho del terreno, su largo, que es un metro mayor, es $x + 1$.
- El área del terreno es igual al producto de la base por la altura.
- Si y es el área del terreno, entonces:

$$y = x\,(x + 1) = x^2 + x$$

- Para calcular las dimensiones del terreno debemos igualar a 600 su área.
- Entonces, debemos resolver:

$$600 = x^2 + x \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + x - 600 = 0$$

- Ahora aplicamos la fórmula general para obtener:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\ &= \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4\,(1)(-600)}}{2\,(1)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (-2400)}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{2401}}{2} \end{aligned}$$

- Pero $\sqrt{2401} = 49$, entonces:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1 + 49}{2} = \frac{48}{2} = 24 \\ x_2 &= \frac{-1 - 49}{2} = -\frac{50}{2} = -25 \end{aligned}$$

- Evidentemente, el ancho no puede ser un número negativo.
- Así que el ancho del terreno es $x = 24$.
- El largo es: $x + 1 = 25$.
- Ahora se te queda como ejercicio graficar la función y ver cómo cambia el área del terreno cuando x cambia de un valor a otro.

Un inversionista sabe que si alquila cuartos para estudiantes universitarios a \$1200.00 pesos la mensualidad, puede rentar 25 cuartos, pero si la mensualidad es de \$1 000 pesos, puede rentar 30 cuartos. ¿A qué precio debe alquilar los cuartos para obtener el mayor ingreso mensual?

Ejemplo 9

- Si definimos:

$$\begin{array}{ll} y \longrightarrow & \text{el precio mensual del alquiler del cuarto} \\ x \longrightarrow & \text{el número de cuartos alquilados a ese precio} \end{array}$$

  entonces, la ecuación[3] que indica cómo varía el número de cuartos alquilados conforme varía el precio es:

$$y = 2\,200 - 40\,x$$

- Nosotros queremos calcular el máximo ingreso.
- El ingreso que obtiene ese inversionista al alquilar x cuartos es:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ingreso} & = & (\text{precio de cada cuarto}) & \cdot & (\text{número de cuartos alquilados}) \\ I & = & (2\,200 - 40\,x) & \cdot & x \end{array}$$

- Al realizar la multiplicación que queda indicada obtenemos:

$$I = 2\,200\,x - 40\,x^2$$

- Para encontrar el máximo aplicamos la fórmula para calcular x_v:

$$x_v = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{2\,200}{(2)\cdot(-40)} = \frac{2\,200}{80} = 27.5$$

- Debe alquilar 27 cuartos para obtener el mayor ingreso posible.
- La renta mensual de cada cuarto es de:

$$y = 2\,200 - 40\,x = 2\,200 - 40(27) = 1\,120 \text{ pesos.}$$

- El ingreso que obtendrá es:

$$I(27) = 2\,200\,x - 40\,x^2 = 2\,200(27) - 40(27)^2 = 30\,240 \text{ pesos.}$$

- Se te queda como ejercicio graficar esta función cuadrática y calcular sus raíces.

---

[3]Puedes ver que esto es así en el último ejemplo que se resolvió en la sección anterior, en la página 683

Ejercicios 16.1.4 Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios y problemas.

1) ¿Qué relación existe entre una ecuación cuadrática y la función polinomial de segundo grado? ¿Cuál es la diferencia entre ambos objetos matemáticos?

2) Realiza un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones polinomiales de grado dos. Calcula sus raíces y su vértice.

   (I) $y = x^2 - 2x$ — $x_1 = 0, x_2 = 2, V(1, -1)$
   (II) $y = x^2 - 6x$ — $x_1 = 0, x_2 = 6, V(3, -9)$
   (III) $y = x^2 + 10x$ — $x_1 = 0, x_2 = -10, V(-5, -25)$
   (IV) $y = x^2 + 4x$ — $x_1 = 0, x_2 = -4, V(-2, -4)$
   (V) $y = x^2 - 4x$ — $x_1 = 0, x_2 = 4, V(2, -4)$
   (VI) $y = x^2 + 2x + 1$ — $x_1 = -1, x_2 = -1, V(-1, 0)$
   (VII) $y = x^2 - x - 2$ — $x_1 = -1, x_2 = 2, V(0.5, -2.25)$
   (VIII) $y = x^2 + x - 6$ — $x_1 = -3, x_2 = 2, V(-1, -6)$
   (IX) $y = 2x^2 - 2x - 4$ — $x_1 = -1, x_2 = 2, V(-0.5, -4.5)$
   (X) $y = x^2 - 4x + 4$ — $x_1 = 2, x_2 = 2, V(2, 0)$
   (XI) $y = x^2 + 6x + 9$ — $x_1 = -3, x_2 = -3, V(-3, 0)$
   (XII) $y = x^2 - 4$ — $x_1 = -2, x_2 = 2, V(0, -4)$
   (XIII) $y = x^2 - 9$ — $x_1 = -3, x_2 = 3, V(0, -9)$
   (XIV) $y = x^2 - 2x - 24$ — $x_1 = -4, x_2 = 6, V(1, -25)$
   (XV) $y = x^2 - 3x + 7$ — $x_1 = \frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{19}}{2}, x_2 = \frac{3}{2} - i\,\frac{\sqrt{19}}{2}, V\left(\frac{3}{2}, \frac{19}{4}\right)$

Instrucciones Resuelve los siguientes problemas aplicados.

3) El jardín de la casa de Nicolás actualmente mide 12 metros de largo por 5 de ancho. Él desea aumentar la misma distancia x en ambas dimensiones para incrementar su área. Encuentra la función que expresa el área final del jardín como una función de x. $A(x) = (12 + x)(5 + x)$

4) Una hoja de papel tamaño carta tiene 29.7 cm de alto y 21 cm de ancho. A la hoja se le cortará el doble en su largo que en su ancho (x cm). Encuentra la función que expresa el área de la hoja recortada en función de x. $A(x) = (29.7 - 2x)(21 - x)$

5) Según leyes físicas, para un coche que viaja sobre asfalto seco, la función que ayuda en el cálculo de la distancia d medida en metros que requiere ese coche para frenar completamente en una carretera sin inclinación en función de la velocidad v en km/h a la que inicia el frenado es:

$$d(v) = 0.005\,v^2 + 0.15\,v$$

   (I) Grafica esta función usando el intervalo $0 \leq v \leq 100$ con incrementos en v de 10 unidades.
   (II) De acuerdo a la gráfica, ¿Qué distancia recorrerá un coche que empieza a frenar a los 20 km/h? 5 m
   (III) ¿Qué distancia recorrerá un coche que empieza a frenar a los 40 km/h? 14 m
   (IV) ¿Qué distancia recorrerá un coche que empieza a frenar a los 60 km/h? 27 m
   (V) ¿Qué distancia requiere un coche que empieza a frenar a los 80 km/hr? 44 m
   (VI) ¿Qué distancia requiere un coche que empieza a frenar a los 100 km/hr? 65 m

6) La función que ayuda en el cálculo de la velocidad v (en km/h) a la que viajaba un coche de 1 000 kg en una carretera de asfalto (seco y sin inclinación) en función de la distancia que requirió para el frenado es:

$$v(d) = -15 + \sqrt{225 + 200\,d}$$

Calcula la función inversa de esta función y grafícala. Compara esta gráfica con la gráfica de la función del ejemplo anterior. $d(v) = \frac{v^2}{200} + \frac{3\,v}{20} = 0.005\,v^2 + 0.15\,v$

7) Una comerciante logra vender 20 cobertores si el precio de cada uno es de \$350.00 pesos. Por otra parte, si el precio se eleva a \$400.00 pesos, logra vender 16. ¿Qué precio le asegura tener el mayor ingreso? \$300.00 pesos, va a vender 24 cobertores con in ingreso de \$7 200.00 pesos.

8) Grafica la función del ejercicio anterior y calcula sus raíces. $x_1 = 0,\ x_2 = 48.$

16.1.5 Funciones polinomiales de grados 3 y 4

Ahora vamos a estudiar los casos de funciones polinomiales de grados tres y cuatro.

Vamos a empezar con sus gráficas y después vamos a estudiar algunos resultados teóricos.

Definición 1

Función polinomial de tercer grado

La función polinomial de tercer grado es toda aquella función que se puede escribir de la forma:

$$y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde $a_3 \neq 0$.
La función polinomial de tercer grado también se conoce como función cúbica.

Ejemplo 1

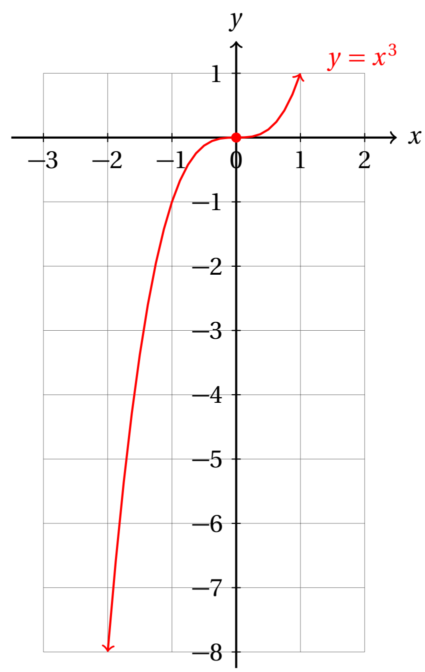
La función polinomial de tercer grado más sencilla es:

$$y = x^3$$

Grafícala, encuentra sus raíces, dominio y contradominio.

- Empezamos calculando sus raíces.
- Para que $y = 0$ se requiere que $x^3 = 0$.
- En palabras esto nos está diciendo que debemos encontrar los números que al multiplicarlos por sí mismo tres veces obtengamos cero.
- El único número que satisface la condición anterior es $x = 0$.
- Esta es la única raíz de la función.
- Para encontrar el dominio recuerda que el dominio de cualquier función polinomial es el conjunto de los números reales. (pag. 674)
- El contradominio se calcula de la sigiuente manera:
  - ✓ Observa que cuando x es positivo, el resultado de elevarlo alcubo es positivo también.
  - ✓ Cuando x es negativo el resultado de elevarlo alcubo es negativo.

- Entonces, el contradominio también es el conjunto de los números reales, porque cuando x crece mucho los resultados de elevarlo al cubo también crece mucho.
- Esto mismo pasa con valores tanto positivos como negativos.
- La gráfica de la función está enseguida:



Observa que la función $f(x) = x^3$ puede factorizarse como $y = x \cdot x \cdot x$.

Para encontrar una raíz de la función debemos contestar a la pregunta: «*¿Qué número multiplicado por sí mismo tres veces es igual a cero?*» Y la respuesta es obvia: «*el número cero multiplicado por sí mismo nos da cero*», $(0)(0)(0) = 0$. Es decir, $x = 0$ es una raíz de la función, porque $f(0) = 0$.

Ejemplo 2

Grafica la siguiente función polinomial:

$$y = x^3 - x$$

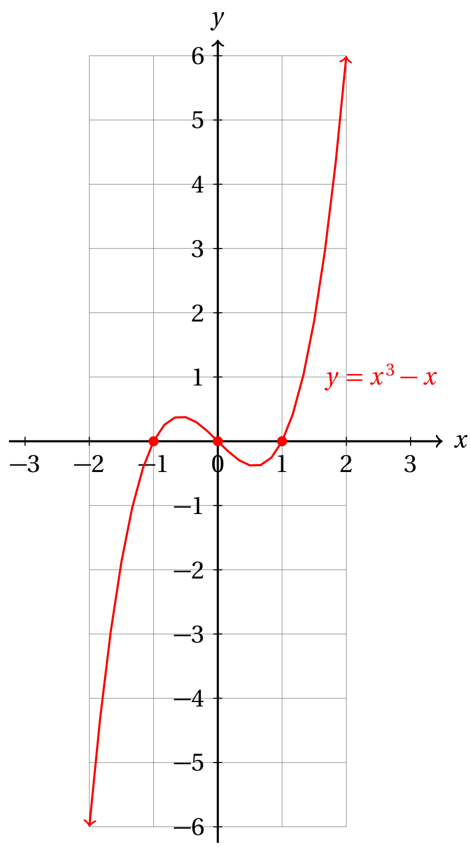
Calcula, además, sus raíces y su dominio y contradominio.

- Empezamos calculando sus raíces.
- Para eso factorizamos la expresión:

$$y = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$$

- De esta factorización calculamos fácilmente las raíces de la función.
- Para que el producto de los tres factores sea cero se requiere que al menos uno de ellos sea cero.
- Tenemos tres casos: $x = -1$, $x = 0$, y $x = 1$.
- Entonces, la función corta al eje x en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

- De nuevo,el dominio es el conjunto de los números reales, por cerradura.
- Y el contradominio también, porque cuando los valores de x crecen $f(x)$ crece.
- Esto ocurre para valores positivos como negativos.
- La gráfica de esta función es la siguiente:



Ahora observa que la función evaluada en $x = -1$, o en $x = 0$, o en $x = 1$ hace que $f(x) = 0$, y que la factorización queda:

$$y = x^3 - x = x \cdot (x+1) \cdot (x+1)$$

Es decir, si r es una raíz de la función polinomial $y = f(x)$ de grado n, entonces podemos factorizarla como:

$$Y = f(x) = (x - r) \cdot g(x)$$

Donde $g(x)$ es otra función polinomial de grado $n - 1$.

Teorema 1

Sea $y = P_n(x)$ una función polinomial de grado n. Si r es una de sus raíces, entonces la función polinomial puede dividirse exactamente entre $x - r$.

Si la función se divide exactamente entre $x - r$ entonces se puede factorizar como:

$$y = P_n(x) = (x - r) \cdot Q_{n-1}(x)$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es otro polinomio de grado $n - 1$. Entonces,

$$P_n(r) = (r - r) \cdot Q_n(r) = 0 \cdot Q_n(r) = 0$$

Esto nos indica que r es una raíz de la función. ■

Esta demostración está incompleta. Pero después de entender el procedimiento de la división sintética y que éste es equivalente a la evaluación de un polinomio en un punto, quedará evidente la segunda parte de la demostración.

Definición 2

DIVISIÓN SINTÉTICA

La división sintética entre dos polinomios se realiza utilizando solamente los coeficientes.

El siguiente ejemplo ilustra la división sintética.

Ejemplo 3

Calcula:

$$(x^2-5x-10)\div(x-3)=$$

utilizando la división sintética.

- Para ilustrar la división sintética empezamos calculando la división utilizando el método «*normal*» o de la «*división larga*».
- Colocamos el dividendo y el divisor en "*la casita*":

$$\begin{array}{r|l} \cline{2-2} x-3 & x^2-5x-10 \end{array}$$

- Ahora buscamos una expresión que multiplicada por x nos dé igual a x^2. Esa expresión es: x.

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \cline{2-2} x-3 & x^2-5x-10 \end{array}$$

- Ahora, vamos a multiplicar la expresión que acabamos de encontrar por $x-3$. Igual que con la división con números, vamos a cambiar el signo al resultado y después sumamos algebraicamente.

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \cline{2-2} x-3 & \cancel{x^2}-5x-10 \\ & -\cancel{x^2}+3x \\ \cline{2-2} & \quad -2x \end{array}$$

- A continuación bajamos el número -10 del divisor.
- Al igual que en el caso de la división con números, buscamos una expresión que multiplicada por x nos dé igual a: $-2x$
- En este caso, necesitamos: -2
- Ahora multiplicamos este número por $x-3$ y el resultado lo escribimos debajo del último renglón...

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \cline{2-2} x-3 & x^2-5x-10 \\ & -\cancel{x^2}+3x \\ \cline{2-2} & \quad -\cancel{2x}-10 \\ & \quad\ \ \cancel{2x}-\ 6 \\ \cline{2-2} & \qquad\quad -16 \end{array}$$

- Entonces,

$$\frac{x^2-5x-10}{x-3}=x-2-\frac{16}{x-3}$$

- Ahora si, vamos a calcular el resultado usando la división sintética.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & -10 & 3 \\ & 3 & -6 & \\ \hline 1 & -2 & -16 & \end{array}$$

- Para considerar un caso más general, supongamos que vamos a calcular el resultado de dividir el polinomio $a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$ entre $x - k$.
- Entonces, de acuerdo al procedimiento que estamos utilizando obtenemos:

$$\begin{array}{rrrr|r} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & k \\ & a_3\,k & a_3\,k^2 + a_2\,k & a_3\,k^3 + a_2\,k^2 + a_1\,k & \\ \hline a_3 & a_3\,k + a_2 & a_3\,k^2 + a_2\,k + a_1 & \boxed{a_3\,k^3 + a_2\,k^2 + a_1\,k + a_0} & \end{array}$$

y en pasos:

✓ **Paso 1** $a_3\,k$

✓ **Paso 2** $a_3\,k + a_2$

✓ **Paso 3** $(a_3\,k + a_2)\cdot k = a_3\,k^2 + a_2\,k$

✓ **Paso 4** $a_3\,k^2 + a_2\,k + a_1$

✓ **Paso 5** $\left(a_3\,k^2 + a_2\,k + a_1\right)\cdot k = a_3\,k^3 + a_2\,k^2 + a_1\,k$

✓ **Paso 6** $a_3\,k^3 + a_2\,k^2 + a_1\,k + a_0$

que es precisamente el resultado de evaluar la función polinomial en $x = k$.

Entonces, si el residuo de la división $(a_3\,k^3 + a_2\,k^2 + a_1\,k + a_0)$ es igual a cero, se sigue que k es una raíz de la función polinomial y además $x - k$ es un divisor del polinomio $a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$. Con esto queda completa la demostración del último teorema.

Observa que este resultado se cumple para funciones polinomiales de cualquier grado. No es exclusivo para las de grado 3.

Así, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema del residuo
Si el polinomio $P_n(x)$ se divide entre $x - a$, el residuo de la división es igual al resultado de evaluar el polinomio en el punto $x = a$.

Teorema 2

Demuestra que $x = 6$ es una raíz de la función polinomial

$$y = x^3 - 4\,x^2 - 17\,x + 30$$

Ejemplo 4

- Por el teorema anterior, si al dividir el polinomio: $x^3 - 4\,x^2 - 17\,x + 30$ entre $x - 6$ obtenemos como residuo cero, entonces sí es una raíz de la función.
- Aquí está la división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -4 & -17 & 30 & 6 \\ & 6 & 12 & -30 & \\ \hline 1 & 2 & -5 & 0 & \end{array}$$

- Más aún, como $y = x^3 - 4\,x^2 - 17\,x + 30$ y sabemos que $x = 6$ es una raíz, podemos escribir:
$$y = (x-6)(x^2+2\,x-5)$$
- Usando la fórmula general para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática, podemos factorizar el polinomio cuadrático que está como factor en la función:
$$x^2+2\,x-5 = \left(x+1-\sqrt{6}\right)\left(x+1+\sqrt{6}\right)$$
- Esto nos permite escribir la función como:
$$y = (x-6)\left(x+1-\sqrt{6}\right)\left(x+1+\sqrt{6}\right)$$
- Se te queda como ejercicio graficar la función.

Observa que la función cuadrática: $y = x^2 + x$ puede escribirse como:
$$y = x\cdot(x+1)$$
Y en general, cualquier función cuadrática $y = a\,x^2 + b\,x + c$ tiene a lo más dos raíces que están dadas por la fórmula general:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$
Esto nos indica que una función polinomial puede expresarse como:
$$y = (x-r_1)(x-r_2)$$
donde r_1 y r_2 son las raíces de la función.

Del último ejemplo vemos que una función cúbica $y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ puede descomponerse como:
$$y = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$$
y en general, una función polinomial de grado n puede descomponerse en n factores:
$$y = P_n(x) = a_n\,(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$$
En otras palabras, una función polinomial de grado n, a lo más tiene n raíces.

Observa que algunas de las raíces pueden estar repetidas. En este caso, tenemos que incluirlas todas, repetidas o no.

Por ejemplo, la función polinomial:
$$y = (x-1)(x-2)(x-2)(x+3)$$
tiene cuatro raíces, las cuales son $1, 2, 2$, y -3. La raíz $x = 2$ está repetida, pero debemos contarlas a las dos.

Teorema 3

Teorema Fundamental del álgebra
Sea $y = P_n(x)$ una función polinomial. Esta función tiene exactamente n raíces.

La función polinomial $y = P_n(x)$ tiene exactamente n raíces, algunas de las cuales pueden ser complejas conjugadas.

Ejemplo 5

Sabiendo que $x = 3$ es una raíz de la función polinomial:
$$y = x^5 - 3\,x^4 - 12\,x^3 + 36\,x^2 + 32\,x - 96$$
Calcula sus otras cuatro raíces.

- Como $x = 3$ es una raíz, podemos dividir el polinomio entre $x - 3$ y debemos obtener como cociente un polinomio de grado 4:

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & -3 & -12 & 36 & 32 & -96 & 3 \\
 & 3 & 0 & -36 & 0 & 96 & \\
\hline
1 & 0 & -12 & 0 & 32 & 0 &
\end{array}$$

- Entonces, podemos expresar la función como:

$$y = x^5 - 3x^4 - 12x^3 + 36x^2 + 32x - 96 = (x - 3)(x^4 - 12x^2 + 32)$$

- Ahora debemos factorizar el segundo factor.
- Para esto vamos a definir $u = x^2$ para poder reescribir el polinomio como:

$$x^4 - 12x^2 + 32 = u^2 - 12u + 32$$

- Ahora debemos factorizar este polinomio cuadrático:

$$u^2 - 12u + 32 = (u - 4)(u - 8) = (x^2 - 4)(x^2 - 8)$$

- Para conocer las raíces igualamos a cero cada factor y despejamos x:

$$\begin{array}{lclcl}
x^2 - 4 = 0 & \Rightarrow & x^2 = 4 & \Rightarrow & x = \pm 2 \\
x^2 - 8 = 0 & \Rightarrow & x^2 = 8 & \Rightarrow & x = \pm 2\sqrt{2}
\end{array}$$

- Entonces, la factorización de este polinomio queda:

$$(x^2 - 4)(x^2 - 8) = (x - 2)(x + 2)(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$$

- Y la función factorizada puede escribirse como:

$$y = x^5 - 3x^4 - 12x^3 + 36x^2 + 32x - 96 = (x - 3)(x - 2)(x + 2)(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$$

- Esto nos ayuda a conocer las raíces de manera inmediata.
- Igualando cada factor a cero conocemos sus raíces: 3,2, −2, $2\sqrt{2}$ y $-2\sqrt{2}$.
- Se te queda como ejercicio:
  - ✓ Verificar que $y(r) = P_5(r) = 0$, siendo r cada una de las raíces que se calcularon.
  - ✓ Graficar la función.
  - ✓ Calcular su dominio y contradominio.

En el primer ejemplo de esta sección se mencionó que para la función $y = x^3$, cuando los valores de x son positivos los valores de y son positivos y cuando los valores de x son negativos, los valores de y también lo son.

En general, para cualquier función polinomial de grado impar, para valores suficientemente grandes de x positivos, los valores de y serán del mismo signo que el coeficiente principal de la función.

Igualmente, para valores suficientemente grandes y negativos de x, los valores de y tendrán el signo opuesto al que tiene el coeficiente principal de la función.

Observa que en una dirección del eje x la función debe ser positiva y en la otra dirección debe ser negativa. Como la función es contínua, necesariamente debe cortar al eje x en algún punto.

Esto nos obliga a concluir el siguiente teorema.

Teorema 4

Cualquier función polinomial de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

Ejemplo 6

Sabiendo que $x=4$ es una raíz de la función polinomial de tercer grado:

$$y = x^3 - 15\,x^2 + 68\,x - 96$$

calcula sus demás raíces y grafícala.

- En este caso $x=4$ es una raíz, así que podemos usar la división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -15 & 68 & -96 & 4 \\ & 4 & -44 & 96 & \\ \hline 1 & -11 & 24 & 0 & \end{array}$$

- Así que:

$$y = x^3 - 15\,x^2 + 68\,x - 96 = (x-4)(x^2 - 11\,x + 24)$$

- Ahora factorizamos el último factor:

$$x^2 - 11\,x + 24 = (x-3)(x-8)$$

- Y finalmente, podemos reescribir la función como:

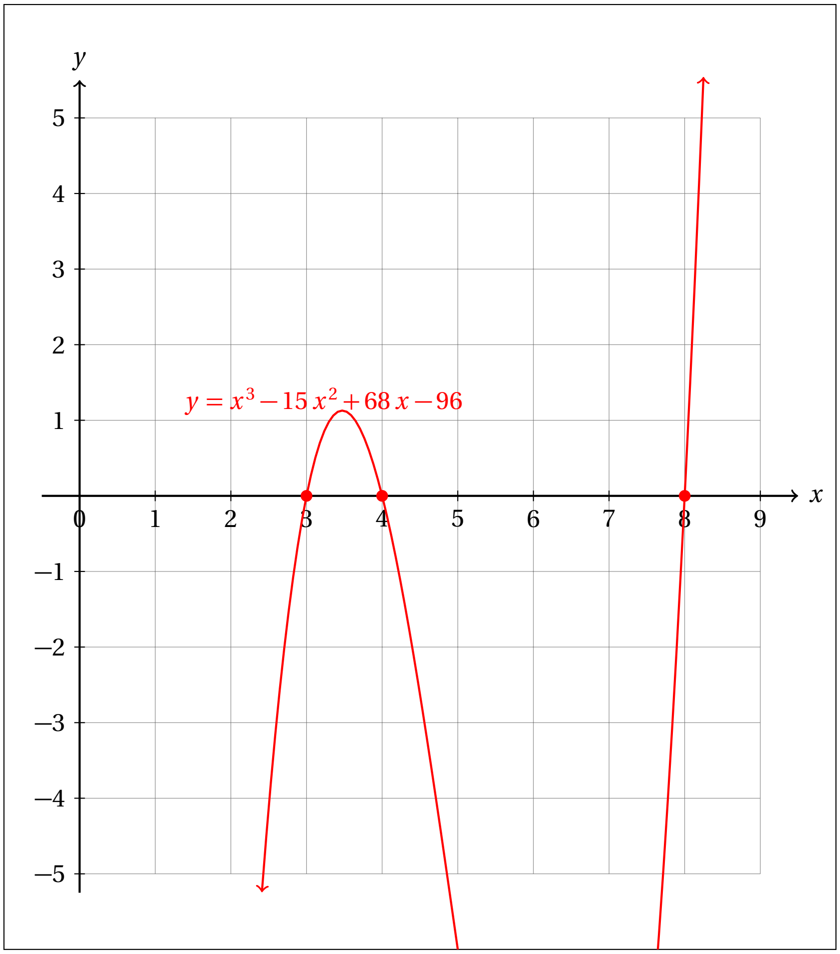
$$y = x^3 - 15\,x^2 + 68\,x - 96 = (x-4)(x-3)(x-8)$$

- De aquí vemos que las raíces de la función son: 4, 3 y 8.

- Ahora solamente falta graficarla.

- La siguiente gráfica se ha cortado a propósito por cuestiones de espacio.

- Tú ya sabes que toda función polinomial es contínua y que su dominio es el conjunto de los números reales.



Observa que el último teorema mencionadose refiere solamente a las funciones polinomiales de grado impar.

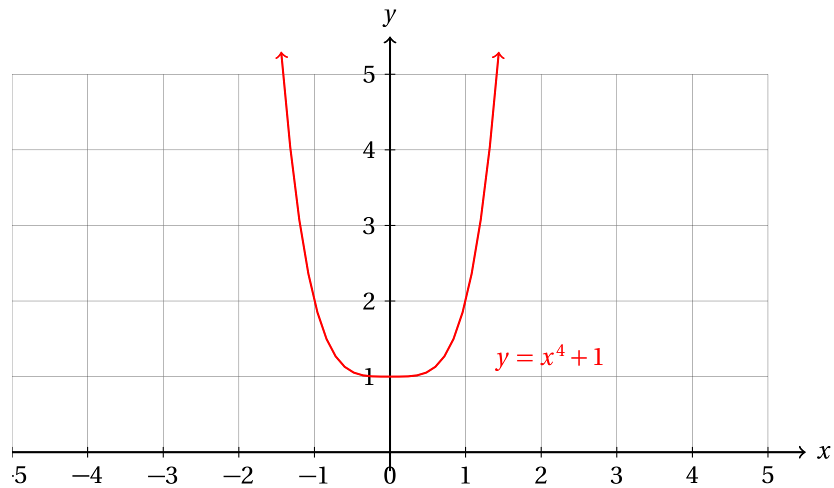
En el caso de las funciones de grado par, no necesariamente ocurre que tendrán al menos una raíz real, porque la traslación vertical puede hacer que la función no corte al eje. Para esto, basta con trasladar la gráfica de la función lo suficiente para que el mínimo o máximo de la función quede por arriba o debajo (según sea el caso) del eje x.

Ejemplo 7

Grafica la función polinomial:

$$y = x^4 + 1$$

- La gráfica de esta función es muy sencilla.
- Cuando $x = 0$, $y = 1$.
- Además, dado que el grado de la función polinomial es par, la función siempre es positiva (en este caso).
- También, el mínimo de esta función está en $x = 0$.



- Observa que esta función no tiene raíces reales, porque al igualar a cero el polinomio que define a la función obtenemos:

$$x^4 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt[4]{-1} = \pm\sqrt{\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{i}$$

donde i es la unidad imaginaria.

El ejemplo anterior sirve como un contraejemplo del último teorema aplicado a las funciones polinomiales de grado par.

En conclusión, ese teorema solamente se cumple para funciones polinomiales de grado impar.

Ejercicios 16.1.5 Grafica cada una de las siguientes funciones polinomiales. Calcula también su dominio, contradominio, intersección con los ejes y sus raíces en caso de ser posible.

1) $f(x) = x^3 - x^2$ — $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$
2) $f(x) = x^3 - 4\,x$ — $x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2$
3) $f(x) = x^3 - 8\,x$ — $x_1 = 0,\ x_2 = -2\sqrt{2},\ x_3 = 2\sqrt{2}$
4) $f(x) = x^3 - 9\,x^2$ — $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 9$
5) $f(x) = x^3 - \sqrt{5}x^2$ — $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{5}$
6) $f(x) = x^4 - x^2$ — $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$
7) $f(x) = x^4 - 4\,x^2$ — $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2$
8) $f(x) = x^4 - 8\,x$ — $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1 - i\sqrt{3},\ x_4 = -1 + i\sqrt{3}$
9) $f(x) = x^4 - 16$ — $x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2\,i,\ x_4 = -2\,i$
10) $f(x) = x^4 - 1$ — $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -i,\ x_4 = i$

Instrucciones A través de la división sintética calcula $f(k)$ para cada x_0 dado.

11) $f(x)=x^4+3x^3+2x^2+x+1,\ x_0=2$ $f(x_0)=51$

12) $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1,\ x_0=-2$ $f(x_0)=11$

13) $f(x)=x^4-x^3+x^2-x+1,\ x_0=-2$ $f(x_0)=31$

14) $f(x)=-x^3+x^2-x+1,\ x_0=-2$ $f(x_0)=-5$

15) $f(x)=x^3+2x^2-x+1,\ x_0=-2,1$ $f(-2)=3,\ f(1)=3$

16) $f(x)=-2x^3+2x^2-x+1,\ x_0=-1,1$ $f(-1)=6,\ f(1)=0$

17) $f(x)=x^4-2x^3+x^2-x+2,\ x_0=-1,1$ $f(-1)=7,\ f(1)=1$

18) $f(x)=x^4-x^3+x^2-5x+2,\ x_0=-1,1$ $f(-1)=10,\ f(1)=-2$

19) $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+7,\ x_0=1,2,3$ $f(1)=1,\ f(2)=-19,\ f(-1)=17$

20) $f(x)=x^4-7x^3+5x^2-3x+2,\ x_0=-2,-1,0,1,2$ $f(-2)=100,\ f(-1)=18,\ f(0)=2,\ f(1)=-2,$ $f(2)=-24$

Conociendo la raíz dada, calcula las demás raíces de cada función polinomial dada y exprésala en forma de producto de binomios. **Instrucciones**

21) $f(x)=x^3-13x+12,\ r_1=3$ Raíces: $x_1=3,\ x_2=-4,\ x_3=1,\ f(x)=(x-3)(x+4)(x-1)$

22) $f(x)=x^3+13x^2+26x-112,\ r_1=8$ Raíces: $x_1=8,\ x_2=-7,\ x_3=2,\ f(x)=(x-8)(x+7)(x-2)$

23) $f(x)=x^4+3x^3-54x^2-112x,\ r_1=7$ Raíces: $x_1=7,\ x_2=-8,\ x_3=-2,\ f(x)=x(x+8)(x-7)(x+2)$

24) $f(x)=x^4-9x^3+21x^2+x-30,\ r_1=5$ Raíces: $x_1=5,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=-1,$ $f(x)=(x-2)(x-5)(x-3)(x+1)$

25) $f(x)=x^4+3x^3-27x^2+13x+42,\ r_1=-7$ Raíces: $x_1=-7,\ x_2=-1,\ x_3=3,\ x_4=2,$ $f(x)=(x+1)(x+7)(x-3)(x-2)$

26) $f(x)=x^4+5x^3-7x^2-29x+30,\ r_1=-5$ Raíces: $x_1=-5,\ x_2=1,\ x_3=-3,\ x_4=2,$ $f(x)=(x-1)(x+5)(x+3)(x-2)$

27) $f(x)=x^4-34x^2+225,\ r_1=5$ Raíces: $x_1=5,\ x_2=-5,\ x_3=3,\ x_4=-3,\ f(x)=(x-5)(x+5)(x-3)(x+3)$

28) $f(x)=x^4+2x^3-13x^2-14x+24,\ r_1=3$ Raíces: $x_1=3,\ x_2=1,\ x_3=-4,\ x_4=-2,$ $f(x)=(x-1)(x+4)(x+2)(x-3)$

29) $f(x)=x^4+5x^3-7x^2-29x+30,\ r_1=2$ Raíces: $x_1=2,\ x_2=-5,\ x_3=1,\ x_4=-3,$ $f(x)=(x-2)(x+5)(x-1)(x+3)$

30) $f(x)=x^4-x^3-19x^2-11x+30,\ r_1=-3$ Raíces: $x_1=-3,\ x_2=-2,\ x_3=1,\ x_4=5,$ $f(x)=(x+2)(x-5)(x-1)(x+3)$

31) $f(x)=x^4+10x^3+20x^2-10x-21,\ r_1=1$ Raíces: $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=-7,\ x_4=-3,$ $f(x)=(x+7)(x-1)(x+1)(x+3)$

32) $f(x)=2x^4-2x^3-22x^2+18x+36,\ r_1=3$ Raíces: $x_1=3,\ x_2=-3,\ x_3=2,\ x_4=-1,$ $f(x)=(2(x-2))(x-3)(x+1)(x+3)$

33) $f(x)=x^4+x^3-21x^2-x+20,\ r_1=4$ Raíces: $x_1=4,\ x_2=1,\ x_3=-1,\ x_4=-5,$ $f(x)=(x-4)(x-1)(x+1)(x+5)$

34) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 35x^2 + 36x + 180$, $r_1 = 6$ Raíces: $x_1 = 6$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = -5$,
$f(x) = (x-6)(x-3)(x+2)(x+5)$

35) $f(x) = x^4 - x^3 - 39x^2 - 31x + 70$, $r_1 = 7$ Raíces: $x_1 = 7$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = -5$,
$f(x) = (x-7)(x-1)(x+2)(x+5)$

Capítulo 17

Funciones racionales

Por aprender...

Por qué es importante...

Las funciones racionales se forman a partir de las funciones polinomiales. De la misma manera que al dividir dos enteros obtenemos un número racional, al dividir dos polinomios obtenemos una expresión racional, que puede convertirse en una función al igualarla a una variable.

17.1 La función racional

Ahora estudiaremos una extensión de las funciones polinomiales.

Las funciones racionales se definen a partir de las funciones polinomiales.

Esta generalización es semejante a la que se hace al crear los números reales a partir de los números enteros. Pero ahora nosotros estamos hablando de funciones, que son un objeto más abstracto.

En cierto sentido, estaríamos tratando a un conjunto de puntos (todos los pares (x, y) que satisfacen $y = f(x)$) como si se tratara de un solo punto.

17.1.1 Concepto de Función Racional

En matemáticas se definen los números racionales como el cociente de dos números enteros, donde el denominador es distinto de cero.

En análisis de funciones la función racional se define de manera semejante.

Definición 1

Función racional

Una función racional es cualquier función que se puede escribir de la forma:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n y $Q_n(x)$ es otro polinomio de grado m.

Ejemplo 1

Las siguientes funciones son racionales:

- $y = \dfrac{x}{1-x}$, en este caso $P_n(x) = x$, y $Q_m(x) = 1 - x$.
- $y = \dfrac{1}{x^2-4}$, en este caso $P_n(x) = 1$, y $Q_m(x) = x^2 - 4$.
- $y = \dfrac{1}{(x+1)(x+5)}$, en este caso $P_n(x) = 1$, y $Q_m(x) = x^2 + 6x + 5$.
- $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, en este caso $P_n(x) = x^2 - 1$, y $Q_m(x) = x^2 + 1$.
- $y = \dfrac{x^5-1}{x^6+1}$, en este caso $P_n(x) = x^5 - 1$, y $Q_m(x) = x^6 + 1$.
- $y = \dfrac{x^3-27}{x^2+1}$, en este caso $P_n(x) = x^3 - 27$, y $Q_m(x) = x^2 + 1$.
- $y = \dfrac{x}{x^2+5x+12}$, en este caso $P_n(x) = x$, y $Q_m(x) = x^2 + 5x + 12$.
- $y = \dfrac{1-x}{x+x^2+x^3+x^4}$, en este caso $P_n(x) = 1 - x$, y $Q_m(x) = x + x^2 + x^3 + x^4$.
- $y = \dfrac{\sqrt{2}\,x+1}{\sqrt{2}\,x-1}$, en este caso $P_n(x) = \sqrt{2}\,x + 1$, y $Q_m(x) = \sqrt{2}\,x - 1$.
- $y = \dfrac{x^4-x^3+x^2}{x^4-1}$, en este caso $P_n(x) = x^4 - x^3 + x^2$, y $Q_m(x) = x^4 - 1$.

Observa que para que la función sea racional debe poder expresarse como el cociente de dos polinomios.

Recuerda que las constantes son consideradas polinomios de grado cero.

Entonces, las funciones polinomiales también caen dentro de las funciones racionales, porque en ese caso, el polinomio denominador $Q_m(x)$ será el polinomio constante $Q_0(x)=1$.

En otras palabras, todas las funciones polinomiales son funciones racionales, pero no todas las funciones racionales son funciones polinomiales.

De todas las funciones racionales que se dieron en el ejemplo anterior ninguna es una función polinomial.

Ahora debemos resolver las preguntas: «*¿Cuál es el dominio de una función racional?*», y «*¿Cuál es su contradominio?*»

Dado que el dominio de cualquier función polinomial es el conjunto de los números reales, esperamos que el dominio de cualquier función racional sea $\mathbb{R}$, excepto aquellos puntos donde el denominador sea cero, es decir, excepto los valores de x para los cuales $Q_m(x)=0$. Estos puntos no son sino las raíces del polinomio denominador de la función racional.

Entonces, si $r_1, r_2, \cdots, r_m$ son las raíces de $Q_m(x)$, el dominio de la función racional

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

es el conjunto $\mathbb{R}-\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$.

¿Qué pasa cuando $Q_m(x)=0$?

Si $x=r$ es una raíz del polinomio $Q_m(x)$, el cociente $P_n(r)/Q_m(r)$ no está definido, es decir, $f(r)$ no está definido en el punto $x=r$. Ya dijimos que este punto no está en el dominio de la función.

Entonces, los valores de $f(x)$ cuando x se va acercando a r tienden a crecer mucho (pudiendo tener valores positivos como negativos, dependiendo de la naturaleza de $Q_m(x)$) y en ese caso tenemos una discontinuidad de la gráfica de la función racional.

También es importante considerar cuál de los dos polinomios crece más rápido. Con esto queremos decir si comparamos los valores que obtenemos de cada polinomio $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ cuando asignamos a cada uno de ellos el mismo valor creciente cada vez y comparar los resultados.

Este análisis nos ayudará a determinar cómo se comporta la gráfica de la función racional.

En general, los polinomios de mayor grado crecen más rápido que los polinomios de grados inferiores.

Por ejemplo, el polinomio $y=x^2+1$ crece más rápido que el polinomio $y=x+15$. Puedes verificar esto sustituyendo los mismos valores de x en cada polinomio y viendo qué resultados obtienes de cada polinomio.

Ejemplo 2

Compara el crecimiento de los polinomios:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= x^3+1 \\ Q_4(x) &= x^4-1 \end{aligned}$$

- Para compararlos vamos a hacer una tabla para asignar valores de x y calcular los resultados que se obtienen al sustituir cada valor de x en cada uno de los polinomios:

x	x^3+1	x^4-1
0	1	-1
1	2	0
2	9	15
3	28	80
4	65	255
5	126	624

- De la tabla se hace más que evidente que el polinomio de grado 4 crece mucho más rápido que el polinomio de grado 3.
- Podemos utilizar cualquier polinomio de grado 3 y para valores de x grandes, el polinomio de grado 4 siempre crecerá más rápido que el de grado 3.

Conocer cómo crecen los valores de los polinomios que forman una función racional nos ayudará a conocer cómo sus valores, y por tanto, su gráfica.

Ejemplo 3

Elabora un estudio analítico del crecimiento de los valores de y en la función racional:

$$y=\frac{x^3+1}{x^4-1}$$

- En el ejemplo anterior vimos que los valores de $Q_m(x)=x^4-1$ crecen más rápido que los valores de $P_n(x)=x^3+1$
- Recuerda que al sustituir un valor específico de x, las expresiones $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ se conviernten en números reales.
- Observa que para valores grandes de x el numerador tendrá elmismo signo que x.
- Esto es, el numerador será positivo cuando x sea positiva y será negativo cuando x sea negativa.
- Por otra parte si $x>1$, para el denominador, independientemente del signo de x, los valores serán positivos.
- Esto nos indica que el signo de y (para valores grandes de x) está determinado por el numerador.
- También observa que para valores suficientemente grandes de x, tendremos una fracción con el denominador mayor al numerador.
- Entonces, el valor de esta fracción será menor a 1.
- Y conforme x crezca, la diferencia entre los polinomios será cada vez más grande y eso ocasionará que el cociente se acerque cada vez más a cero.

Entonces, cuando tengamos una función racional:

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

con $n > m$, los valores del cociente (y por tanto de y), tenderán a crecer conforme los valores de x crezcan mucho.

Por otra parte, cuando $n < m$ los valores de y tenderán a cero, porque el cociente siempre será menor a 1, dado que el denominador será mayor al numerador (para valores de x suficientemente grandes).

Ejemplo 4

Elabora un estudio analítico del crecimiento de los valores de y en la función racional:

$$y = \frac{x^5}{1+x}$$

- Con observar que x^5 crece mucho más rápido que cualquier polinomio lineal, podemos fácilmente deducir que el numerador será siempre, en valor absoluto, mayor que el denominador.
- Entonces, los valores del cociente, y por tanto, los valores de y tenderán a crecer mucho.
- Cuando x sea negativa, tendremos que x^5 también será negativa.
- Por su parte, $1+x$ también será negativa siempre que $x < 1$.
- Entonces el cociente será positivo.
- Para el otro caso, cuando los valores de x son positivos y suficientemente grandes, tanto el numerador como el denominador serán positivos.
- Esta función se hace cero cuando $x = 0$, porque el numerador entonces se hace cero.
- Cuando $x = -1$ la función no está definida.
- Esto es así porque en ese valor el denominador es cero, y la división $-1/0$ no tiene sentido.
- Geométricamente, la gráfica de esta función presenta una discontinuidad cuando $x = -1$.

Observa que para calcular las raíces de una función racional basta igualar el numerador a cero, porque:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_n(x) = 0 \cdot (Q_m(x)) = 0$$

Finalmente estudiaremos el caso particular, cuando $n = m$, los dos polinomios de la función racional tienen el mismo grado y por tanto tienden a crecer con la misma rapidez.

Entonces tendremos que los valores de y se aproximan a una constante, igual al cociente de los coeficientes principales de los polinomios que forman la función racional.

Ejemplo 5

Cuando los valores de x son muy grandes, a qué valor se aproxima el valor de

$$y = \frac{3\,x^2 - 1}{2\,x^2 + 1}$$

- Cuando los valores de x son muy grandes los términos constantes se hacen despreciables.
- Con esto se quiere decir que si comparamos, por ejemplo, $3\,(12)^2 = 432$ con -1 restarle o no restarle el 1 al numerador no causa gran diferencia en el resultado del cociente.
- Lo mismo pasa con el denominador.

- Si $x \neq 0$, podemos dividir en el numerador como en el denominador entre x^2, obteniendo una fracción equivalente:

$$y = \frac{\dfrac{3\,x^2-1}{x^2}}{\dfrac{2\,x^2+1}{x^2}} = \frac{3-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}$$

- Cuando los valores de x crecen, el cociente $1/x^2$ se acerca mucho a cero muy rápidamente.
- Este término se hace despreciable y el cociente se acerca cada vez más a $3/2$.
- Observa que estos son los coeficientes principales de los polinomios que forman la función racional.

En general, cuando los valores de x crecen mucho, los valores de la función racional:

$$y = \frac{a_n\,x^n + \cdots + a_1\,x + a_0}{b_n\,x^n + \cdots + b_1\,x + b_0}$$

tienden al cociente a_n/b_n.

Para justificar este resultado podemos dividir en el numerador y en el denominador de la función racional entre x^n y observar que x^n crece más rápido que cualquier otro término de cada polinomio involucrado en la función (salvo él mismo) y que todos los demás términos se acercan a cero cuando x crece mucho y finalmente, obtenemos el cociente a_n/b_n.

17.1.2 Gráficas de las funciones racionales

Ahora vamos a estudiar de una manera geométrica las ideas de comportamiento de los valores que toma la función cuando los valores de x crecen mucho.

Es importante que hayas entendido los argumentos que se dieron en la sección anterior para poder justificar por qué las gráficas de cada función tienen la forma que se muestra en cada ejemplo.

Empezamos con un ejemplo muy sencillo de función racional.

Ejemplo 1

Estudia analíticamente la gráfica de la función racional:

$$y = \frac{1}{x-2}$$

Calcula su dominio y su contradominio.

- La primera pregunta que debes hacer al encontrar una función racional es:

Comentario

¿Qué valor de x hace que el denominador de la función sea cero?

- En este caso la respuesta es muy sencilla:

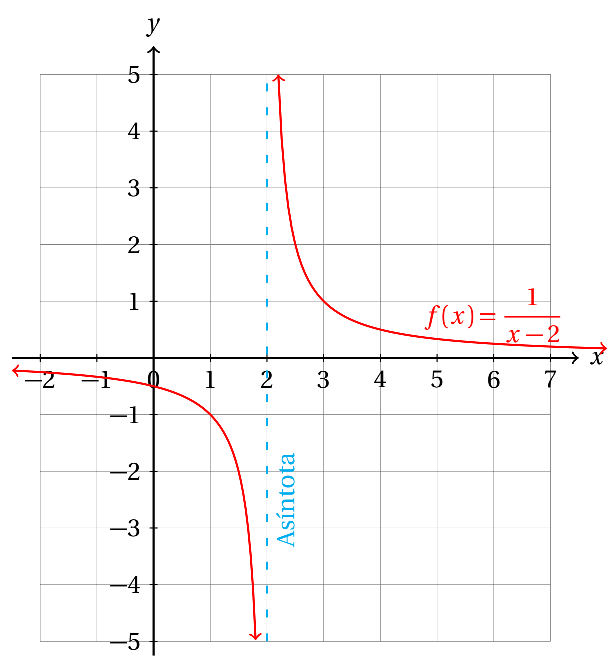
«*Si* $x = 2$*, entonces,* $x - 2 = 0$.»

- Entonces, la función no está definida cuando $x = 2$, porque en ese caso tenemos división entre cero.
- En ese punto la función no tiene gráfica.

- Observa que el signo del cociente depende del denominador, porque el numerador siempre es positivo.
- Para valores en los que $x > 2$, el resultado de $x - 2$ es positivo.
- Entonces, los resultados del cociente $1/(x-2)$ también serán positivos.
- Por otra parte, cuando $x < 2$, se tiene que $x - 2 < 0$.
- Ahora los valores de $y = 1/(x-2)$ serán negativos.
- Como en la cercanía del punto $x = 2$, los valores del cociente crecen mucho, la gráfica de la función se va a infinito por un lado y a menos infinito por el otro.
- Para calcular el dominio de la función vamos a responder la pregunta:

Comentario ¿Para qué valores de x la función asigna valores a y?

- La respuesta a esta pregunta es: «*para todos los números reales, excepto* 2».
- La excepción del 2 se debe a que cuando $x = 2$ el denominador se hace cero y la división no tiene sentido entonces.
- Este resultado se escribe así: $\mathbb{R} - \{2\}$.



- El contradominio consiste en el conjunto de los números reales, excepto el cero.
- Eso es evidente de la gráfica y del análisis que se acaba de hacer.
- Entonces, el contradominio de la función es: $\mathbb{R} - \{0\}$.

Para justificar que el cero no está en el contradominio de la función observa que si existe algún valor x para el cual $\dfrac{1}{x-2} = 0$, necesariamente debemos tener que $1 = 0 \cdot (x-2) = 0$. Aquí hemos llegado a una conclusión que no tiene sentido: $1 \neq 0$.

Esto nos indica que la suposición inicial no tiene sentido. Esa suposición inicial decía: «*existe algún valor x para el cual* $\dfrac{1}{x-2}=0$», la cual es, entonces, falsa.

Estudia analíticamente la gráfica de la función racional:

$$y=\frac{1}{x-r}$$

Calcula su dominio y su contradominio.

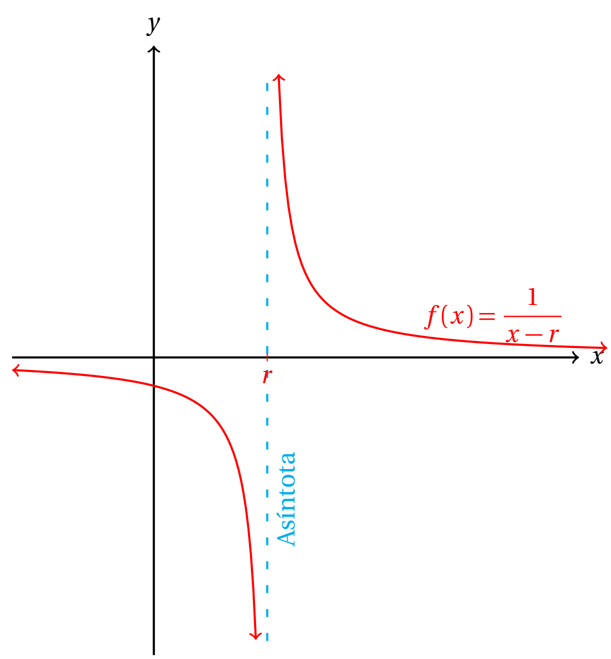
Ejemplo 2

- La primera pregunta que debes hacer al encontrar una función racional es:

  ¿Qué valor de x hace que el denominador de la función sea cero?

  Comentario

- La respuesta es muy sencilla: «*Si* $x=r$*, entonces,* $x-r=0$.»
- La función no está definida cuando $x=r$ *¿Puedes explicar por qué?*
- Para valores en los que $x>r$, el resultado de $x-r$ es positivo.
- Entonces, los resultados del cociente $1/(x-r)$ también serán positivos.
- Y cuando $x<r$, se tiene que $x-r<0$, con lo que los valores de $1/(x-r)$ serán negativos.
- Como en la cercanía del punto $x=r$ los valores del cociente crecen mucho, la gráfica de la función se va a infinito por un lado y a menos infinito por el otro.
- La siguiente gráfica muestra esta situación:



- De nuevo, la discontinuidad de la función aparece en el punto en el que el denominador se hace cero.
- El dominio de esta función corresponde al conjunto: $\mathbb{R}-\{r\}$.

- El contradominio consiste en el conjunto de los números reales, excepto el cero.
- Eso es evidente de la gráfica y del análisis que se acaba de hacer.
- Entonces, el contradominio de la función es: $\mathbb{R} - \{0\}$.

Podemos generalizar los ejemplos anteriores y considerar casos en los que el denominador de la función racional tenga más de una raíz.

Ejemplo 3

Estudia analíticamente la función racional:

$$y = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$$

- Empezamos calculando las raíces del denominador:

$$\begin{aligned} (x+1)(x-2) = 0 \quad & \Rightarrow \\ x+1 = 0 \quad & \Rightarrow \quad x = -1 \\ x-2 = 0 \quad & \Rightarrow \quad x = 2 \end{aligned}$$

- Entonces, esta función no está definida para $x = -1$ ni para $x = 2$.
- La gráfica de esta función tiene tres ramas.
- Las ramas de la gráfica se formaron porque las raíces del denominador son puntos donde la gráfica tiene una discontinuidad.
- Observa que se formaron 3 intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, \infty)$.
- Ahora vamos a estudiar los signos de esta función en los intervalos que se forman.
- Como el numerador siempre es positivo, el signo del cociente es igual al signo del denominador.
- Cuando $x < -1$ el signo del cociente es positivo:

$$\text{sgn}(y) = \frac{+}{(-)(-)} = +$$

- Para el siguiente intervalo, cuando el valor de x está entre $x = -1$ y $x = 2$, el signo es negativo:

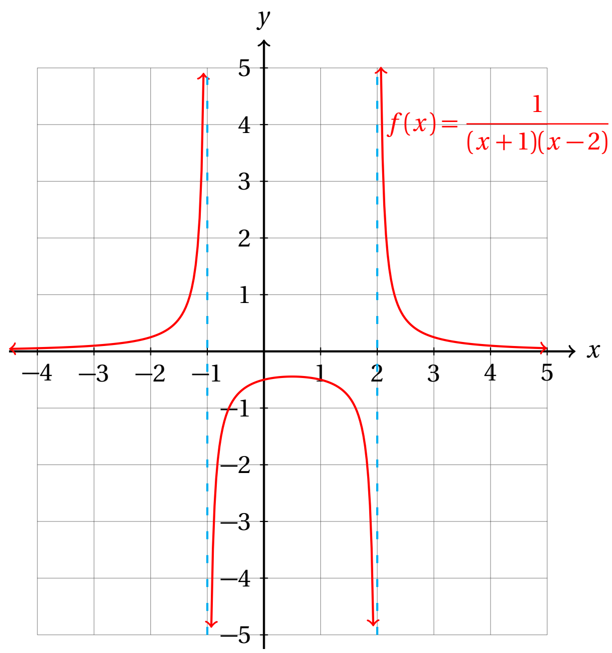
$$\text{sgn}(y) = \frac{+}{(+)(-)} = -$$

- Y para el último intervalo, cuando $x > 2$ el signo del cociente es positivo:

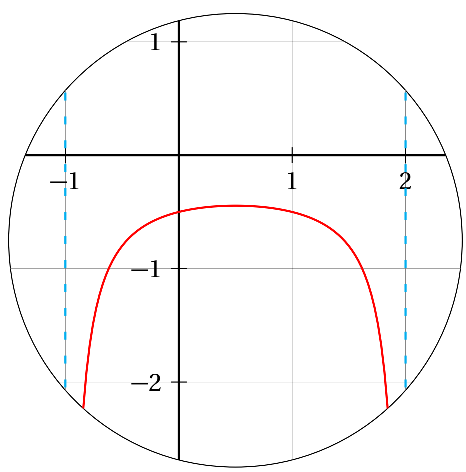
$$\text{sgn}(y) = \frac{+}{(+)(+)} = +$$

- Con esta información sabemos por dónde pasa la gráfica de la función.
- Sustituyendo algunos valores podemos obtener mayor información para poder hacer un bosquejo de la gráfica.
- Por ejemplo, cuando $x = 0$, tenemos que $y = -1/2$.

- La gráfica de esta gráfica se muestra enseguida:



- El dominio de esta función es evidente de su gráfica: $\mathbb{R}-\{-1,2\}$.
- Pero el contradominio no es tan sencillo.
- Sabemos que el intervalo $(0,\infty)$ es parte del contradominio.
- Pero para la parte negativa, no sabemos, porque no conocemos cuál es de punto máximo de la rama que está en el intervalo $(-1,2)$.
- Por simetría, *parece* que el máximo está a la misma distancia de las dos aristas.



- Vamos a calcular el valor de y en ese punto:

$$y(0.5)=\frac{1}{(1.5)(-1.5)}=-\frac{1}{2.25}=-\frac{4}{9}=-0.\overline{4}$$

- Vamos a suponer que ese valor es el máximo que toma esa rama de la gráfica de la función.
- Entonces, el contradominio sería: $\left(-\infty, -\frac{4}{9}\right] \cup (0, \infty)$.

Observa que no podemos asegurar que el contradominio está correcto, porque no tenemos cereza de que el máximo de la rama de la gráfica de la función esté exactamente en el punto que propusimos.

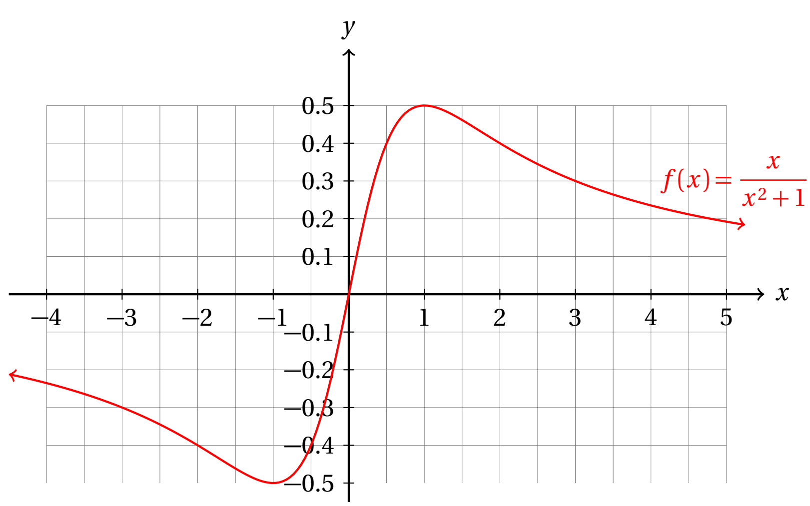
Para los ejemplos de esta sección con una aproximación así será suficiente.

Sí hay una manera de calcular el máximo de una función en un intervalo, pero eso lo estudiaremos el siguiente semestre. Por ahora con una aproximación así se considerará correcto.

Ejemplo 4

Grafica la función racional:
$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

- Si tratamos de resolver la pregunta: «*¿para qué valores de x el denominador de la función se hace cero?*», veremos que:
$$x^2+1=0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2=-1$$
- Que nos indica que el denominador de esta función nunca se hace cero.
- Esto a su vez nos dice que la gráfica de esta función no tiene asíntotas.
- Y esto es así porque la división siempre está definida.
- Pero hay algo más en esta función.
- Observa que el numerador ahora es el monomio: x.
- Dado que el denominador siempre es positivo, el signo de la función está determinado por el signo del numerador.
- Cuando $x<0$ el signo de y será negativo y cuando $x>0$ el signo de y será positivo.
- Pero cuando $x=0$, todo el cociente se hace cero:
$$y(0) = \frac{0}{1} = 0$$
- Esto nos indica que la gráfica de la función pasa por el origen.



- Como esta función está definida para cualquier valor de x, su dominio es $\mathbb{R}$.

- El contradominio de esta función al parecer es $[-0.5 : 0.5]$.

Ahora vamos a resolver un ejemplo que es a la vez muy parecido al anterior y también muy diferente. Ya verás por qué.

Grafica la función racional:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Ejemplo 5

- Este problema es muy parecido al anterior porque la función solamente cambia en un signo.

- Pero este cambio ocasiona que ahora aparezcan dos asíntotas, lo que hace que a la vez sea muy diferente.

- Empezamos calculando las raíces del polinomio denominador:

$$x^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{1}$$

- Las asíntotas están en $x = 1$, y en $x = -1$.

- Ahora vamos a estudiar los signos en los intervalos que se forman.

- Para eso vamos a reescribir la ecuación de la siguiente forma factorizada:

$$y = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

- Como el numerador se hace cero cuando $x = 0$, tenemos cuatro intervalos:

✓ **Primer Intervalo:** $(-\infty, -1)$.

$$y = \frac{-}{(-)(-)} = -$$

✓ **Segundo Intervalo:** $(-1, 0)$.

$$y = \frac{-}{(-)(+)} = +$$

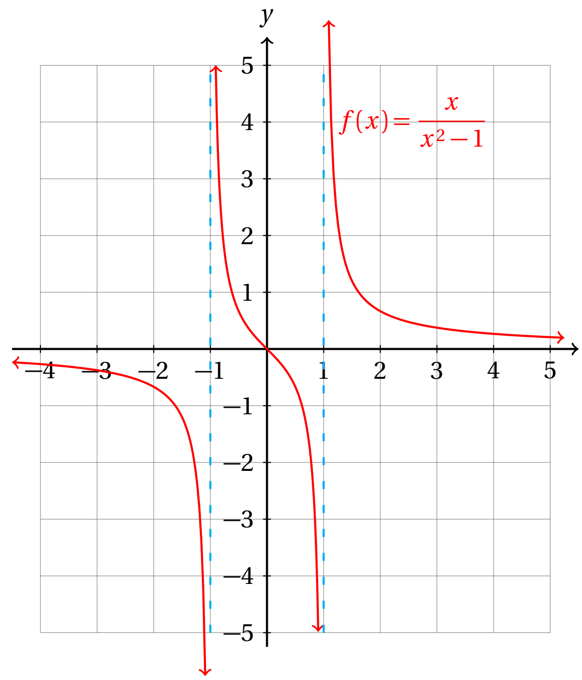
✓ **Tercer Intervalo:** $(0, 1)$.

$$y = \frac{+}{(+)(-)} = -$$

✓ **Cuarto Intervalo:** $(1, -\infty)$.

$$y = \frac{+}{(+)(+)} = +$$

- Ahora vamos a graficar la función:



- El dominio de esta función es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.
- Su contradominio es: $\mathbb{R}$, gracias a la rama del intervalo $(-1,1)$.

Compara las funciones y sus gráficas de los dos últimos ejemplos.

¿Cuál crees que es la razón del que las dos funciones, a pesar de ser tan parecidas tengan gráficas muy diferentes?

Ahora observa que para que $x^2-1>0$ se requiere que $x^2>1$.

Por eso, en el intervalo $(-1,1)$ el denominador es negativo.

Algo nuevo en el último ejemplo consiste en que esta función tiene una raíz, y está en $x=0$.

Ejemplo 6

Grafica la función racional:

$$y=\frac{1}{x\,(x+1)(x-1)}$$

- En esta función el denominador tiene 3 raíces:

  ✓ $x=0$ ✓ $x=-1$ ✓ $x=1$

- Debido a esto la gráfica de la función tiene 3 asíntotas en esos puntos.
- Vamos a estudiar los signos de y en los intervalos que se forman debido a las asíntotas.

  ✓ **Primer intervalo:** $(-\infty,-1)$

  $$y=\frac{+}{(-)(-)(-)}=-$$

  ✓ **Segundo intervalo:** $(-1,0)$

  $$y=\frac{+}{(-)(+)(-)}=+$$

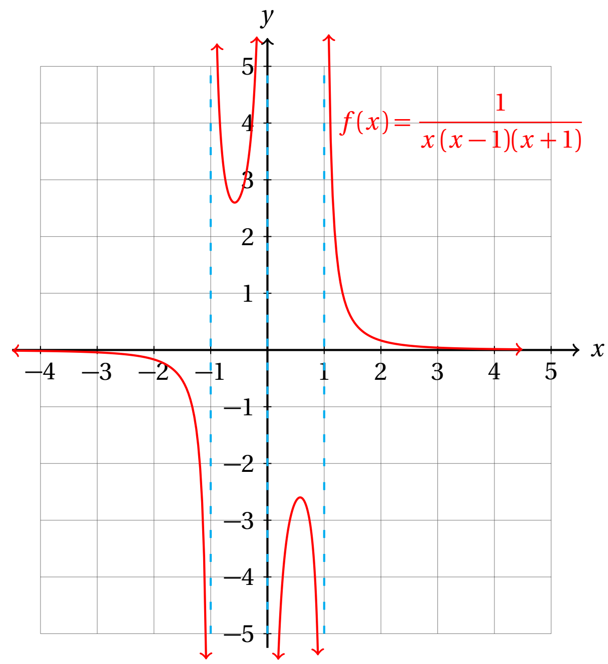
✓ **Tercer intervalo:** $(0,1)$

$$y = \frac{+}{(+)(+)(-)} = -$$

✓ **Cuarto intervalo:** $(1,\infty)$

$$y = \frac{+}{(+)(+)(+)} = +$$

- La gáfica de la función es la siguiente:



Hasta aquí hemos visto funciones racionales con asíntotas horizontales, por ejemplo, el eje x. Algunas otras funciones presentan asíntotas verticales, por ejemplo $x = 1$.

Hay todavía otra posibilidad. Una asíntota también puede ser inclinada.

Este caso ocurrirá cuando $n = m + 1$, es decir, cuando el grado del polinomio del numerador sea mayor al grado del polinomio del denominador en una unidad.

Para calcular la ecuación de la asíntota inclinada es una buena idea hacer la división que indica la función racional.

El resultado nos dirá cómo se comportan los valores de y cuando los valores de x estén suficientemente alejados de las asíntotas.

El siguiente ejemplo considera ese caso.

Ejemplo 7

Estudia analíticamente la función:

$$y = \frac{x^2+1}{x-1}$$

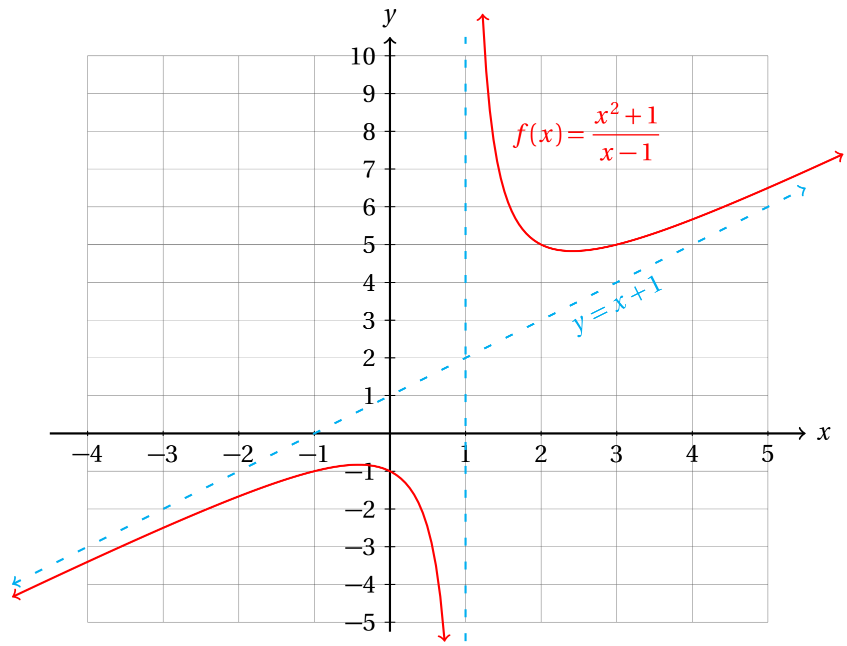
- Para conocer cómo se comportan los valores de y cuando x crece mucho, dividiremos en el numerador como en el denominador entre $3x$:

$$\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{\dfrac{x^2+1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}} = \frac{x+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$$

- Por el denominador, sabemos que una asíntota vertical está en $x = 1$.
- Más aún, cuando $x = 0$, $y = -1$.
- Observa que el numerador siempre es positivo.
- Esto nos dice dos cosas:
  - ✓ que el signo del cociente depende del denominador, y
  - ✓ que esta función no corta al eje x.
- Cuando x es muy grande, los segundos términos de cada parte de la fracción se hacen muy pequeños.
- Entonces, los valores de y cuando x es crece mucho tienden a crecer a la misma rapidez que x.
- Esto indica que crece igual de rápido que una recta de pendiente 1.
- Es decir, la gráfica de esta función cuando x se va a ∞ ó a $-\infty$ se parece mucho a una recta con pendiente 1.
- En este caso, la gráfica de la función no presenta asíntota horizontal, pues si tuviera, no podría tener una asíntota inclinada.
- Para calcular la ecuación de la asíntota se sugiere realizar la división indicada en la definición de la función racional.
- Al realizar la división obtenemos:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & x & + & 1 & & \\ \cline{2-6}
x-1 & x^2 & & & + & 1 \\
 & -x^2 & + & x & & \\ \cline{2-4}
 & & & x & + & 1 \\
 & & - & x & + & 1 \\ \cline{4-6}
 & & & 0\,x & + & 2
\end{array}
$$

- Entonces, la asíntota inclinada (u oblicua) es: $y = x + 1$.
- Observa que la pendiente de la recta coincide con la que se dedujo en en análisis inicial.
- Enseguida se muestra la gráfica de esta función:



- Verifica si los puntos $P(2,5)$ y $Q(3,5)$ están sobre la gráfica de la función.
- Se te queda como ejercicio calcular el dominio y el contradominio de esta función.

Ejercicios 17.1

Para cada una de las siguentes funciones racionales calcula:

- ✓ Raíces
- ✓ Asíntotas verticales
- ✓ Asíntotas horizontales
- ✓ Asíntotas inclinadas
- ✓ Dominio
- ✓ Rango

Elabora un estudio analítico del comportamiento de los valores que toma la función para valores grandes de x y grafíca la función. **Sugerencia:** *Factoriza los polinomios siempre que sea posible.*

1) $y = \dfrac{1}{x+3}$

2) $y = \dfrac{1}{x-3}$

3) $y = \dfrac{1}{x+3} + 1$

4) $y = \dfrac{x}{1+x}$

5) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

6) $y = \dfrac{3x+1}{1-2x}$

7) $y = \dfrac{x+5}{x(x^2+1)}$

8) $y = \dfrac{1-x}{x^2+5x+6}$

9) $y = \dfrac{x+7}{x^2-49}$

10) $y = \dfrac{x(x-1)}{(x+2)(x-3)}$

11) $y = \dfrac{1+x}{x^4-x}$

12) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

13) $y = \dfrac{2x+7}{x^2-12x+35}$

14) $y = \dfrac{x^2+1}{x^4-1}$

15) $y = \dfrac{3x+5}{x^3-4x^2+3x}$

16) $y = \dfrac{4x^2-9}{x+7}$

17) $y = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

18) $y = \dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

19) $y = \dfrac{x^3+2x}{x^2+1}$

20) $y = \dfrac{1+x+x^2}{1+x}$

21) $y = \dfrac{(x+5)(x-5)}{x^2-9}$

22) $y = \dfrac{1-x^3}{1+x^3}$

23) $y = \dfrac{1+x^3}{1-x^3}$

24) $y = \dfrac{x^4-1}{1-x^3}$

25) $y = \dfrac{x^4-1}{1+x^3}$

17.1.3 Variación inversa

La función racional más sencilla es:

$$y = \frac{1}{x}$$

Esta función en palabras nos dice que cuando x crece el valor de y decrece en la misma proporción.

por ejemplo, si el valor de x crece al doble, el valor de y decrece a la mitad, y si el valor de x crece al triple, entonces el valor de y decrece a la tercera parte.

Este tipo de variación se conoce como variación inversa.

Definición 1

Variación inversa

Dos cantidades x, y varían inversamente cuando al crecer la primera (x) la otra y decrece en la misma poporción.

Observa que si y varía en proporción inversa con x, entonces x también varía inversamente con y, porque:

$$\text{Si} \qquad y = \frac{1}{x} \qquad \text{entonces,} \qquad x = \frac{1}{y}$$

También es importante recordar que cuando $x = 0$ la división no tiene sentido.

En otras palabras, la variación inversa excluye los casos en los cuales $x = 0$, ó $y = 0$.

Ejemplo 1

Grafica la función $y = \dfrac{1}{x}$.

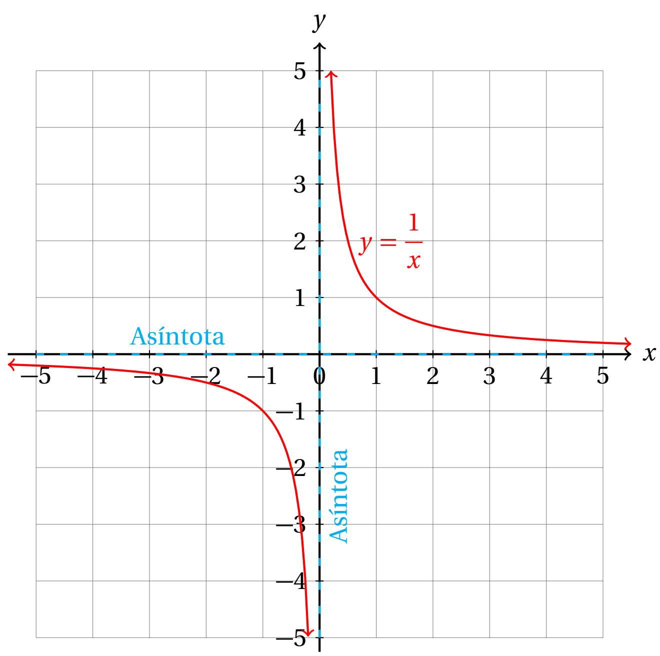
- El denominador de esta función se hace cero en $x = 0$.
- Entonces, el eje y es una asíntota vertical de la función.
- Pero como ya dijimos que si y varía inversamente con x, entonces x también varía linealmente con y, entonces el eje x también corresponde a una asíntota de la función, pero en este caso es horizontal.

$$y = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{y}$$

- Observa que podemos escribir la función de una manera equivalente como la ecuación:

$$x \cdot y = 1$$

- En esta forma nos damos cuenta que para que la expresión tenga sentido, ni x, ni y pueden ser cero. (¿Por qué?)
- También es importante notar que la gráfica nos debe sugerir que cuando los valores de x crecen los valores de x decrecen.
- Igual, cuando los valores de y crezcan, los valores de x deben decrecer.
- La gráfica de la función nos muestra estos resultados:



- Observa que si cambiamos el papel de las variables obtenemos exactamente la misma gráfica.
- Esto nos sugiere que si y varia inversamente con x, también x varía inversamente con y.

El caso más general se tiene cuando en el numerador tenemos una constante diferente de 1.

Esto nos servirá para resolver problemas prácticos.

4 pintores tardan 12 horas en terminar de pintar un edificio. ¿Cuánto tardarán en pintar el mismo edificio 16 pintores?	**Ejemplo 2**

- Primero debemos darnos cuenta que el tiempo que tarden en pintar el edificio varía inversamente con la cantidad de pintores.
- Es decir, si aumentamos al doble la cantidad de pintores que trabajarán, esperamos que tarden la mitad.
- Si disminuimos a la mitad la cantidad de pintores, esperamos que tarden el doble.

- Así que tenemos una relación del tipo:
$$y = \frac{k}{x}$$
donde y es el tiempo que tardarán en pintar el edificio, x es la cantidad de pintores asignados a esa tarea y k una constante característica del problema.

- Con los datos que nos dieron podemos calcular el valor de k.

- Con este fin, vamos a sustitir 12 en lugar de y, y 16 en lugar de x y a despejar k de esa expresión:
$$12 = \frac{k}{4} \qquad \Rightarrow \qquad k = (12)(4) = 48$$

- Para conocer cuánto van a tardar 16 pintores en terminar esa tarea sustituimos los valores conocidos y despejamos la incógnita del problema:
$$y = \frac{48}{x} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{48}{16} = 3$$

- Entonces, las 16 personas tardarán 3 horas.

- Observa que al aumentar al cuádruplo la cantidad de personas que terminarán la tarea, el tiempo disminuye a la cuarta parte.

Ejemplo 3

Dos trabajadores tardan 32 horas en terminar una tarea. ¿Cuántos trabajadores se requieren para que realicen la misma tarea en 4 horas?

- Si se asignan el doble de trabajadores deben tardar la mitad del tiempo.
  - ✓ Entonces, si hay 4 trabajadores deben tardar 16 horas,
  - ✓ y 8 trabajadores deben tardar 8 horas,
  - ✓ y 16 trabajadores deben tardar 4 horas,

- Todo esto, suponiendo que los trabajadores siempre trabajan al mismo ritmo y que no se estorban entre ellos para realizar la tarea.

Este tipo de problemas puede resolverse también usando la regla de tres, pero inversa.

Para esto vamos a escribir los datos como en la regla de tres directa, pero realizamos las operaciones en reversa:

	Trabajadores	$\Rightarrow$	**Horas**
Datos conocidos:	2	$\Rightarrow$	32
Para calcular:	T	$\Rightarrow$	4

Ahora, para calcular la incógnita T que representa al número de trabajadores que terminarán la tarea en 4 horas, usaremos la regla de tres inversa.

Si se tratara de la regla de tres directa, multiplicaríamos:

$$T = \frac{4 \times 2}{32} \qquad \textbf{Regla de tres directa}$$

pero ahora realizamos las operaciones leyendo al revés los datos:

$$T = \frac{32 \times 2}{4} \qquad \textbf{Regla de tres inversa}$$

El resultado coincide con el del último ejemplo:

$$T = \frac{32 \times 2}{4} = \frac{64}{4} = 16 \text{ trabajadores.}$$

Resuelve el ejemplo 2 de esta sección utilizando la regla de tres inversa.	**Ejemplo 4**

- El texto del ejemplo dos dice: «*4 pintores tardan 12 horas en terminar de pintar un edificio. ¿Cuánto tardarán en pintar el mismo edificio 16 pintores?* »
- Primero acomodamos los datos en la tabla:

	Pintores	⇒	**Horas**
Datos conocidos:	4	⇒	12
Para calcular:	16	⇒	h

- Entonces, usando la regla de tres inversa, calculamos el valor de nuestra incógnita h:

$$h = \frac{4 \times 12}{16} = \frac{48}{16} = 3$$

- Y así obtenemos el mismo resultado.
- Observa que al utilizar la regla de tres inversa nos ahorramos el cálculo de la constante de proporcion inversa.

---

300 ml de una disolución de ácido sulfúrico H_2SO_4 al 63% se diluyeron al agregar 600 ml de agua destilada. ¿Cuál es la concentración de la nueva disolución del ácido?	**Ejemplo 5**

- La disolución originalmente tenía un volumen de 300 ml.
- Como se agregaron 600 ml, la nueva disolución tiene el triple del volumen.
- Al tener mayor volumen, la concentración de la disolución disminuye.
- Es decir, la concentración varía inversamente con el volumen.
- Entonces, para este problema tenemos:

$$C = \frac{k}{V}$$

  donde C es la concentración de la disolución y V es el volumen.

- Primero calculamos el valor de la constante de la función:

$$63 = \frac{k}{300} \qquad \Rightarrow \qquad k = (63\%)(300 \text{ ml}) = 18\,900 \text{ \% ml}.$$

- Ahora sustituimos el volumen de la nueva disolución en la fórmula para obtener:

$$C = \frac{18\,900 \text{ \% } \cancel{\text{ml}}.}{900 \cancel{\text{ ml}}} = 21 \text{ \%}.$$

- Observa que como el volumen aumentó al triple, la concentración disminuyó a una tercera parte.
- Usando la regla de tres inversa, tenemos:

	Concentración (%)	⇒	Volumen (ml)
Datos conocidos:	63	⇒	300
Para calcular:	C	⇒	900

- Entonces,

$$C = \frac{300 \times 63}{900} = \frac{18\,900}{900} = 21$$

- Justifica cada paso de la regla de tres observando el primer procedimiento.

Antes de aplicar la regla de tres inversa verifica que las cantidades relacionadas presentan este tipo de proporción.

Algunas veces encontrarás problemas en los que aparecen varias cantidades que presentan variación inversa respecto a otra cantidad.

Ejercicios 17.1 Resuelve los siguientes ejercicios de variación inversa por los dos métodos estudiados en esta sección.

1) Una llanta que tiene un uso de 4 horas diarias dura en promedio 1 460 días. Un taxista piensa que su coche utilizará esas llantas 15 horas. ¿Cuántos días debe esperar que le duren? 389 días.

2) Un tren de juguete que trabaja con baterías dura funcionando 5 horas cuando tiene una carga de 2 kilogramos. Si se aumenta la carga a 3.5 kilogramos, cuánto se espera que tarde trabajando? (supónga que la masa del tren no ocasiona descarga de las baterías.) 2.85 hrs ≈ 2 hrs 51 min 25.71 seg.

3) 750 ml de una disolución de alcohol al 27% se diluyó agregando agua hasta obtener un volumen final de 2.5 litros. ¿Cuál es la concentración final de la solución? 8.1%

4) En una isla tienen agua potable que requieren 30 personas durante un año. Al llegar 75 visitantes el agua durará menos. ¿Cuánto tiempo les durará esa reserva de agua? ≈ 104 días.

5) Una planta de tratamiento de aguas residuales puede potabilizar 35 000 litros de agua al día (trabajando 24 horas). Si se desea que esa cantidad de agua se potabilice en tan solo media hora, ¿cuántas plantas de tratamiento de aguas residuales se requieren? 48 plantas.

6) La Ley de Boyle de los gases dice: «*los volúmenes ocupados por una masa gaseosa a temperatura constante son inversamente proporcionales a las presiones que soporan.*»[19] Si una masa de 8 gr de un gas ocupa un volumen de 12 litros a una presión de 40 cm de mercurio, ¿qué volumen ocupará esa misma cantidad de gas si la presión cambia a 32 cm de mercurio? 15 litros.

7) La longitud focal de una fotografía es la distancia (D) desde la cámara al punto donde ésta enfoca. El valor de f varía inversamente con esta distancia. Para una lente particular (distancia focal de 100 mm) el diámetro de la lente de la cámara es de 50 mm, y el valor de f es de 2. ¿Cuál es la función de variación inversa que modela esta situación? $f = 100/D$

8) La intensidad de iluminación (medido en candelas) que emite una lámpara sobre una superficie es inversamente proporcional a la distancia de la cual se encuentra. Cuando se encuentra a 1.50 metros de distancia de una mesa de laboratorio, una lámpara ilumina con una intensidad de 200 candelas. ¿Con qué intensidad iluminaría esa lámpara a la mesa si se acerca a 50 cm? 600 candelas.

9) La intensidad de corriente eléctrica varía inversamente con la resistencia eléctrica del conductor por el cual pasa. La corriente en un circuito es de 3 amperios cuando la resistencia es de 25 ohms. Si la resistencia aumenta a 100 ohms, ¿cuál será la intensidad de corriente eléctrica? 0.75 amperios.

10) La intensidad de un sonido varía inversamente con la distancia a su fuente. En un concierto, la intensidad de la música a 15 metros de las bocinas es de 350 decibeles. ¿Qué intensidad será el sonido a 1.5 km? 3.5 decibeles.

11) Grafica las hipérbolas $x \cdot y = k$, haciendo $k = 2, 3, 4, 5, \cdots, 10$. ¿Puedes explicar por qué ninguna de las gráficas corta a alguno de los ejes coordenados? Relaciona esto con alguno de los ejercicios anteriores.

12) Un contratista dijo a un cliente que el tiempo que tardará en terminar un proyecto es inversamente proporcional a la cantidad de dinero que se invierta en él, porque con mayor inversión él puede contratar más trabajadores para terminar antes. Él mencionó que el proyecto se termina en 90 días si invierte $3 000 000.00 de pesos. ¿Cuánto requiere de invertir si desea que el proyecto se termine en 75 días? $3 600 000.00 pesos.

13) De acuerdo a la segunda ley de Newton, la fuerza F (medida en Newtons) causa una aceleración a (medida en m/s^2) inversamente proporcional a la masa m (medida en kg) del cuerpo sobre la cual se aplica. Una fuerza de 1 575 Newtons se aplica a un coche y éste sufre una aceleración de 3 m/s^2. ¿Cuál es la masa m de ese coche? $m = 525$ kg.

14) En una reunión de n amigos acordaron dividir el costo de la cena en partes iguales entre todos, para que cada uno pague p pesos. Si la cuenta ascendió a $1 275.00 pesos. ¿Cuál es la función que modela esta situación? $p = 1\,275/n$.

15) La presión P sobre una superficie que contiene un gas es inversamente proporcional al área A del recipiente que lo contiene. **a** Escribe la función que modela esta situación. **b** Un cilindro con 300 cm^2 de aire está a una presión de 1.2 atmósferas. ¿Qué presión soportará si se cambia su superficie a 500 cm^2? **a** $P = k/A$. **b** $P = 0.72$ amósferas.

Capítulo 18

Funciones exponencial y logarítmica

Por aprender...

Por qué es importante...

Las funciones exponenciales y las logarítmicas sirven para modelar crecimiento de poblaciones, decaimiento radiactivo, procesos químicos, concentración de soluciones químicas, interacción entre poblaciones dentro de un ecosistema, circuitos eléctricos, finanzas, etc., así como muchos otros fenómenos.

18.1 Función exponencial

La función exponencial viene de la generalización de la función polinomial.

Si consideramos la función: $y = x^2$, por ejemplo, cabe preguntarnos, «*¿cómo se comportaría la función si cambiamos de lugar la base y el exponente?*» Es decir, si escribimos: $y = 2^x$, obtenemos otra función que es completamente diferente a la función $y = x^2$.

Este tipo de funciones son las que vamos a estudiar.

18.1.1 Concepto de función exponencial

La función exponencial se define a partir de la motivación anterior.

La única diferencia consiste en que la base no debe necesariamente ser 2. Puede ser cualquier constante positiva diferente de cero o uno.

Función exponencial

Una función f es exponencial si se puede expresar en la forma:

$$f(x) = k \cdot a^x$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es la base de la función exponencial, y es distinta a cero y a uno.

Definición 1

Observa que si $a = 0$, entonces $a^x = 0$, independientemente del valor que le asignemos a x.

De manera semejante, si $a = 1$, se sigue que $a^x = 1$ para todo x.

Las siguientes funciones son exponenciales.

Ejemplo 1

- $y = 3^x$
- $y = 5 \cdot 2^{x/3}$
- $y = \dfrac{2^x}{\sqrt{5}}$
- $y = 3 \cdot 10^{-x}$
- $y = \pi^x$
- $y = a \cdot \left(\dfrac{2}{7}\right)^x$, donde a es un número real.

Observa que el valor de la base puede ser cualquier número real positivo. No necesariamente debe ser un número entero.

Grafica la función exponencial:

$$y = 2^x$$

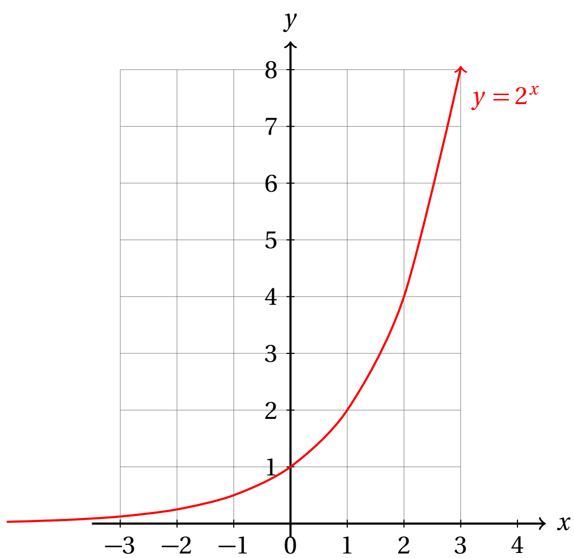
Calcula su dominio y su rango.

Ejemplo 2

- Podemos tabular algunos valores para x y calcular los valores que le corresponden a y:

x	y
-3	0.125
-2	0.250
-1	0.500
0	1.000
1	2.000
2	4.000
3	8.000

- La gráfica es inmediata a partir de la información anterior:



- Como siempre es posible calcular el valor de y para cualquier valor de x, tenemos que el dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales.
- Observa que la gráfica corta al eje y en el punto $(0,1)$.
- También es interesante ver que independientemente del valor de x los valores de y siempre son positivos.
- Además, y nunca se hace cero. ¿Por qué?
- Entonces, el rango de esta función es el conjunto de todos los números reales positivos.

También es importante notar que los valores de y son siempre crecientes. Es decir, conforme x crece, los valores de y crecen más.

En el ejemplo anterior el exponente era positivo, por eso los valores de y crecen.

Cuando el exponente cambia de signo, los valores de y decrecen.

Ejemplo 3

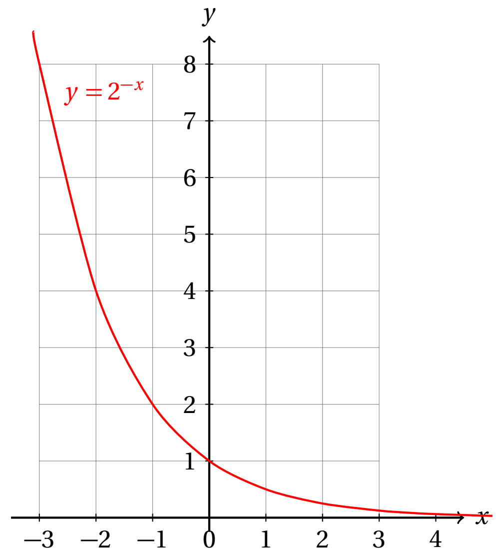
Grafica la función:

$$y = 2^{-x}$$

Calcula su dominio y contradominio.

- De nuevo, hacemos una tabulación de diferentes valores de x y y:

x	y
-3	8.000
-2	4.000
-1	2.000
0	1.000
1	0.500
2	0.250
3	0.125



- Observa que al cambiar el signo, el orden de los valores de y se invierten con respecto a la gráfica de la función anterior.

- Geométricamente esto representa una reflexión respecto del eje y.

- En realidad, eso es ocasionado por el cambio de signo del exponente.

- Observa que de nuevo, la gráfica de la función corta al eje y en el punto $(0,1)$.

- Gracias a las leyes de los exponentes, podemos escribir:

$$y = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1^x}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

¿Qué pasará si dilatamos la gráfica de la función al multiplicarla por 3?, ¿cuál será la ordenada al origen de esta gráfica?

En el siguiente ejemplo vamos a responder estas preguntas.

Grafica la función:

$$y = 3 \cdot 2^{-x}$$

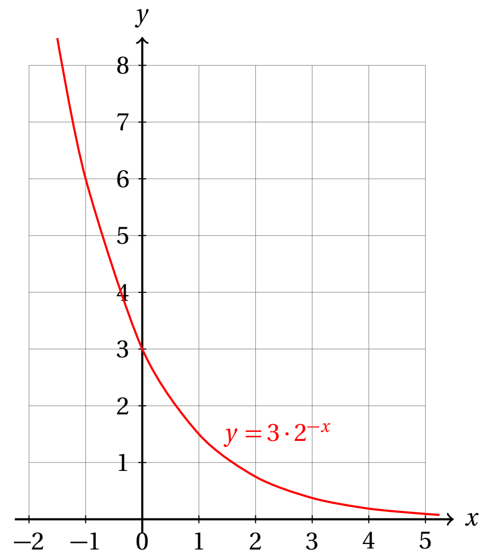
Ejemplo 4

- Esta función se obtuvo multiplicando por 3 la anterior.

- Geométricamente esto equivale a una dilatación vertical.

- La gráfica cambia en que se «*estiró*» tres veces en la dirección vertical.

x	y
-3	24.000
-2	12.000
-1	6.000
0	3.000
1	1.500
2	0.750
3	0.375



- De nuevo, el dominio de esta función es el conjunto de los números reales.

- El contradominio es el conjunto de todos los números reales positivos.

- Gracias a las leyes de los exponentes, podemos escribir:

$$y = 3 \cdot 2^{-x} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1^x}{2^x}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

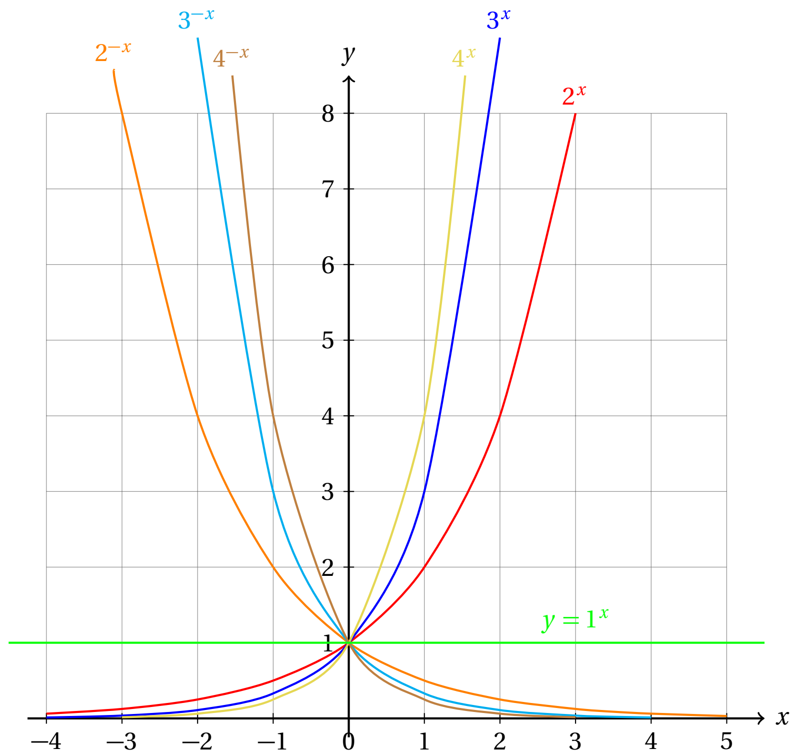
Como puedes ver, la gráfica de la función exponencial se comporta de acuerdo al signo del exponente, pero también está afectada por el valor de la base.

Ejemplo 5

Grafica en un solo sistema de ejes coordenados las siguientes funciones exponenciales:

- ✓ $y = 2^x$
- ✓ $y = 2^{-x}$
- ✓ $y = 3^x$
- ✓ $y = 3^{-x}$
- ✓ $y = 4^x$
- ✓ $y = 4^{-x}$

- Podemos tabular para obtener tablas para apoyarnos en la graficación de las funciones.



- Observa que todas las gráficas de estas funciones cortan al eje y en el mismo punto.
- Se incluyó en la gráfica de la función $y = 1$ que corresponde al caso que no tiene variación, es decir, ni crece ni decrece.

¿Cómo puedes asegurar que y nunca se hace cero?

Recuerda que la definición de potencia viene de la multiplicación repetida de la base.

Observa que para que si $a \neq 0$, entonces no importa cuántas veces multipliques el número a por sí mismo, siempre vamos a obtener un valor distinto de cero.

También debes recordar que $a^0 = 1$ para cualquier base $a \neq 0$.

Para que el producto de dos números sea cero, se requiere que al menos uno de ellos sea cero. De otra forma, el producto será diferente de cero.

Entonces, independientemente del valor de x, el resultado de calcular $a^x \neq 0$ para cualquier $a \neq 0$.

Y para cualquier $x \neq 0$ se cumple que $0^x = 0$.

De manera semejante, para cualquier x se cumple que $1^x = 1$. Porque no importa cuántas veces multipliquemos el número 1 por sí mismo, siempre obtenemos 1.

Por eso se excluyen estas bases de la definición de función, pues carecen de interés. Sus gráficas son demasiado sencillas: son rectas horizontales.

18.1.2 Variación exponencial

Si consideramos la función exponencial:

$$y = k \cdot a^x$$

si sustituimos cualquier número real para la variable x, los valores que la variable y van tomando son siempre positivos.

Si los valores de x son enteros, entonces, consideramos solamente una parte de todo el dominio.

Ejemplo 1

La población de una ciudad en el año 2 000 era de un millón de personas exactamente. **a**. Cada año la población ha crecido un 3%. ¿Cuántas personas había en esa ciudad en el año 2009? **b**. Encuentra la función que nos describe la población P de esa ciudad dependiendo del número de años x después del 2 000.

- Sabemos que la población en el año 2 000 era de 1 000 000 personas.
- El siguiente año había 3% más, es decir, había: $1\,000\,000 \times 0.03 = 30\,000$ personas más.
- Esto es, en el año 2 001 había un total de 1 030 000 habitantes.
- Observa que: $1\,000\,000 = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0.03) = 1\,000\,000 \cdot (1.03)$
- Al siguiente año la población volvió a crecer en un 3%.
- Entonces, en el año 2 002 había

$$\begin{aligned} 1\,030\,000 + 1\,030\,000 \times 0.03 &= 1\,030\,000 \cdot (1 + 0.03) \\ &= 1\,030\,000 \cdot (1.03) \\ &= 1\,060\,900 \text{ habitantes.} \end{aligned}$$

- Y en general, x años después del año 2 000, había:

$$P(x) = 1\,000\,000 \cdot (1.03)^x \text{ habitantes.}$$

- Observa que esta es una función exponencial.
- En este caso, $k = 1\,000\,000$, y la base $a = 1.03$.
- El exponente representa el número de años que han pasado después del año 2 000.
- $P(x)$ nos indica que la población P es una función de x.
- Entonces, en el año 2 009 había una población de:

$$P(9) = 1\,000\,000 \cdot (1.03)^9 = 1\,304\,773 \text{ habitantes aprox.}$$

Observa que bajo el supuesto del ejemplo anterior, la población crece de manera exponencial. Esto es cierto solamente dentro de ciertos rangos, porque hay muchos factores que afectan a la forma como crece una población.

Por ejemplo, un desastre natural, como un terremoto o un ciclón puede cambiar muy drasticamente la población. Cosa que no está contemplada en el modelo.

Pero la población no es lo único que presenta esta forma de variación.

Ejemplo 2

Doña Fanny invirtió todo su dinero P pesos en el banco a plazo fijo. De esta manera, el banco le ofrece un interés de 8% de la cantidad de dinero que tenía el primer día de enero cada año. Si ella invirtió $P = \$10\,000$ pesos el primero de enero del año 2002 y no realizó retiros durante cinco años, ¿cuánto dinero retiró al final?

- Ella recibía el 8% de lo que había en la cuenta al inicio de cada año.
- Al final del primer año tenía:

$$M(1) = P + 0.08 \cdot (P) = 1.08 \cdot (P) = 1.08 \cdot (10\,000) = 10\,800$$

- Al final del segundo año tenía:

$$M(2) = 1.08\,P + (0.08)(1.08)\,P = 1.08\,P\,(1 + 0.08) = (1.08)^2 P = (1.08)^2 (10\,000) = 11\,664$$

- Al final del tercer año la cuenta ascendía a:

$$M(3) = (1.08)^2 P + (0.08)(1.08)^2 P = (1.08)^3 P = (1.08)^3 (10\,000) = 12\,597.12$$

- El cuarto año tenía:

$$M(4) = (1.08)^3 P + (0.08)(1.08)^3 P = (1.08)^4 P = (1.08)^4 (10\,000) = 13\,604.89$$

- Y finalmente, al fin del quinto año obtuvo:

$$M(5) = (1.08)^4 P + (0.08)(1.08)^4 P = (1.08)^5 P = (1.08)^5 (10\,000) = 14\,693.28$$

- En este caso, $a = 1.08$, y $k = P = 10\,000$.

Definición 1

VARIACIÓN EXPONENCIAL
Cuando una cantidad y varía con otra cantidad x de la forma:

$$y = k \cdot a^x$$

donde k es el valor inicial de y y a es una constante que caracteriza al crecimiento de y con x, entonces decimos que y varía de forma exponencial con x.

En física se estudia la radiactividad. La radiactividad es una propiedad que tienen ciertos elementos por la cual emiten partículas energéticas por la desintegración de sus núcleos atómicos. Esto ocasiona que algunos átomos del elemento se conviertan de manera natural en otro elemento.

Ejemplo 3

El carbono 14 (C-14) es un elemento que se utiliza para conocer la edad de fósiles. Si el hueso del animal encontrado cuando estaba vivo tenía m gramos de ese elemento cada 5730 años [1] esa cantidad se reducirá a la mitad de lo que había cada vez. Encuentra la fórmula que nos indica la cantidad en gramos que queda de C-14 después de x periodos de 5 730 años.

- Si el animal en vida tenía m gramos de C-14, después de 5 730 años tendrá la mitad.
- Es decir, tendrá: $m/2$ gramos de C-14.
- Después de otros 5 730 años tendrá la mitad de esa cantidad.
- Es decir, tendrá: $(1/2) \cdot (m/2) = m/2^2$ gramos de C-14.
- Después de otros 5 730 años tendrá la mitad de esa cantidad.
- Es decir, tendrá: $(1/2) \cdot (m/2^2) = m/2^3$ gramos de C-14.
- Y así sucesivamente.

- Al final de x periodos de 5 730 años tendrá:

$$y = \frac{m}{2^x} = m \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right) = m \cdot 2^{-x}$$

Este tipo de elementos se utilizan para datar fósiles de animales que vivieron hace mucho tiempo.

A partir de la medición de la cantidad de C-14 que tiene un fósil pueden aproximar la edad del fósil y así conocer la fecha aproximada en que ese animal vivió.

Ejemplo 4

Un equipo de arqueólogos encontraron fósiles de un dinosaurio. Se calcula que la masa de C-14 que tuvo el hueso cuando el animal estaba vivo era de 32 gramos. Ellos dedujeron que el animal vivió tenía aproximadamente 325 000 años. ¿Cuántos gramos de C-14 tiene actualmente el fósil?

- Del ejemplo anterior sabemos que si m es la masa de C-14 del hueso cuando el dinosaurio estaba vivo, entonces,

$$y = \frac{m}{2^x} = m \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right) = m \cdot 2^{-x}$$

  donde x es la cantidad de periodos de 5 730 años que se han cumplido hasta hoy y la variable y representa la cantidad de C-14 que tiene actualmente el fósil.
- En 325 000 años hay ≈ 56.719 periodos de 5 730 años.
- Entonces, la masa de C-14 que encontraron en ese fósil es de:

$$y = m \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right) = 32 \cdot \left(\frac{1}{2^{56.719}}\right) \approx 2.6979 \times 10^{-16} \text{ gr de C-14.}$$

También hay otros problemas en los que podemos aplicar el concepto de variación exponencial.

Ejemplo 5

Un estudiante diluyó una botella de un ácido agregando agua hasta llenar la botella cada vez que ésta se encontraba a la mitad de su nivel. Realizó esto cinco veces revolviendo el contenido perfectamente después de agregar agua. La botella tenía inicialmente una concentración del 16%. ¿Cuál es la concentración del ácido ahora?

- Observa que la concentración del ácido cada vez disminuía a la mitad.
- Esto nos indica que tenemos una variación exponencial.
- Inicialmente la concentración del acido era del 16%.
- Si y es la concentración del ácido después de haberla diluído x veces, tenemos:

$$y = 16 \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)$$

- En este caso tenemos $x = 5$, así que:

$$y(5) = 16 \cdot \left(\frac{1}{2^5}\right) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} = 0.5\%$$

- Entonces, la concentración del ácido después de 5 veces de haber disuelto es de 0.5%.

Resuelve los siguientes ejercicios de variación exponencial. **Ejercicios 18.1.2**

1) Una población de bacterias se duplica en 2 horas. Definiendo como P_0 la población inicial de bacterias, P como la población actual y n el número de periodos de dos horas que han pasado, escribe una función que modele esta situación. $P = P_0 \cdot 2^n$

2) Para el ejercicio anterior, escribe ahora la función que modela la situación cambiando n (el número de periodos de dos horas) por t que representa el número de horas que han pasado desde el inicio del experimento. $P = P_0 \cdot 2^{t/2}$

3) Un coche pierde 25% de su valor cada año. Si V es el valor n años después de haberse comprado y su precio de agencia era de V_0 pesos, escribe la función de variación exponencial que modela esta situación. $V = V_0 \cdot (0.75)^n$

4) Si una disoución de alcohol se deja destapado se evapora y eso ocasiona que baje su concentración en un 12% cada hora. Si C es la concentración después de t horas de haberse destapado y C_0 es la concentración inicial, escribe la función de variación exponencial que modela esta situación. $C = C_0 \cdot (0.88)^t$

5) Una sustancia radiactiva tarda N años en disminuir su masa a la mitad de su valor inicial. Si m es la masa de esa sustancia para cualquier valor de t (tiempo) y m_0 era la masa de esa sustancia para $t = 0$, escribe la función de variación exponencial que modela esta situación. $m = m_0 \cdot (0.5)^{t/N}$

6) ¿Cuánto tiempo tarda en duplicarse el dinero que se invierte a una tasa de interés del 8% que se compone anualmente? 9 años aprox.

7) La población de una especie en peligro de extinción decrecía a un 25% cada año. ¿Cuánto tiempo tardará en quedar una cuarta parte de la población actual? 4.8 años aprox. ≈ 4 años y 298 días.

8) ¿Cuánto tiempo se requiere para triplicar la población de una ciudad que presenta un crecimiento de 7% anual? 16.23 años ≈ 16 años y 87 días.

9) La canasta básica en un país ha subido un 47% de precio por año durante los últimos 10 años. Si la canasta básica costaba \$1 000.00 hace 5 años, ¿cuánto cuesta actualmente? \$6 864.15 pesos.

10) Las familias de una ciudad que tienen acceso a internet desde sus casas crece al 5% anualmente. Hace 10 años había 350 000 personas con acceso a internet desde sus casas. ¿Cuántas familias tienen hoy internet en sus casas? 570 113 familias.

18.1.3 El número e

En matemáticas se define el número e como la base de la función exponencial natural, también conocida como la base neperiana, debido a que el matemático neper fue el primero en utilizarla.

En la sección anterior resolvimos algunos ejemplos que estaban relacionados con el cálculo de interés sobre interés, que también se conoce como interés compuesto.

María invierte \$100.00 pesos en una cuenta del banco que ofrece 8% de interés compuesto anual. ¿Cuál es la tasa promedio mensual? **Ejemplo 1**

- Si deja su dinero 12 meses en el banco ella obtendrá 8%.

- En un mes solamente obtendrá una doceava parte del 8%.
- Es decir, obtendrá: $100 \times 0.08/12$, y el monto que alcanzará es:

$$100+100 \cdot \left(\frac{0.08}{12}\right)=100.66$$

Si el banco aplica el interés cada mes, debe multiplicar el monto que la cuenta tenía al inicio de cada mes por el factor $(1+0.08/12)$:

Ejemplo 2 El banco notificó que aplicaría intereses cada mes a las cuentas que se aplica el 8% anual. Si María deja su dinero durante 7 meses, ¿cuánto dinero recibirá al final?

- Si ella deja su dinero un mes, recibirá:

$$M=100 \cdot \left(1+\frac{0.08}{12}\right)$$

- Si lo deja otro mes más, recibirá el interés que se genere en un mes por la cantidad que tenía al inicio del mes:

$$M=100 \cdot \left(1+\frac{0.08}{12}\right)+100 \cdot \left(1+\frac{0.08}{12}\right)\left(\frac{0.08}{12}\right)=100 \cdot \left(1+\frac{0.08}{12}\right)^2=101.34$$

- Observa que para calcular el monto del siguiente mes siempre multiplicamos por $(1+0.08/12)$.
- Entonces, para obtener el monto final de su inversión a los 7 meses, hacemos:

$$M=100 \cdot \left(1+\frac{0.08}{12}\right)^7=104.74 \text{ pesos.}$$

Ahora veamos qué sucede en el caso en que el banco, en lugar de aplicar los intereses mensuales los aplicará diariamente.

Ejemplo 3 Si el banco, en lugar de aplicar el interés mensualmente como en el ejemplo anterior, los aplica diariamente el factor de multiplicación debe cambiar.

- Para calcular el factor anterior dividimos la tasa de interés entre 12, porque en un año hay 12 meses.
- Ahora se aplicará diario.
- Considerando un año no bisiesto, tenemos que dividir entre 365 días.
- Entonces, el factor se convierte en: $(1+0.08/365)$
- Y la fórmula para calcular el monto M acumulado después de x días en esa cuenta es:

$$M=100 \cdot \left(1+\frac{0.08}{365}\right)^x$$

- En un mes hay 30 días.

- Aplicando el interés diariamente, en un mes obtendría:

$$M = 100 \cdot \left(1 + \frac{0.08}{365}\right)^{30} = 100.66$$

- Y en siete meses de 30 días tenemos:

$$M = 100 \cdot \left(1 + \frac{0.08}{365}\right)^{210} = 104.71 \text{ pesos.}$$

Ahora imagina que el interés no se compone cada día sino cada hora. ¿Y qué pasará si en lugar de componer el interés cada hora se compone cada minuto o cada segundo?

Lo que pasará es que el factor va a cambiar cada vez.

Para este caso, lo que tenemos es una variación exponencial, donde la base ha cambiado conforme cambiamos el tiempo en que se aplica el interés al monto que hay en la cuenta.

Para el primer ejemplo, cuando el interés se aplicaba cada mes el factor de multiplicación, o bien, la base a de la variación exponencial era $1 + 0.08/12$.

Para calcular el monto que se obtiene al año usamos:

$$M = 100 \cdot \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{12} = 108.30$$

Para el caso en que el interés se aplica cada día esa base cambió a $1 + 0.08/365$ y en un año obtuvo:

$$M = 100 \cdot \left(1 + \frac{0.08}{365}\right)^{365} = 108.33$$

Observa que el monto al final del año ha cambiado en 3 centavos.

Si componemos el interés en cada hora, o en cada minuto en segundos, ¿cómo crees que cambiará el monto al final del año?

Ejemplo 4

Haz una comparación del monto final de un peso invertido con una tasa anual del 100% considerando aplicación de interés en un año, un mes, un día, una hora, un minuto, un segundo y una centésima de segundo.

- Sabemos que el monto inicial es de \$1.00 peso.
- La tasa de interés es del 100% anual.
- Empezamos haciendo el cálculo para el primer caso:

$$M = (1 + 1)^1 = 2$$

- Ahora calculamos el caso cuando el interés se aplica mensualmente:

$$M = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.6130352902246781603$$

- Si el interés se aplica diariamente tenemos:

$$M = \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.7145674820218743032$$

- Si el interés se aplica cada hora obtenemos:

$$M = \left(1 + \frac{1}{(365)(24)}\right)^{(365)(24)} = 2.7181266916204521189$$

- Si el interés se aplica cada minuto obtenemos:

$$M = \left(1 + \frac{1}{(365)(24)(60)}\right)^{(365)(24)(60)} = 2.7182792425790150990$$

- Si el interés se aplica cada segundo obtenemos:

$$M = \left(1 + \frac{1}{(365)(24)(60)(60)}\right)^{(365)(24)(60)(60)} = 2.7182817784689974$$

- Finalmente, si el interés se aplica cada centésima de segundo obtenemos:

$$M = \left(1 + \frac{1}{(365)(24)(60)(60)(100)}\right)^{(365)(24)(60)(60)(100)} = 2.7182818479376385$$

Si seguimos disminuyendo el tamaño del tiempo entre los cuales se aplican los intereses hasta obtener la tasa de crecimiento instantánea del dinero, vamos a obtener un número constante.

Este número constante se denomina con la letra e y es la base de la función exponencial natural.

Definición 1

FUNCIÓN EXPONENCIAL (NATURAL)
El número irracional

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093 7\cdots$$

es la base de la función exponencial natural:

$$y = e^x$$

Observa que la base de la función exponencial está entre 2 y 3.

Esto nos indica que la gráfica de la función exponencial debe estar entre las gráficas de las funciones $y = 2^x$, y $y = 3^x$, pero poco más cerca de la última. ¿Por qué?

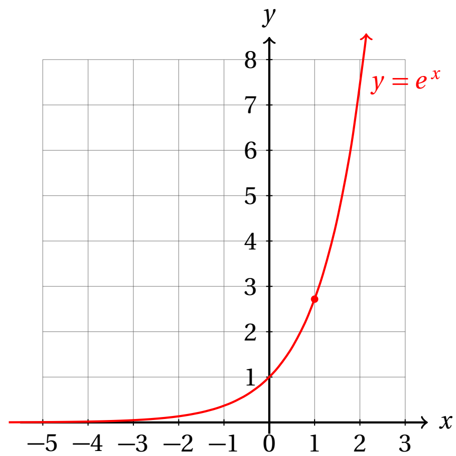
Ejemplo 5

Grafica la función exponencial:

$$y = e^x$$

- Podemos dar valores a x y calcular sus valores correspondientes para y con la ayuda de la calculadora científica.

- Aunque también podemos aproximarlos observando que $e = 2.71828\cdots \approx 3$.


y
x
$y = e^x$
8
7
6
5
4
3
2
1
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3

18.2 Función logarítmica

Ya hemos definido la función exponencial.

Supongamos que sabemos que $2^x = 512$, y deseamos conocer qué valor debe tener x para que la igualdad sea verdadera.

En otras palabras, deseamos conocer a qué potencia debemos elevar la base 2 para obtener 512.

Precisamente así es como se motivó el concepto de logaritmo.

18.2.1 Concepto de función logarítmica

Sin necesidad de calculadora, si multiplicamos al número 2 por sí mismo 9 veces obtendremos 512.

Es decir, si $2^x = 512$, entonces $x = 9$.

Esta es precisamente la definición de logaritmo.

> LOGARITMO
> *Si $y = a^x$, entonces, se define:*
> $$\log_a y = x$$
> *y se lee: «el logaritmo del número y en la base a es igual a x.»*
>
> **Definición 1**

Podemos convertir de una forma exponencial a la forma logarítmica usando la definición anterior.

Observa que, de acuerdo a la definición de función inversa, la función exponencial es la función inversa de la función logarimica y viceversa.

Si intercambiamos las literales, obtendremos la notación de función que hemos estado usando.

> FUNCIÓN LOGARIMICA
> *Una función es logarítmica si es del tipo:*
> $$y = \log_a x$$
> *donde $a > 0$ es distinto de 1.*
>
> **Definición 2**

Observa que $y = \log_a x$ implica que $a^y = x$.

Esto nos indica que la función exponencial es la inversa de la función logarítmica.

Es decir, si conocemos los puntos por donde pasa la función exponencial, intercambiando la coordenada de x por la de y y viceversa para cada punto, podremos fácilmente graficar una función exponencial.

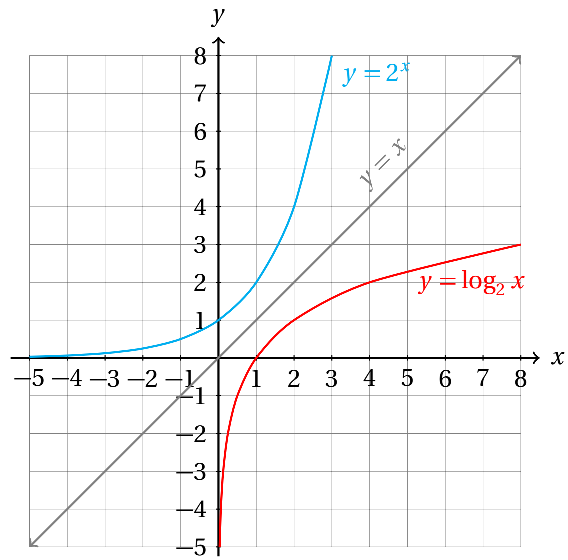
En otras palabras, la función $y = x$ sirve como un eje de simetría para las gráficas de ambas funciones.

> Grafica la función logarítmica:
> $$y = \log_2 x$$
> Calcula su dominio y su contradominio.
>
> **Ejemplo 1**

- Nosotros ya habíamos graficado la función exponencial $y = 2^x$ en la página 735.

- Ahora podemos cambiar los valores de las coordenadas de x por y y de y por x, y obtenemos la siguiente tabla:

x	$y = \log_2 x$
0.125	−3
0.250	−2
0.500	−1
1.000	0
2.000	1
4.000	2
8.000	3



- Como las funciones $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$ son inversas una de la otra, el dominio de la primera es el contradominio de la primera y viceversa.

- Entonces, el dominio de la función $y = \log_2 x$ es el conjunto de todos los números reales positivos.

- Y el contradominio de esta función es el conjunto de todos los números reales.

Observa que dado que $y = \log_a x$ es la función inversa de $y = a^x$ se cumple:

$$\log_a y = \log_a (a^x) = x$$

Esto es muy fácil de justificar, porque el resultado de $\log_a (a^x)$ es el exponente al cual debemos elevar el número a para obtener a^x. Pero la pregunta tiene la respuesta: para obtener a^x debemos multiplicar el número a en total x veces.

Puedes memorizar fácilmente este resultado pensando que, como la función logarimica es inversa de la función exponencial, se cancelan mutuamente:

$$\log_a y = \log_{\cancel{a}}((\cancel{a})^x) = x$$

También recuerda que para todo $a \neq 0$ se cumple: $a^0 = 1$. De aquí que:

$$\log_a 1 = 0$$

Es decir, si elevamos el número a a la potencia 0, obtenemos como resultado 1.

Esto puedes verlo de la gráfica del ejemplo anterior, anque se va a cumplir para cualquier base a válida que demos a la función logaritmo.

Ejemplo 2

Grafica la función logarítmica:

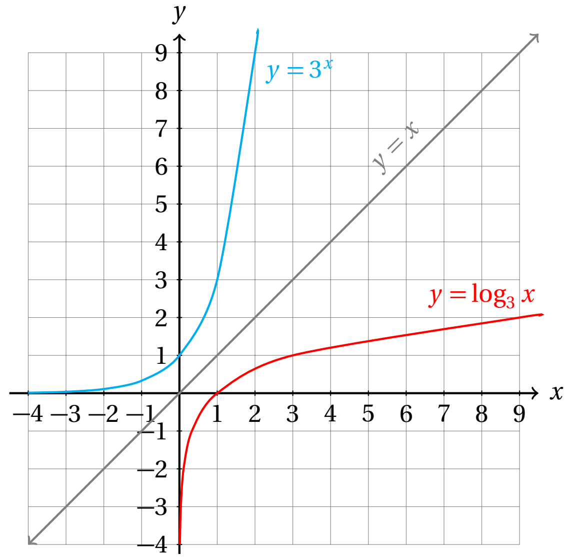
$$y = \log_3 x$$

Calcula su dominio y su contradominio.

- de nuevo nos basaremos en la gráfica de la función exponencial con base 3.

- El ejemplo está resuelto en la página 738.

x	$y = \log_3 x$
0.012	−4
0.037	−3
0.110	−2
0.333	−1
1.000	0
3.000	1
9.000	2



Observa que el argumento de la función logaritmo necesariamente debe ser positivo.

Entonces, si deseamos graficar la función $y = \log(-x)$, el dominio de esta función será tal que los valores del argumento de la función sean positivos. Es decir, para los valores en los cuales $-x$ es positivo. Esto ocurre cuando $x < 0$.

Ejemplo 3

Grafica la función logarítmica:

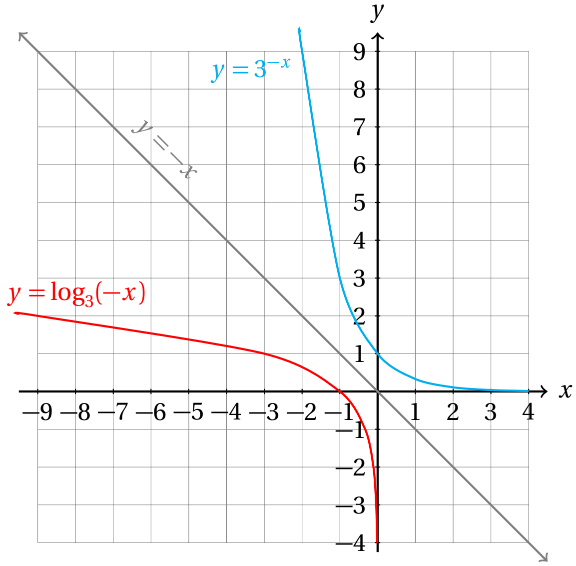
$$y = \log_3 x$$

Calcula su dominio y su contradominio.

- Ahora se requiere que x sea negativo, para que el valor de $-x$ sea positivo y así, la función logaritmo pueda devolver un valor.

x	$y = \log_3 x$
−0.012	−4
−0.037	−3
−0.110	−2
−0.333	−1
−1.000	0
−3.000	1
−9.000	2

- Ahora el eje de simetría de la figura estará dada por la función $y = -x$.



Con los ejemplos anteriores debe ser sencillo graficar la función $y = \log_2 |x|$. Así que se te queda de ejercicio.

Si recuerdas, las propiedades de los logaritmos pueden ayudarnos a graficar de una manera más sencilla otras funciones logarítmicas.

Ejemplo 4

Grafica la siguiente función logarimica:

$$y = \log_2 \left(x^2\right)$$

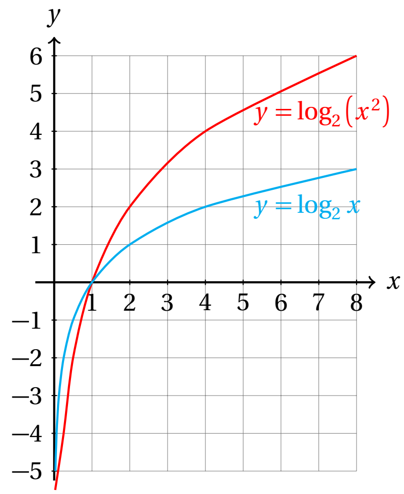
- Usando la propiedad de los logaritmos que dice:

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

podemos transformar la función a la siguiente forma:

$$y = 2 \log_2 x$$

- Así, la gráfica de esta función se obtiene dilatando por 2 la gráfica de la función $y = \log_2 x$.



- Observa que ambas gráficas cortan al eje x en el mismo punto, como era de esperarse.

Entonces, para graficar una función logarimica «*complicada*», algunas veces servirá transformarla para bosquejar su gráfica a partir de una función logarítmica que ya conozcamos.

En el último ejemplo graficamos la función $y = \log_2(x^2)$ a través de la dilatación de la gráfica de la función $y = \log_2 x$ utilizando una propiedad de los logaritmos.

La propiedad que hemos utilizado para graficar esta función logarítmica también funciona con exponentes racionales.

Ejemplo 5

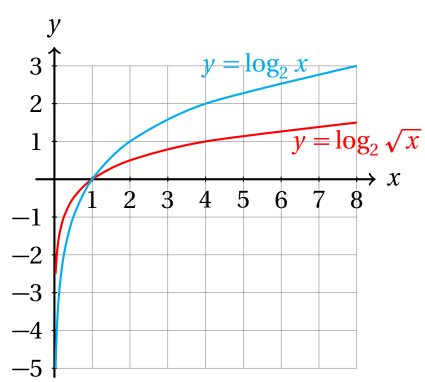
Grafica la siguiente función logarimica:

$$y = \log_2 \sqrt{x}$$

- Podemos transformar esta función a la siguiente forma:

$$y = \log_2 \sqrt{x} = \log_2\left[(x)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}\log_2 x$$

- Así que ahora dilataremos por $1/2$ la gráfica de la función $y = \log_2 x$ para obtener la gráfica de la función: $y = \log_2 \sqrt{x}$.



- Observa que ambas gráficas cortan al eje x en el mismo punto, como era de esperarse.

Ejercicios 18.2.1 Grafica cada una de las siguientes funciones logarítmicas.

1) $f(x) = \log_2 x$

2) $f(x) = \log_2(x+1)$

3) $f(x) = \log_2(x-1)$

4) $f(x) = 2\,\log_2(x+1) = \log_2\left[(x+1)^2\right]$

5) $f(x) = 2\,\log_2(x-1) = \log_2\left[(x-1)^2\right]$

6) $f(x) = \log_3 x + 1$

7) $f(x) = \log_3(x-1)$

8) $f(x) = \log_3(x-1)+1$

9) $f(x) = -\log_3(x+1) = \log_3\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

10) $f(x) = -\log_3(x-1) = \log_3\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

11) $f(x) = -\log_3(x+1)+1 = \log_3\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+1$

12) $f(x) = 2\,\log_3(x-1)+1 = \log_3\left[(x-1)^2\right]+1$

13) $f(x) = 2\,\log_3(x-1)-1 = \log_3\left[(x-1)^2\right]-1$

14) $f(x) = 2\,\log_3(x+1)+1 = \log_3\left[(x+1)^2\right]+1$

15) $f(x) = 2\,\log_3(x+1)-1 = \log_3\left[(x+1)^2\right]-1$

16) $f(x) = \ln(|x|)$

17) $f(x) = \ln(|x+1|)$

18) $f(x) = \ln(|x-1|)$

19) $f(x) = 2\,\ln(|x|)$

20) $f(x) = \dfrac{1}{2}\,\ln(|x+1|)$

21) $f(x) = \ln(|x|)+1$

22) $f(x) = \ln(|x|)-1$

23) $f(x) = \ln(|x+1|)+1$

24) $f(x) = \ln(|x-1|)+1$

25) $f(x) = \ln(|x+1|)-1$

Instrucciones Escribe cada una de las siguientes funciones usando solamente un logaritmo.

26) $f(x) = \log(x+1)+\log(x-1)$ $\log(x^2-1)$

27) $f(x) = \log(x+1) - \log(x-1)$ $\log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

28) $f(x) = 2\log(x+1) - 3\log(x-1)$ $\log\left(\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^3}\right)$

29) $f(x) = \dfrac{1}{2}\log(x+1) - \dfrac{2}{3}\log(x-1)$ $\log\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right)$

30) $f(x) = \log(x+3) + \log(x-2)$ $\log(x^2+x-6)$

31) $f(x) = \log(x+1) + \log(x-1) - \log(x)$ $\log\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$

32) $f(x) = 2\log(x+1) + \dfrac{1}{2}\log(x-1) - 3\log(2x-1)$ $\log\left(\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(2x-1)^3}\right)$

33) $f(x) = \log(x^2+1) - 3\log(x-1)$ $\log\left(\dfrac{x^2-1}{(x-1)^3}\right)$

34) $f(x) = \log(x+7) - 4\log(x-3) + 2\log(x)$ $\log\left(\dfrac{x^2(x+7)}{(x-3)^4}\right)$

35) $f(x) = \log(5x-1) - \log(4x-1) - 7\log(x+1)$ $\log\left(\dfrac{5x-1}{(4x-1)(x+1)^7}\right)$

18.2.2 Logaritmos comunes y naturales

Ya definimos el logaritmo con base común a.

El número a puede ser cualquier número real positivo distinto de 1.

Cuando la base es el número $e = 2.718281828459\cdots$ entonces decimos que la función es función logaritmo natural.

Para diferenciarla de las demás bases denotamos al logaritmo natural del número x como sigue: $\ln x$.

Como se mencionó, esta función es el logaritmo en la base e de x:

$$y = \log_e x = \ln x$$

En los cursos de matemáticas, las bases que más se utilizan son e y 10.

Cuando utilizamos la base 10 decimos que el logaritmo es común o vulgar.

Cuando escribimos: $\log x$, sin indicar la base, debemos entender que la base es 10:

$$y = \log_{10} x = \log x$$

Estas dos bases son las que vienen programadas en las calculadoras científicas.

En la tecla que se indica $\boxed{\ln}$ puedes calcular el logaritmo natural, y en la que aparece el símbolo $\boxed{\log}$ se calcula el logaritmo vulgar (en base 10).

Una propiedad que será útil para convertir el logaritmo de una base a otra es la siguiente:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Por ejemplo, para calcular $\log_2 32$ hacemos:

$$\log_2 32 = \frac{\ln 32}{\ln 2} = \frac{\log 32}{\log 2} = 5$$

que podemos verificar manualmente.

Observa que en la primera fracción usamos la base e y en la siguiente usamos la base 10.

18.2.3 Ecuaciones exponenciales y logaritmicas

Cuando hacemos preguntas relacionadas a funciones exponenciales o logaritmicas generalmente obtendremos una ecuación logarimica o exponencial.

Ejemplo 1 Elevé el número 3 a una potencia y obtuve 243. ¿A qué potencia lo elevé?

- De acuerdo al problema, tenemos:
$$3^k = 243$$
- Para calcular el valor de k usamos la propiedad:
$$\log_a a^x = x$$
- Así que podemos «*sacar*» logaritmo en base tres en ambos lados de la igualdad y obtener:
$$\log_3(3^k) = \log_3(243)$$
- Y ahora aplicamos la otra propiedad de los logaritmos que dice:
$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$
con lo que obtenemos:
$$\log_3(3^k) = k = \log_3(243) = \frac{\ln 243}{\ln 3} = 5$$
- Verifica este resultado sin calculadora.

Observa que este procedimiento se justifica en el hecho de que las funciones exponenciales y logaritmicas son inversa una de la otra.

Puedes ver que el resultado no dio exactamente al que obtuvimos en el ejemplo de la página 740. Esto se debe a que entonces redondeamos los resultados, pues es imposible que la población diera, 1 304 773.184 personas.

Así que nos vimos forzados a truncar el resultado.

En los problemas aplicados es importante observar esto.

También surgen oportunidades de utilizar las ecuaciones exponenciales y logaritmicas en los mismos problemas aplicados.

Ejemplo 2 En el ejemplo que se resolvió en la página 740 encontramos que la población de una ciudad creció de 1 000 000 a 1 304 773 en 9 años. ¿Cuál es la tasa de crecimiento anual promedio?

- Nosotros ya conocemos el resultado, pero vamos a resolver este problema.
- Como suponemos que durante los 9 años la tasa de crecimiento fue la misma, tenemos:

$$1\,304\,773 = 1\,000\,000 \cdot r^9$$

- Nosotros debemos calcular el valor de r, que es la tasa de crecimiento.
- Para eso, despejamos r^9:

$$\frac{1\,304\,773}{1\,000\,000} = r^9 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt[9]{1.304\,773} \approx 1.029999984$$

- Luego, $r \approx 1.029999984$.
- El 1 que aparece en r representa el 100% de la población que hay al inicio de cada año.
- La parte de los decimales representa lo que la población crecerá cada año.
- En este caso, $0.029999984 \times 100 = 2.999998\%$.
- Entonces, aproximadamente la tasa de crecimiento de la población de esa ciudad es del 2.999998% anual.

Otra forma de resolver un problema relacionado al mismo ejemplo de la página 740 es el siguiente.

Ahora supondremos que conocemos que en esa ciudad la población crece a razón constante de 3%. Si la población inicial era de 1 000 000 de personas, ¿cuántos años deben pasar para alcanzar una población de 1 304 773 habitantes?	**Ejemplo 3**

- Nosotros ya sabemos que eso ocurre en 9 años.
- De cualquier manera vamos a resolver el problema.
- Ahora, las condiciones del problema nos dicen:

$$1\,304\,773 = 1\,000\,000 \cdot (1.03)^x$$

- Lo que ahora necesitamos calcular es x, el número de años que deben pasar para que lapoblación crezca esa cantidad.
- Para eso aplicaremos la siguiente propiedad de los logaritmos:

$$\log_a N^k = k \cdot \log_a N$$

- Esto nos permite escribir:

$$\begin{aligned} 1\,304\,773 = 1\,000\,000 \cdot (1.03)^x \qquad &\Rightarrow \qquad 1.03^x = 1.304\,773 \\ &\Rightarrow \qquad x \cdot \log(1.03) = \log(1.304\,773) \\ &\Rightarrow \qquad x = \frac{\log(1.304\,773)}{\log(1.03)} = 8.999995 \end{aligned}$$

- Esto es, prácticamente 9 años.

También podemos encontrar ecuaciones más complicadas que se resuelven con los mismos principios.

Ejemplo 4

Resuelve la siguiente ecuación:

$$5 \cdot \ln(x) = \ln(32)$$

- Aplicamos la propiedad:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

pero ahora meteremos el factor al argumento del logaritmo:

$$5 \cdot \ln(x) = \ln(x^5) = \ln(32)$$

- Como la función logarítmica natural tiene por función inversa la exponencial con base e, aplicamos ésta a ambos lados de la igualdad:

$$e^{\ln(x^5)} = e^{\ln(32)}$$

- Pero por definición de inversa, obtenemos los argumentos en cada lado de la igualdad:

$$x^5 = 32$$

- La solución se encuentra ahora de manera inmediata:

$$x = \sqrt[5]{32} = 2$$

- Verifica en la calculadora que satisface la ecuación inicial.

Ejemplo 5

Resuelve la siguiente ecuación logaritmica:

$$\log(7\,x + 2) = 2$$

- Primero debes observar que están utilizando el logaritmo en base 10.
- Eso nos permite convertir la ecuación a la forma equivalente:

$$10^{(\log(7\,x+2))} = 7\,x + 2 = 10^2 = 100$$

- La solución de esta ecuación es inmediata:

$$\begin{aligned} 7\,x + 2 &= 100 \\ 7\,x &= 98 \\ x &= \frac{98}{7} = 14 \end{aligned}$$

- Sustituye este valor y verifica que satisface la ecaución.

Ejemplo 6

Resuelve la siguiente ecuación logaritmica:

$$\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln 2$$

- Primero aplicaremos la siguiente propiedad de los logaritmos:

$$\log_a M - \log_a N = \log_a \left(\frac{M}{N}\right)$$

- Observa que una diferencia de logaritmos se transforma en el logaritmo del cociente de los argumentos:

$$\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln 2$$

- Ahora podemos aplicar el hecho de que la función exponencial natural es inversa de la función logaritmo natural:

$$e^{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = e^{\ln 2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x+1}{x-1} = 2$$

- De aquí, fácilmente calculamos el valor de x:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x+1}{x-1} & = & 2 \\ x+1 & = & 2(x-1) \\ x+1 & = & 2x-2 \\ 3 & = & x \end{array}$$

- Entonces, la solución es $x = 3$.
- Sustituye este valor en la ecuación y verifica que la solución sea correcta.

Ejemplo 7

Un estudiante planea invertir \$1 000 pesos en una cuenta del banco que ofrece 8.5% de interés compuesto anualmente. ¿Cuánto tiempo debe esperar para obtener el doble de lo que depositó?

- Sabemos que depositó \$1 000.00 pesos como monto inicial.
- Él desea esperar hasta que el monto sea de \$2 000.00 pesos. Entonces,

$$2\,000 = 1\,000 \cdot (1.085)^n$$

  donde n es el número de años que debe mantenersu dinero sin retiros.
- Para calcular el valor de n despejamos:

$$\frac{2\,000}{1\,000} = (1.085)^n \qquad \Rightarrow \qquad (1.085)^n = 2$$

- Ahora «*sacamos*» logaritmo natural en ambos lados y obtenemos:

$$n \ln(1.085) = \ln(2)$$

- Esto puede evaluarse en una calculadora científica y obtenemos:

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1.085)} = 8.4965\text{años}.$$

- Esto equivale a 8 años y 181 días.

Algunas veces encontrarás ecuaciones exponenciales puras que no requieren de las propiedades de los logaritmos para resolverse.

Ejemplo 8

Resuelve:

$$4^x = 2^{x+3}$$

- El truco consiste en escribir ambos lados de la igualdad con la misma base.
- Dado que $4 = 2^2$ podemos escribir la ecuación de la siguiente forma equivalente:

$$(2^2)^x = 2^{x+3}$$

- Por las leyes de los exponentes, podemos escribir:

$$(2)^{2x} = 2^{x+3}$$

- Para que ambos lados de la igualdad sean iguales, los exponentes deben ser iguales, dado que las bases lo son.
- Luego,

$$2x = x + 3 \qquad \Rightarrow \qquad x = 3$$

- Ahora verificamos que en realidad se satisfaga la ecuación cuando $x = 3$:

$$4^x = 2^{x+3} \qquad \Rightarrow \qquad 4^3 = 64 = 2^{3+3}$$

En cualquier ecuación exponencial o logaritmica se requiere que entiendas la definición de función exponencial o logarítmica, porque en base a la definición es como se resuelven estas ecuaciones.

Así que haz tu mejor esfuerzo para entenderlas.

A propósito, así son todas las matemáticas. Si entiendes bien los conceptos, entennder los procedimiento que usamos para la solución de los problemas siempre parece natural.

Si no has entendido bien algunos conceptos te parecerá difícil o extraño un procedimiento, simplemente porque no has entendido la base.

Todos los procedimientos en matemáticas se basan en las definiciones que se han dado antes.

Ejercicios 18.2.3 Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones exponenciales y logaritmicas.

1) $2^{x+1} = 4$ — $x = 1$

2) $9^{x-1} = 81$ — $x = 3$

3) $2^{x-1} = \dfrac{1}{4}$ — $x = -1$

4) $8^x = 2$ $\quad x = \dfrac{1}{3}$

5) $9^{2x-1} = 729$ $\quad x = 2$

6) $\log_4(x+25) = 3$ $\quad x = 39$

7) $\log_2(x+5) = 4$ $\quad x = 11$

8) $\log_3(x-3) = 1$ $\quad x = 6$

9) $\log_7(x-7) = 1$ $\quad x = 17$

10) $\log_5(x+620) = 4$ $\quad x = 5$

11) $\log_4\left(\log_2(x)\right) = 1$ $\quad x = 16$

12) $\log_3(x^2-9) = 4$ $\quad x = 5$

13) $\log x = \dfrac{3}{2}\log(9) + \log(2)$ $\quad x = 54$

14) $\log_3(3^x) = 3\log_3(3) + \log_3(3)$ $\quad x = 4$

15) $x = \log_5(25) + \log_5(125)$ $\quad x = 5$

16) $\log_x\left(\log_3(x)\right) = 0$ $\quad x = 3$

17) $\log_7(x-6) + \log_7(x) = 1$ $\quad x = 7$

18) $\log_4(x+7) - \log_4(x) = 3$ $\quad x = \dfrac{1}{9}$

19) $\log_2(x+6) + \log_2(x-6) = 2$ $\quad x = 10$

20) $\log_5(x+1) - \log_5(x-3) = 2$ $\quad x = \dfrac{19}{6}$

21) $\log_2(x+4) + \log_2(x-4) = 2$ $\quad x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

22) $\log_4(x+5) + \log_4(x-5) = 1$ $\quad x = \sqrt{29}$

23) $\log_5(x+1) - \log_5(x-3) = 1$ $\quad x = 4$

24) $\log_4(x-7) + \log_4(x-4) = 1$ $\quad x = 3$

25) $\log_3(x+2) - \log_3(x-2) = 2$ $\quad x = \dfrac{5}{2}$

26) $\log_3(x+2) - \log_3(x-2) = 1$ $\quad x = 4$

27) $\log_3(x+1) - \log_3(x-1) = 1$ $\quad x = 2$

28) $\log_5(x+4) - \log_5(x-4) = 1$ $\quad x = 6$

29) $\log_6(x+5) - \log_6(x-5) = 1$ $\quad x = 7$

30) $\log_6(x+2) - \log_6(x-1) = 1$ $\quad x = \dfrac{8}{5}$

31) $\log_3(x+5) + \log_3(x-3) = 2$ $\quad x = 4$

32) $\log_4(x+5) + \log_4(x-5) = 1$ $\quad x = \dfrac{25}{3}$

33) $\log_5(x+3)-\log_5(x-1)=2$ $x=\dfrac{7}{6}$

34) $\log_5(x+3)+\log_5(x-1)=1$ $x=2$

35) $\log_6(x+7)+\log_6(x+1)=3$ $x=11$

Parte V

Cálculo Diferencial

Capítulo 19

Límites

Por aprender...

Por qué es importante...

El concepto de límite es sobre el que descansan los demás conceptos del cálculo infinitesimal.

19.1 Límites

Cada rama de las matemáticas tiene conceptos que resultan centrales para el desarrollo de la misma.

Nosotros empezamos el estudio del cálculo infinitesimal, que está compuesto del cálculo diferencial y del cálculo integral.

Los conceptos fundamentales en cálculo, la derivada y la integral, son definidos a partir de otro, todavía más fundamental: el concepto de límite.

19.1.1 Noción intuitiva de límite

Nosotros utilizamos los límites muy frecuentemente, pero no los reconocemos como tales simplemente porque no estamos acostumbrados a pensar en términos de ellos.

¿Cómo medimos la velocidad de un coche? **Ejemplo 1**

- Cuando viajamos en un coche es común revisar frecuentemente el velocímetro.
- Supongamos que la velocidad que éste indica es de 45 km/hr.
- Nosotros podemos calcular la velocidad promedio $\bar{v}$ de un móvil dividiendo la distancia d recorrida por él entre el tiempo t que le tomó recorrerla.
- En un instante, es decir, en un punto del tiempo, la distancia recorrida es cero.
- ¿Cómo, entonces, medimos la velocidad para indicarla en el velocímetro?

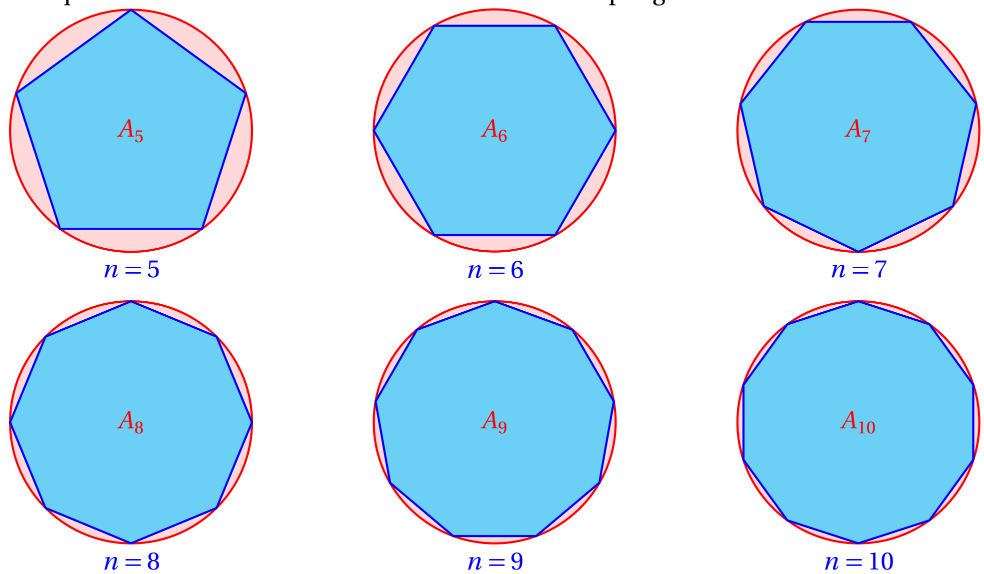
Imagina que tienes que llenar un vaso con agua. Abres el grifo del agua y ésta sale a razón de 30 mililitros por segundo. Sabiendo que la capacidad del vaso es de 300 ml, ¿Cuánto tiempo requieres para llenarlo? **Ejemplo 2**

- Como cada segundo se vierten 30 ml de agua al vaso, en $t = 10$ segundos está a su capacidad máxima.
- Lo interesante de esto es que notemos que conforme el valor de t se acerca a 10 el volumen de agua vertido en el vaso se aproxima cada vez más a 300 ml.

Imagina que deseas calcular el valor exacto del número π. Sabiendo que el área del círculo unitario (de radio 1) es igual a π, vamos a encontrar una forma de ir aproximando el valor de esta constante geométrica. **Ejemplo 3**

- Ya sabes que el área de un círculo de radio 1 es igual a π unidades cuadradas.
- Entonces, podemos ir dibujando polígonos regulares en el círculo unitario (es decir, de radio 1), calcular el área de cada uno, y después aumentar el número de lados del polígono.
- Sea n el número de lados del polígono dibujado en el círculo unitario, y hagamos que n vayan creciendo. Cuando n sea infinito, obtedremos el valor exacto del número π.

- Decimos que π es el valor del límite al cual tiende el área del polígono inscrito en el círculo unitario.



- Observa que conforme hacemos crecer el número de lados n, el área A_n del polígono de n lados se acerca cada vez más al área de la círculo, que es igual a π, dado que su radio es 1.
- El polígono regular que vamos dibujando inscrito al círculo tiene su propia área. Si hacemos que el número de lados de este polígono crezca mucho, su área cada vez se acercará a la del círculo.
- Un matemático diría: «*el límite del área del polígono inscrito a la circunferencia unitaria cuando su número de lados tiende a infinito es* π.»

Ejemplo 4

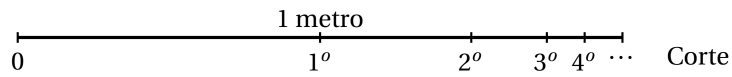
Luisa tiene una cuerda de un metro de largo. Como está aburrida y quiere matar el ocio, empieza a cortar la cuerda por la mitad exactamente. De los dos trozos que obtuvo, uno lo coloca en una mesa que está junto a ella y el otro trozo lo vuelve a partir por la mitad; de nuevo un trozo lo coloca en la mesa y el otro lo vuelve a cortar por la mitad. Si ella realiza n cortes, ¿Cuál es la longitud de cuerda que está en la mesa? [21]

- Observa que cada vez corta la mitad de lo que le queda en la mano.
- En el primer corte tiene medio metro en cada trozo.
- Después de cortar la segunda vez tiene un cuarto.
- Después de cortar la tercera vez tiene un octavo de metro, y así sucesivamente.
- Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+ \quad \cdots \quad &+\frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+ \quad \cdots \quad &+\frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

- En cada corte que hace Luisa a la cuerda, obtiene la mitad del pedazo anterior, y éste lo suma a la longitud que ya tenía en la mesa.

- La misma situación práctica nos sugiere una interpretación en una recta numérica, como se muestra a continuación:



- O bien, en una tabla:

No. Corte	**Longitud del corte**
0	1 m
1	$1/2$ m
2	$1/2^2$ m
3	$1/2^3$ m
$\cdots$	$\cdots$
n	$1/2^n$ m

- Observa que cada vez que ella corta el trozo de cuerda que le queda en la mano, obtiene otros dos nuevos trozos que tienen el mismo tamaño, porque siempre corta por la mitad.

- Entonces, el último trozo que sumó a la cantidad de cuerda que había en la mesa es igual al trozo con el que se quedó en la mano.

- Esto significa que la suma de la cuerda que está en la mesa es igual a 1 metro de cuerda (la longitud inicial de la cuerda) menos la longitud del trozo que le quedó en la mano, cuya longitud es igual a la del último trozo que agregó.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}=\frac{2^n}{2^n}-\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$$

- Observa que conforme n crece la suma se acerca cada vez más a 1.

- Esto es así porque el trozo de cuerda que le queda en la mano es cada vez más pequeño.

Ejemplo 5

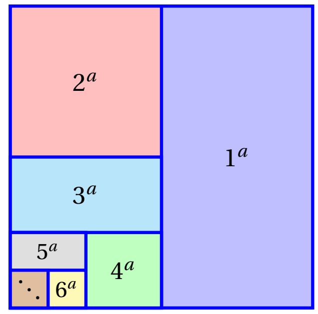
Un terreno que va a ser repartido entre todos los que llegarán al Castillo de Chato Petter de tal forma que a la primera persona le tocará la mitad del terreno, a la segunda persona la mitad de lo que quede y a la siguiente persona la mitad que quede, y así sucesivamente. Enseguida se muestra la interpretación geométrica de esta situación.

- Como a la primer persona le toca la mitad, dividimos el terreno por la mitad.

- A la segunda persona le corresponde la mitad de la mitad, es decir, una cuarta parte de todo el terreno.

- A la siguiente personal la mitad de lo que quede, y así sucesivamente...

- A la persona n-ésima le darán $1/2^n$ del terreno:



- Observa que la suma:
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$$
se aproxima mucho a 1 cuando el valor de n crece mucho, sin embargo, nunca se hace igual a 1, porque para que eso ocurriera, necesariamente el numerador debería ser igual al denominador, pero eso nunca ocurre, porque se está restando 1 a 2^n.

- Por otra parte, cuando los valores de n crecen mucho, el número 1 se hace insignificante comparado con 2^n, y esto hace que el cociente:
$$\frac{2^n-1}{2^n}$$
se aproxime cada vez más al número 1, pero como ya dijimos, nunca lo iguala.

Ejemplo 6

Cuando una piedra cae desde 10 metros de altura, su posición y puede calcularse con la fórmula:
$$y=10-4.905\,t^2$$
donde t es el tiempo que lleva cayendo. ¿Qué velocidad lleva a los 1.25 segundos después de inciar la caída?

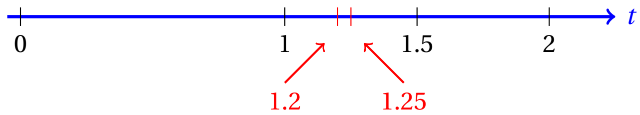
- Podemos calcular la altura a la que se encuentra 1.2 segundos después de iniciar la caída:
$$y(1.2)=10-4.905(1.2)^2=2.9368\text{ metros.}$$

- Y cuando ya pasaron 1.25 segundos su altura es:
$$y(1.25)=10-4.905(1.25)^2=2.3329\text{ metros.}$$

- Entonces, entre los primeros 1.2 y 1.25 segundos ha recorrido:
$$y(1.2)-y(1.25)=2.9368-2.3329=0.6\text{ metros}$$

- Su velocidad promedio en ese intervalo es:
$$\bar{v}=\frac{d}{t}=\frac{0.6}{0.05}=12\text{ m/s}$$

- Observa que hemos considerado la piedra justo antes de que pase por $t=1.25$.



- Vamos a calcular su velocidad justo después de pasar por ahí.
- Primero calculamos la altura que tiene esa predra a los 1.3 segundos:

$$y(1.3) = 10 - 4.905(1.3)^2 = 1.71 \text{ metros.}$$

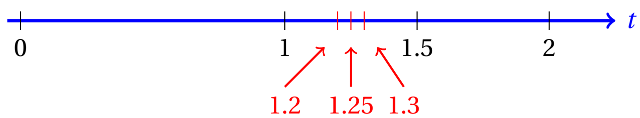
- Y como $y(1.25) = 2.3329$, entre los primeros 1.25 y 1.3 segundos ha recorrido:

$$y(1.2) - y(1.25) = 2.3329 - 1.71 = 0.6229 \text{ metros}$$

- Y ahora su velocidad es:

$$\bar{v} = \frac{d}{t} = \frac{0.6229}{0.05} = 12.458 \text{ m/s}$$

- Obviamente, al llevar más tiempo de caída, como está siendo acelerado debido a la gravedad, su velocidad creció.
- Pero no hemos medido su velocidad cuando $t = 1.25$ segundos, sino un poco antes y un poco después.



- Podemos calcular el promedio de las dos velocidades y suponer que este promedio está muy cerca de la velocidad que tiene la piedra cuando $t = 1.25$ segundos:

$$\bar{v}_f = \frac{12 + 12.458}{2} = 12.229 \text{ m/s}$$

- Sin embargo, no estamos seguros de que esta velocidad esté correcta.
- Si comparamos otros valores de t poco antes y poco después y volvemos a calcular el promedio, el resultado no necesariamente será el mismo.
- Vamos a elaborar una tabla, para calcular la altura de la piera para diferentes valores de t antes y después de $t = 1.25$.
- A partir de esos valores vamos a calcular la velocidad alrededor del valor de $t = 1.25$ para ver cómo cambia.

t	$y(t)$	Δd	Δt	$\bar{v}$
1.2000	2.9368	0.6009	0.0500	12.0180
1.2250	2.6394	0.3035	0.0250	12.1400
1.2375	2.4885	0.1526	0.0125	12.2080
1.2500	2.3359	0.0000	0.0000	----
1.2625	2.1819	0.1540	0.0125	12.3200
1.2750	2.0263	0.3096	0.0250	12.3840
1.3000	1.7106	0.6253	0.0500	12.5060

- De la tabla podemos observar que la velocidad que obtenemos depende cómo nos acerquemos al punto $t = 1.25$ s.
- Nuestro problema consiste en calcular la velocidad de la piedra en ese instante.
- De cualquier manera, el promedio que dimos antes ($\bar{v}_f = 12.229$ m/s) parece estar correcto.

Esa palabra «*parece*» nos deja con la duda. Sabemos que es una aproximación inteligente, pero nos gustaría conocer con mayor certeza el valor de la velocidad en ese punto.

En el siguiente ejemplo utilizaremos un recurso geométrico.

Ejemplo 7

Un estudiante de física lanzó una piedra hacia arriba de manera tal que su trayectoria sigue una parábola y la altura y medida en metros puede calcularse con:

$$y(t) = -4.905\,t^2 + 24.535\,t$$

donde t es el tiempo que lleva la piedra en el aire medido en segundos. Interpreta gráficamente la velocidad de la piedra a los dos segundos de haber sido lanzada.

- Podemos calcular la posición de la piedra a los dos segundos:

$$y(2) = -4.905(2)^2 + 24.535(2) = 29.45 \text{ metros.}$$

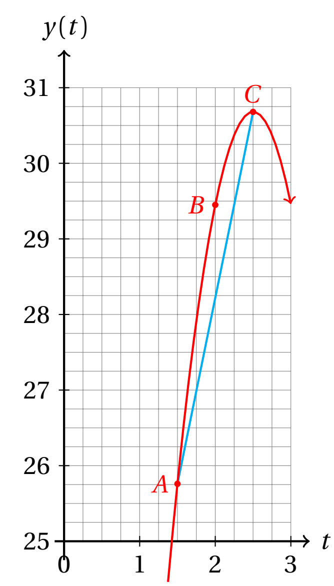
- Y su posición a los 2.5 segundos es:

$$y(2.5) = -4.905(2.5)^2 + 24.535(2.5) = 30.68 \text{ metros.}$$

- Mientras que su posición después de 1.5 segundos de haber sido lanzada es:

$$y(1.5) = -4.905(1.5)^2 + 24.535(1.5) = 25.76 \text{ metros.}$$

- Vamos a graficar esta función en el intervalo $2 \leq t \leq 2.5$:



- Recuerda que en el eje vertical tenemos la distancia que recorrió en t segundos.
- El eje horizontal está representando al tiempo.
- En la gráfica se incluyeron los puntos $A(1.5, 25.76)$, $B(2, 29.45)$ y $C(2.5, 30.68)$.
- De la gráfica se deduce inmediatamente que mientras la piedra se movía del punto A al punto B recorrió una mayor distancia que en el trayecto de B a C, a pesar de que utilizó la misma cantidad de tiempo.
- Esto nos indica que viajó, en promedio a mayor velocidad en el primer intervalo.
- La velocidad se calcula definiendo distancia entre tiempo.
- La velocidad promedio a la que viajó el tramo $\overline{AB}$ es:

$$\bar{v}_{AB} = \frac{29.45 - 25.76}{2.0 - 1.5} = \frac{3.7}{0.5} = 7.4 \text{ m/s}$$

- Por otra parte, la velocidad promedio para el tramo $\overline{BC}$ es:

$$\bar{v}_{BC} = \frac{30.68 - 29.45}{2.5 - 2.0} = \frac{1.23}{0.5} = 2.46 \text{ m/s}$$

- ¡Vaya diferencia!
- Observa que la velocidad promedio en realidad es la pendiente de la recta que pasa por los puntos de interés.
- Recuerda que la pendiente de una recta es una razón de dos cantidades:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Si en el numerador de la pendiente escribimos una distancia y en el denominador tiempo, la pendiente representa una velocidad promedio.
- Geométricamente ahora puedes notar la gran diferencia en las velocidad medida entre los puntos A y B comparada con los puntos B y C.
- La pendiente de cada segmento en la gráfica nos debe mostrar eso[1].

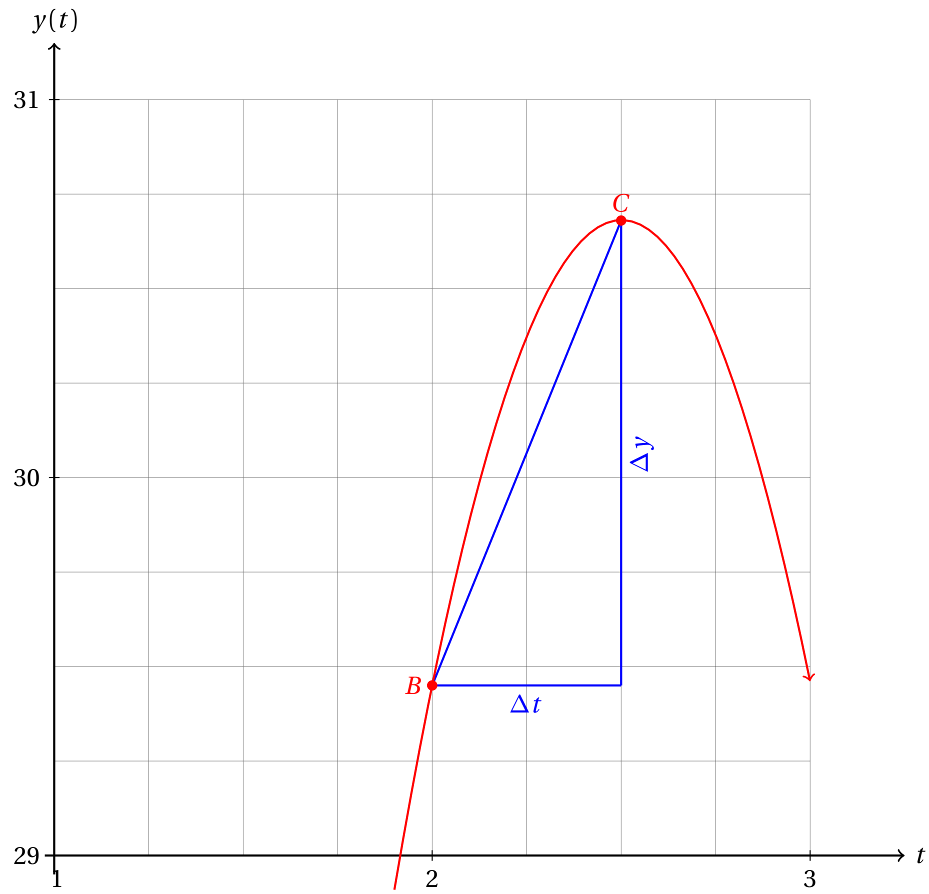
Pero no hemos terminado con el problema inicial.

Nosotros debemos calcular la velocidad de un objeto que se mueve, pero en un instante.

Sabiendo que la pendiente se interpreta como una velocidad, aproxima la velocidad promedio para acercarla cada vez más a la velocidad instantánea. **Ejemplo 8**

- Utilizaremos la gráfica del ejemplo anterior:

[1]Los segmentos no están incluidos en la gráfica.



- Ahora lo que debemos hacer es acercar el punto C al punto B poco a poco para ver cómo se comporta la pendiente de la recta que pasa por B y C.
- Pero nosotros sabemos cómo calcular y a partir de t:

$$y(t) = -4.905\,t^2 + 24.535\,t$$

- Así que si hacemos $t_0 = 2$, trataremos de averiguar qué ocurre con la pendiente de la recta conforme los valores de Δt se acercan a cero.
- Esto implica que el punto C se aproxime cada vez más al punto B.
- Así podremos calcular la velocidad de esa piedra en el instante $t = 2$.
- Empezamos, si $t_0 = 2$ está fijo y le sumamos la cantidad Δt, entonces, y se comporta así:

$$\begin{aligned}
y(2+\Delta t) &= -4.905(2+\Delta t)^2 + 24.535(2+\Delta t) \\
&= -4.905\left(4+4\Delta t+(\Delta t)^2\right) + 49.08 + 24.535\,\Delta t \\
&= -19.62 - 19.62\,\Delta t - 4.05(\Delta t)^2 + 49.08 + 24.535\,\Delta t \\
&= 29.46 + 4.915\,\Delta t - 4.05(\Delta t)^2
\end{aligned}$$

- La última expresión nos indica cómo se comporta $y(2+\Delta t)$.
- Cuando Δt se hace muy pequeño, casi cero, $y(2+\Delta t)$ debe aproximarse a $y(2)$:

$$y(2) = 29.46 + 4.915(0) - 4.05(0)^2 = 29.46$$

- Esto está de acuerdo con la intuición.
- Observa que $y(2+\Delta t)-y(2)$ representa la distancia que la piedra recorrió durante Δt segundos, a partir de $t=2$.
- Ahora veamos qué pasa con el cociente $[y(2+\Delta t)-y(2)]/(\Delta t)$, que es igual a la velocidad promedio:

$$\begin{aligned}\bar{v}_{BC} &= \frac{y(2+\Delta t)-y(2)}{\Delta t}\\ &= \frac{[29.46+4.915\Delta t-4.05(\Delta t)^2]-29.46}{\Delta t}\\ &= 4.915-4.05\Delta t\end{aligned}$$

- Cuando Δt se hace muy pequeño, la velocidad promedio se acerca mucho a la velocidad que debe tener la piedra cuando $t=2$ segundos, que en este caso es de:

$$v_B = 4.915-4.05(0) = 14.725 \text{ m/s}.$$

En el ejemplo anterior notamos que la velocidad promedio de la piedra entre los puntos B y C está representada geométricamente por la pendiente de la recta que pasa por esos puntos.

Cuando acercamos el punto C al punto B la recta secante a la parábola se va acercando a la tangente a la parábola en el punto B.

Precisamente esta es la interpretación geométrica de la velocidad instantánea.

19.1.2 Teoremas de los límites

Empezamos esta sección dando la definición de límite.

LÍMITE

Sea $y=f(x)$ una función. Si podemos formar la sucesión $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de valores de la variable x tales que cada uno de los términos de esa sucesión estén en el dominio de la función, y acercándose a un valor fijo $x=a$, y podemos siempre calcular $y_i=f(x_i)$ para toda x_i que se encuentre en la sucesión, excepto, posiblemente en $x_m=a$, entonces decimos que el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima al número a es igual a A, y matemáticamente lo denotamos por:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

Definición 1

Observa que no se requiere que $f(x)$ esté definida para $x=a$.

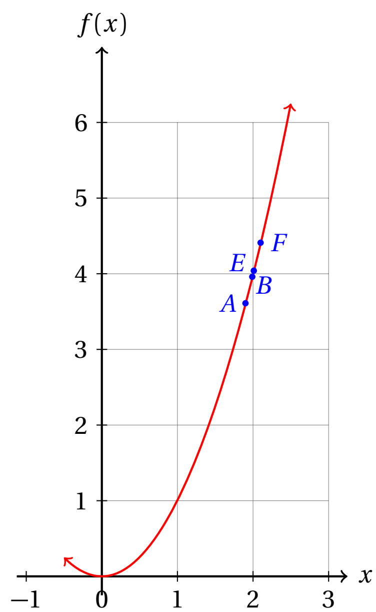
Calcula el límite al cual se aproxima la función $y=x^2$ cuando x se aproxima a 2.

Ejemplo 1

- Necesitamos calcular a qué valor se aproximará x^2 cuando x se acerca mucho a 2.
- Empezamos con una tabla:

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.61	3.9601	3.996001	4.004001	4.0401	4.41

- Observa que conforme x se acerca a 2, por debajo, es decir, dando los valores $1.9, 1.99, 1.999$, los valores de $f(x)$ que obtenemos se van a cercando a 4, también por debajo.
- Cuando decimos «*por debajo*», queremos decir que cada uno de los valores de la sucesión son menores al valor al que tienden.
- Cuando digamos «*por arriba*», entonces, querrá decir que los valores de la sucesión son mayores al valor al cual tienden.
- Cuando los valores de x se acercan por arriba a 2, los valores de $f(x)$ se acercan a 4 también por arriba.
- Geométricamente tenemos la siguiente situación:
  - ✓ Nos movemos sobre el eje x empezando en $x = 1.9$ (nos acercamos por la izquierda de $x = 2$)
  - ✓ Evaluamos $f(1.9) = 3.61$, que en la gráfica está indicado con el punto A
  - ✓ Después evaluamos $f(1.99) = 3.9601$ (punto B)
  - ✓ Finalmente, $f(1.999) = 3.996001$
  - ✓ Después empezamos desde $x = 2.1$ acercándonos a $x = 2$ desde la derecha.
  - ✓ Evaluamos $f(2.1) = 4.41$ denotado por el punto F en la gráfica.
  - ✓ Después evaluamos $f(2.1) = 4.0401$ (punto E)
  - ✓ Finalmente evaluamos $f(2.01) = 4.004001$.



- Conforme nos acerquemos más a $x = 2$ por la izquierda o por la derecha, la función (que es una máquina que transforma números) se acerca cada vez más a $y = 4$.

El hecho de que los valores de $f(x) = x^2$ conforme x se aproxima a 2 se acerquen a 4 era de esperarse porque $2^2 = 4$, y ya sabemos que la función $y = x^2$ es una función contínua, dado que es una función polinomial.

Entonces, cuando deseemos calcular el límite de una función polinomial, basta con que evaluemos la función al cual tiende y con eso encontraremos el resultado a nuestro problema.

Calcula:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3 - x + 1\right)$$

Ejemplo 2

- Como la función $y = x^3 - x + 1$ es polinomial, basta con sustituir $x = 2$ y evaluar:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3 - x + 1\right) = 2^3 - 2 + 1 = 7$$

- Se te queda como ejercicio graficar la función, y tabular valores de x y los valores que toma la función cuando x se acerca a 2 por la izquierda y por la derecha.
- Puedes utilizar los mismos que se utilizaron en la tabla anterior.

Sin embargo, no siempre vamos a requerir calcular límites de funciones polinomiales.

Algunas veces vamos a necesitar calcular límites de funciones racionales.

Calcula:

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2 - 25}{x - 5}\right)$$

Ejemplo 3

- En este caso, si sustituimos $x = 5$ en la función obtenemos:

$$y = \frac{5^2 - 25}{5 - 5} = \frac{0}{0} \qquad \Rightarrow \qquad \text{no está definido.}$$

- Entonces vamos a necesitar «*transformar*» la expresión racional de manera que no obtengamos división por cero.
- Para eso vamos a factorizar el numerador.
- Como en el númerador tenemos una diferencia cuadrados, la factorización nos da un producto conjugado:

$$y = \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x+5)(x-5)}{x-5}$$

- Ahora podemos simplificar la expresión, para obtener:

$$y = \frac{(x+5)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}} = x + 5$$

- Esta simplificación es válida siempre que $x \neq 5$, porque en ese caso el denominador se hace cero.
- Así que si suponemos que $x \neq 5$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2 - 25}{x - 5}\right) = \lim_{x\to 5}(x + 5)$$

- Observa que si x se acerca mucho a 5, entonces $x + 5$ se va a acercar mucho al valor: $5 + 5 = 10$

- Y es que $x+5$ es una función polinomial que solamente requiere que sustituyamos $x=5$ para obtener el resultado. Entonces,

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2-25}{x-5}\right)=\lim_{x\to 5}(x+5)=5+5=10$$

- Recuerda que en la función:

$$y=\frac{x^2-25}{x-5}$$

x no puede ser igual a 5.

- Pero la definición de límite nos dice que «*podemos siempre calcular $y_i=f(x_i)$ para toda x_i que se encuentre en la sucesión que formemos, excepto, posiblemente en $x_m=a$*», que es como ocurre en este caso.

- Se te queda como ejercicio elaborar una tabla y verificar que la función se acerca al mismo valor por la izquierda como por la derecha cuando x se acerca mucho a 5.

- De hecho,

$$y=\frac{x^2-25}{x-5}=x+5$$

para cualquier valor de x, excepto para $x=5$. Verifica esto graficando ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas.

En matemáticas el lenguaje es muy importante.

Cuando escribimos:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=k$$

lo leemos: «*el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es igual a k*».

También podemos leerlo como: «*el límite cuando $f(x)$ se aproxima o se acerca a x_0 es igual a k*»

Ejemplo 4

Calcula:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+11}{x+1}\right)$$

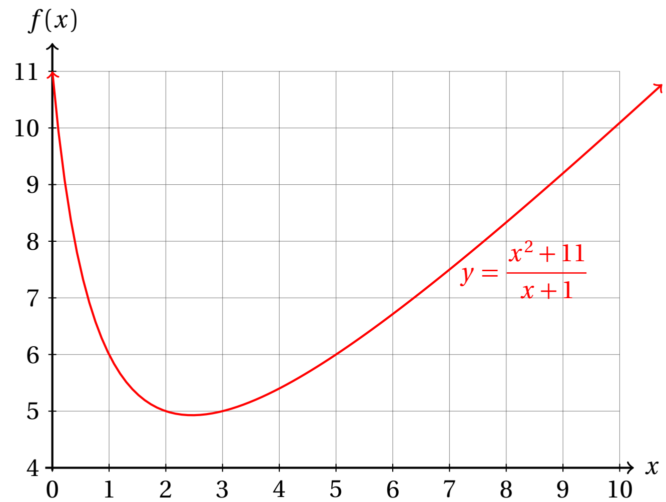
- Empezamos sustituyendo $x=3$ en la función:

$$f(3)=\frac{(3)^2+11}{3+1}=\frac{20}{4}=5$$

- En este caso no tenemos división entre cero, así que la función nos ayuda a resolver el problema muy rápidamente.

- Esta función presenta una asíntota en $x=-1$.

- vamos a graficarla para valores de $x>0$, porque nos interesa conocer cómo se comporta cerca de $x=3$.



- De la gráfica se hace evidente que, independientemente de que nos acerquemos a $x = 3$ por la izquierda o por la derecha, obtenemos en ambos casos el mismo resultado.

Calcula:
$$\lim_{x\to 100}\left(\frac{x-100}{\sqrt{x}-10}\right)$$
Ejemplo 5

- Si sustituimos $x = 100$ en la función de nuevo obtenemos una indeterminación.
- Así que vamos a tener que simplificar de alguna manera.
- Para eso vamos a definir: $u = \sqrt{x}$.
- Entonces, $u^2 = x$, y u debe acercarse a $\sqrt{100} = 10$, porque $u = \sqrt{x}$, y x se acerca a 100.
- Esto nos permite escribir:
$$\lim_{x\to 100}\left(\frac{x-100}{\sqrt{x}-10}\right) = \lim_{u\to 10}\left(\frac{u^2-100}{u-10}\right)$$
- Ahora podemos factorizar el numerador, porque se trata de una diferencia de cuadrados:
$$\lim_{u\to 10}\left(\frac{u^2-100}{u-10}\right) = \lim_{u\to 10}\left(\frac{(u+10)(u-10)}{u-10}\right)$$
- Al simplificar obtenemos:
$$\lim_{u\to 10}\left(\frac{(u+10)\cancel{(u-10)}}{\cancel{u-10}}\right) = \lim_{u\to 10}(u+10) = \lim_{x\to 100}\sqrt{x}+10 = \sqrt{100}+10 = 20$$

- En realidad lo que hicimos fue:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 100}\left(\frac{x-100}{\sqrt{x}-10}\right) &= \lim_{x\to 100}\left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-100}{\sqrt{x}-10}\right)\\
&= \lim_{x\to 100}\left(\frac{\left(\sqrt{x}+10\right)\left(\sqrt{x}-10\right)}{\sqrt{x}-10}\right)\\
&= \lim_{x\to 100}\left(\sqrt{x}+10\right)\\
&= \sqrt{100}+10=20
\end{aligned}$$

- El cambio de variable $u=\sqrt{x}$ es un truco que nos permitió simplificar la expresión.
- Este artificio matemático te será de gran ayuda en los ejercicios.
- Observa que:

$$y=\frac{x-100}{\sqrt{x}-10}=\sqrt{x}+10$$

para cualquier valor de x, excepto para $x=100$.

Los límites tienen algunas propiedades que nos ayudarán a resolver problemas de una manera más sencilla.

Las siguientes propiedades de los límites son las más importantes.

Definición 2

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Si $\lim_{x\to a} f(x)=M$, *y* $\lim_{x\to a} g(x)=N$, *se cumple:*

I. *Si* $f(x)=c$, *donde* c *es una constante, entonces:* $\lim_{x\to x_0}=c$ *para cualquier* x_0.

II. $\lim_{x\to a} k\cdot f(x)=k\cdot\lim_{x\to a} f(x)=k\cdot M$.

III. $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=M+N$.

IV. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=M\cdot N$.

V. $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{M}{N}$, *siempre que* $N\neq 0$.

VI. $\lim_{x\to a}\sqrt[r]{f(x)}=\sqrt[r]{M}$, *siempre que* $\sqrt[r]{M}\in\mathbb{R}$.

19.1.3 LÍMITES DE FUNCIONES

Gracias a las propiedades de los límites podemos resolver problemas de una manera más sencilla.

Límites de funciones polinomiales y racionales

Ejemplo 1

Calcula:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}+\frac{x-2}{x^2-4}\right)$$

- Sin el apoyo de las propiedades de los límites que se acaban de mencionar, empezaríamos realizando la suma de fracciones algebraicas que está indicada en la función.
- Mejor calculamos dos límites, aplicando la propiedad *III*.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)$$

- El primero de los límites es inmediato, dado que al sustituir no obtenemos división entre cero:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$$

- El segundo límite lo calculamos factorizando el denominador:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$$

- Ahora podemos simplificar la fracción, con lo que obtenemos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

- Así que:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}+\frac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

- Se te queda como ejercicio verificar con el uso de una tabla de valores que el resultado es correcto.

Ejemplo 2

Calcula:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+11}{x+1}\right)$$

aplicando la propiedad V de los límites.

- Este problema se resolvió en la página 778.
- Aplicamos directamente la propiedad *V* de los límites para verificar el resultado:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+11}{x+1}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+11)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}=\frac{(3)^2+11}{3+1}=\frac{20}{4}=5$$

- Y ambos resultados son correctos.
- Observa que como en el numerador como en el denomimador tenemos funciones polinomiales, podemos sustituir directamente el valor al cual tienen las funciones.
- También debes notar que el denominador no se hace cero. Eso nos permite evaluar inmediatamente el límite.

Sin embargo, algunos límites no existen.

Ejemplo 3

Calcula:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+11}{x-1}\right)$$

aplicando la propiedad V de los límites.

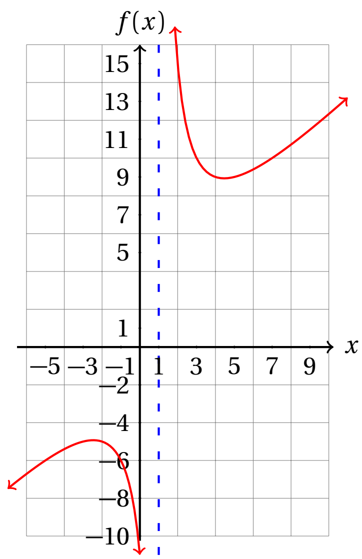
- Este problema es parecido al anterior.
- Aplicamos directamente la propiedad V de los límites:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+11}{x-1}\right)=\frac{\lim_{x\to 1}(x^2+11)}{\lim_{x\to 1}(x-1)}=\frac{(3)^2+11}{1-1}=\frac{12}{0}$$

- Pero no tiene sentido dividir entre cero.
- Si tratamos de resolver el problema tratando de simplificar, nos damos cuenta que no podemos factorizar el binomio $x-1$ de x^2+11.
- Esto nos indica que conforme nos acercamos a $x=1$ la gráfica de la función

$$y=\frac{x^2+11}{x-1}$$

crece mucho, porque precisamente en $x=1$ esta gráfica tiene una asíntota.



- Cuando nos acercamos a $x=1$ por la derecha, la función tiende a crecer infinitamente. Es decir,

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2+11}{x-1}\right)=\infty$$

- Por otra parte, cuando x se acerca mucho a 1 por la izquierda, la función se hace negativa y se va a menos infinito:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2+11}{x-1}\right)=-\infty$$

- Si ambos límites *laterales* fueran iguales, por ejemplo, que ambos se fueran a $+\infty$, entonces concluiríamos que el límite es ese valor.
- Pero no ocurre así, los dos límites laterales son distintos. Entonces,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+11}{x-1}\right)\text{ no existe.}$$

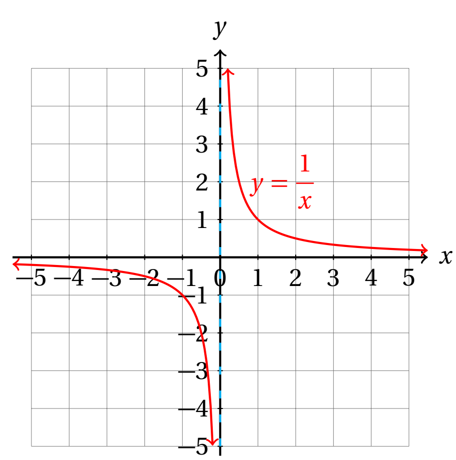
Definición 1	Límite lateral *Cuando calculamos el límite* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *usando valores de* x *tales que* $x_i < x_0$*, entonces decimos que hemos calculado el límite lateral por la izquierda.* *Por otra parte, si calculamos el mismo límite pero usando valores de* x *tales que* $x_i > x_0$*, entonces decimos que hemos calculado el límite lateral por la derecha.*

Cuando los dos límites son iguales decimos que el límite existe y es igual al valor común obtenido en ellos.

Cuando los límites laterales no coinciden decimos que el límite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ no existe.

Calcula: $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$$	**Ejemplo 4**

- Ya sabemos que la función $y = 1/x$ no está definida cuando $x = 0$.
- Además, cuando x es negativo, los valores de y que le corresponden también son negativos.
- Y cuando x es positivo, los valores que le corresponden de y también son positivos.
- Cuando x es muy cercano a cero, los valores de y crecen.
- Por ejemplo, considere, $x = \dfrac{1}{10^k}$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces:
$$\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{10^k}\right)}\right) = \left(\frac{10^k}{1}\right) = 10^k$$
- Conforme k crece, los valores de x se acercan cada vez más a cero, porque $x = \dfrac{1}{10^k}$.
- Pero los valores de y se hacen cada vez más grandes: $y = 10^k$.
- Observa que $x > 0$ implica que $y > 0$.
- Cuando x sea negativo ocurrirá lo mismo, pero ahora los valores de y serán negativos.



- Entonces, por una parte, el límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

- Y el límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = \infty$$

- Como ambos límites son diferentes, el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ no existe.}$$

Es importante hacer notar que no todos los límites de funciones racionales cuando x tiende a cero no existen.

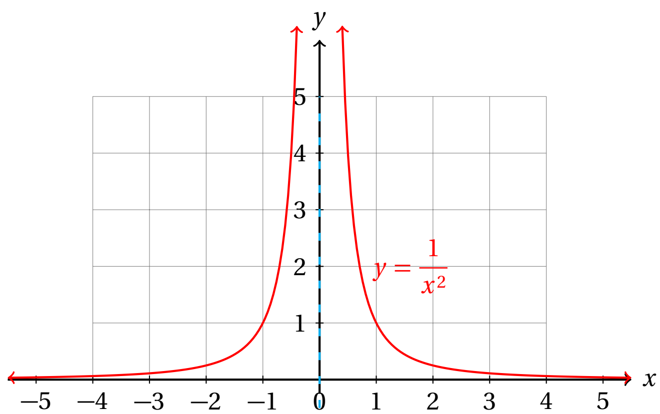
El verdadero problema surge cuando el denominador de la función racional se hace cero. Entonces habrá que ver que los límites laterales coincidan.

Ejemplo 5

Calcula:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

- En este caso, la función tampoco está definida para $x = 0$.
- De nuevo, la gráfica presenta una asíntota en $x = 0$.
- Pero y siempre es positiva, porque x aparece elevada al cuadrado.
- Esto nos indica que los límites laterales tienden a infinito los dos.
- Esto es evidente de la gráfica de la función:



- El límite por la izquierda es:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty$$

- Y el límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty$$

- Como ambos límites son iguales,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\infty$$

Calcula:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2\,x-6}{6\,x^2-18\,x}\right)$$

Ejemplo 6

- Si empezamos sustituyendo $x=3$ en la función obtenemos una indeterminación:

$$y(3)=\frac{2(3)-6}{6(3)^2-18(3)}=\frac{0}{0}$$

- Así que lo que tenemos que hacer es factorizar:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2\,x-6}{6\,x^2-18\,x}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{2\,x-6}{3x\,(2\,x-6)}\right)$$

- Para $x\neq 3$, podemos escribir:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2\,x-6}{6\,x^2-18\,x}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{3\,x}\right)=\frac{1}{9}$$

- Como el denominador no se hace cero, podemos evaluar la función en $x=3$.
- También podemos justificar este resultado usando la propiedad V de los límites.
- Se te queda como ejercicio.

Algunos límites parecen difíciles, pero no lo son.

Calcula:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x-2}}\right)$$

Ejemplo 7

- Si sustituimos $x=2$ en la función obtenemos cero sobre cero:

$$y(2)=\frac{2-2}{\sqrt{2-2}}=\frac{0}{0}$$

- Así que tenemos que simplificar la expresión (si es posible).
- Recuerda que $\sqrt{p}\cdot\sqrt{p}=p$ para cualquier valor p. Entonces,

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x-2}}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x-2}\right)$$

- Ahora sí podemos evaluar el límite porque no tenemos división entre cero:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x-2}}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x-2}\right)=\sqrt{2-2}=\sqrt{0}=0$$

- Y terminamos.

Debes tener en mente que no siempre basta con sustituir el valor al cual tiende x. También hay que verificar que este valor esté en el dominio de la función.

El dominio de la función $y = \sqrt{x-2}$ es: $x \geq 2$, porque el radicando debe ser no negativo para que la función asigne un valor a y.

El siguiente ejemplo termina el anterior.

Ejemplo 8

Calcula:
$$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x-2}\right)$$

- Primero debemos observar que $x = 2$ es el mínimo valor que puede tomar x para que la función $y = \sqrt{x-2}$ nos devuelva un valor para y.
- Por ejemplo, si $x = 1$, obtenemos: $y(1) = \sqrt{1-2} = \sqrt{-1}$.
- Como no nos devuelve un número real, decimos que no está definida para $x < 2$.
- Esto nos hace imposible calcular el límite por la derecha de esta función.
- En otras palabras, el límite por la izquierda no existe.
- Por otra parte, el límite por la derecha se puede calcular fácilmente.
- Dado que la función está definida para $x \geq 2$, tenemos:
$$\lim_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x-2}\right) = \sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0$$
- Pero para que el límite $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x-2}\right)$ exista, se requiere que los límites laterales sean iguales.
- Como un límite lateral no existe (el izquierdo), es imposible que los dos límites laterales sean iguales y por eso
$$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x-2}\right) \text{ no existe.}$$

La moraleja que debes aprender de los dos ejemplos anteriores es que no basta con simplificar y sustituir. Siempre tienes que tener en mente que para que el límite:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \qquad \text{exista,}$$
deben existir los dos límites laterales por la izquierda y por la derecha:
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$
En el caso de que la función no esté definida a la izquierda o a la derecha de x_0 nos impide calcular el límite por ese lado, por lo que el límite no existe.

Ejemplo 9

Calcula:
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x}+6}{\dfrac{1}{x}+3}\right)$$

- Ya sabemos que cuando $x \to 0$, el cociente $1/x$ no está definido.
- Podemos hacer un cambio de variable, definiendo: $u = 1/x$, entonces:

$$\frac{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{5}{x} + 6}{\dfrac{1}{x} + 3} = \frac{u^2 + 5\,u + 6}{u + 3}$$

- La fracción en términos de u puede simplificarse si factorizamos el numerador:

$$\frac{u^2 + 5\,u + 6}{u^2 + 3} = \frac{(u+2)(u+3)}{u+3} = u + 2$$

- Y al regresar a escribirlo en términos de x tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{5}{x} + 6}{\dfrac{1}{x} + 3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} + 2\right)$$

- Esto puede descomponerse como una suma de límites, gracias a la propiedad *III* de los límites:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} + 2\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to 0}(2)$$

- Por la propiedad *I*, tenemos: $\lim\limits_{x\to 0}(2) = 2$, pero ya sabíamos que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ no existe (página 783).}$$

- Entonces, el límite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{5}{x} + 6}{\dfrac{1}{x} + 3}\right) \text{ tampoco existe.}$$

Limites de funciones trigonométricas

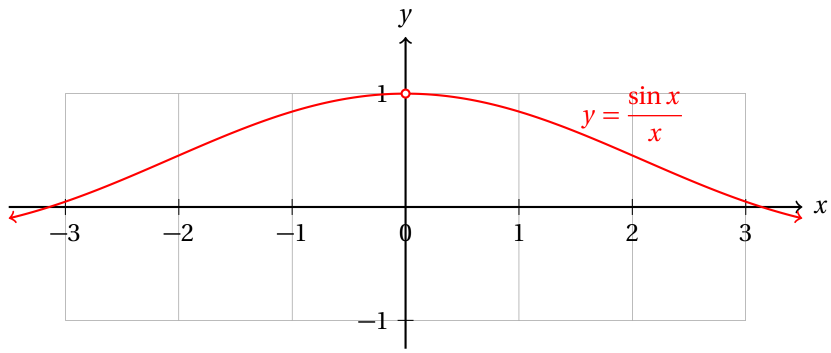
En los siguientes ejemplos vamos a estudiar los límites de funciones trigonométricas que más frecuentemente se encuentran en la resolución de problemas en matemáticas, ingeniería, administración, ciencias sociales y otras ramas del conocimiento.

Calcula:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

Ejemplo 10

- Si sustituimos $x = 0$ en la función, obtenemos cero sobre cero.
- Así que tendremos que utilizar otra forma.
- Primero nos basaremos en la gráfica para tener una idea y después utilizaremos una forma algebraica para verificar el resultado.
- La gráfica de la función es la siguiente:



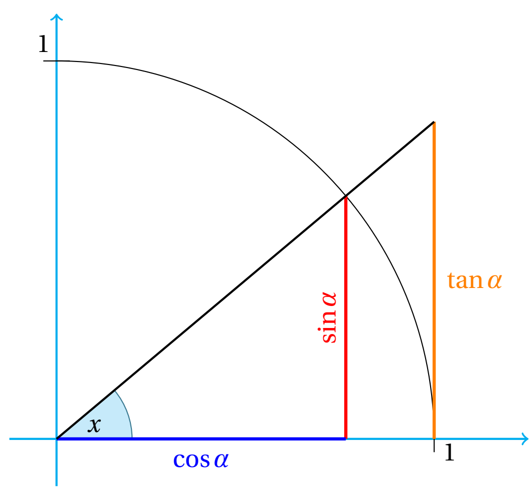
- De la gráfica inmediatamente podemos concluir que el límite buscado es 1, es decir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- Observa que la función no está definida para $x = 0$ debido a la división entre cero.
- Ahora vamos a jusfiticar el resultado por medio de un método algebraico.
- Suponemos que x es un ángulo medido en radianes, positivo.
- Si x fuera negativo, el resultado puede calcularse por medio de este mismo método, recordando que $\sin(-x) = -\sin(x)$.
- Observa que:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{-\sin(x)}{-x}$$

  de manera que al cambiar el signo de x el resultado sigue siendo válido.
- Consideramos la siguiente figura:



- El área del triángulo inscrito al arco de circunferencia es menor al área del sector circular del arco de x radianes.
- Igualmente el área del sector circular del arco es menor al área del triángulo más grande.

- Así que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \text{Área } \triangle_{\text{interno}} \leq \quad & A_a & \leq \text{Área } \triangle_{\text{externo}} \\ \frac{1}{2}\sin x \cos x \leq \quad & \frac{1}{2}x & \leq \frac{1}{2}\tan x \end{aligned}$$

- Dividiendo ambos lados de la desigualdad entre $\frac{1}{2}\sin x$, obtenemos:

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

- Cuando x se acerca mucho a cero $\cos x$ se acerca mucho a 1.
- Entonces,

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq 1$$

  cuando x tiende a cero.
- El recíproco $\dfrac{\sin x}{x}$, por tanto, debe también tender a uno:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Con este resultado podemos calcular otros límites de funciones trigonométricas.

Ejemplo 11

Calcula:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}\right)$$

- Dado que x se aproxima a cero sin llegar a serlo, podemos multiplicar por $2x$ en el numerador y denominador de la función $\sin(2x)$.
- De la misma manera, multiplicamos por $3x$ en el numerador y denominador de la función $\sin(3x)$, así obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)}{3x\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)}{3\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)}\right)$$

- Ahora aplicamos las propiedades *II* y *V* de los límites para obtener:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(2\,\frac{\sin(2x)}{2x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(3\,\frac{\sin(3x)}{3x}\right)} = \frac{2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)}{3\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)}$$

- Ahora aplicamos el resultado que obtuvimos en el ejemplo anterior haciendo $u = 2x$ y $v = 3x$, con lo que tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}\right) = \frac{2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)}{3\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)} = \frac{2\lim\limits_{u\to 0}\left(2\,\frac{\sin(u)}{u}\right)}{3\lim\limits_{v\to 0}\left(\frac{\sin(v)}{v}\right)} = \frac{2\cdot(1)}{3\cdot(1)} = \frac{2}{3}$$

- Entonces,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}\right)=\frac{2}{3}$$

Ejemplo 12

Calcula:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(3x)}{x\tan(2x)}\right)$$

- Necesitamos transformar la función a funciones cuyos límites ya conozcamos.
- En el primer paso multiplicamos por $(3x)^2$ en el numerador y en el denominador de la fracción:

$$\frac{\sin^2(3x)}{x\tan(2x)}=\frac{\sin^2(3x)}{(3x)^2}\cdot\frac{(3x)^2}{x\tan(2x)}=\left(\frac{\sin(3x)}{(3x)}\right)^2\cdot\frac{(3x)^2}{x\tan(2x)}$$

- El primer factor ya tiene la forma de un límite conocido, haciendo $u=3x$.
- Ahora recuerda que $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
- Sustituyendo esta identidad en el segundo factor obtenemos:

$$\frac{\sin^2(3x)}{x\tan(2x)}=\left(\frac{\sin(3x)}{(3x)}\right)^2\cdot\frac{9x}{\dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}=\left(\frac{\sin(3x)}{(3x)}\right)^2\cdot\frac{9x\,\cos(2x)}{\sin(2x)}$$

- Este resultado puede reescribirse como:

$$\frac{\sin^2(3x)}{x\tan(2x)}=9\left(\frac{\sin(3x)}{(3x)}\right)^2\cdot\frac{2x\,\cos(2x)}{2\,\sin(2x)}=\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{\sin(3x)}{(3x)}\right)^2\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\cos(2x)$$

- Ahora ya podemos calcular el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(3x)}{x\tan(2x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{\sin(3x)}{(3x)}\right)^2\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\cos(2x)\right)$$

- Aplicamos las propiedades de los límites para simplificar el cálculo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(3x)}{x\tan(2x)}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{\sin(3x)}{(3x)}\right)^2\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\cos(2x)\right)\\
&= \frac{9}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin(3x)}{(3x)}\right)^2\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\cos(2x)\right)\\
&= \frac{9}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{(3x)}\right)\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin(2x)}\right)\cdot\lim_{x\to 0}(\cos(2x))\\
&= \frac{9}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{(3x)}\right)\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(2x)}{2x}\right)}\right)\cdot\lim_{x\to 0}(\cos(2x))\\
&= \frac{9}{2}\cdot(1)^2(1)(1)=\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

- Entonces,

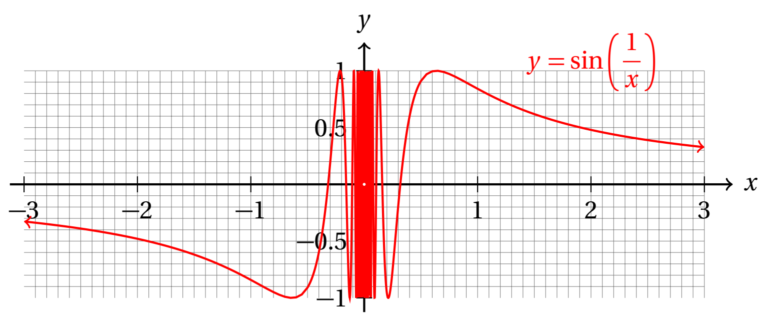
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(3x)}{x\tan(2x)}\right)=\frac{9}{2}$$

A través de una gráfica calcula:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Ejemplo 13

- La gráfica de la función $y=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ es la siguiente:



- Observa que conforme x se acerca a cero, $1/x$ crece muy rápidamente.

- Entonces, podemos transformar el límite como sigue:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}(\sin x)$$

- Pero cuando x se hace muy grande la función $\sin x$ varía entre -1 y 1.

- En otras palabras, no existe una asíntota horizontal a la cual se aproxime la función $\sin x$ cuando x tiende a infinito.

- Por tanto este límite no existe.

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}(\sin x)\qquad\to\qquad\text{no existe.}$$

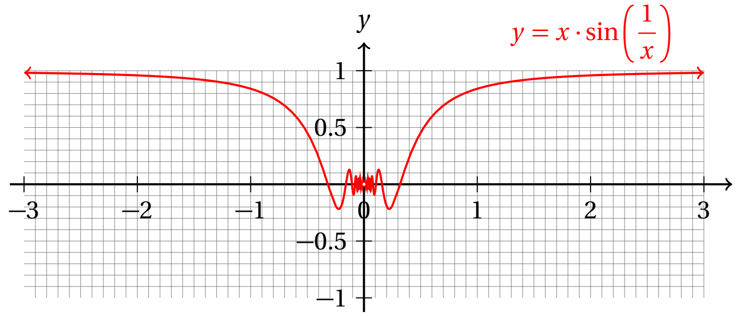
El siguiente ejemplo está muy relacionado con el anterior.

Calcula:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Ejemplo 14

- Vamos a empezar con la gráfica de la función para darnos una idea del resultado del límite:



- Al parecer tiende a cero.
- Vamos a justificarlo usando las propiedades de los límites.

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0}(x)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

- Nosotros ya sabemos que el segundo factor siempre está en el intervalo $[-1,1]$.
- Como el primer factor se acerca mucho a cero, cuando x tiende a cero estaremos multiplicando un número muy pequeño por otro número en el intervalo $[-1,1]$.
- El resultado de ese producto debe ser un número muy cercano a cero, como lo muestra la gráfica de la función.
- Entonces, el límite es:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

Hay muchas aplicaciones en diferentes ramas de las ciencias de los límites de funciones trigonométricas. En este apartado solamente hemos explicado los más frecuentes y los que te pueden dar una idea de cómo resolver límites de funciones trigonométricas.

Otras funciones que hemos estudiado en otros semestres son las funciones exponenciales y las logarítmicas.

Limites de funciones exponenciales y logarítmicas

Ejemplo 15

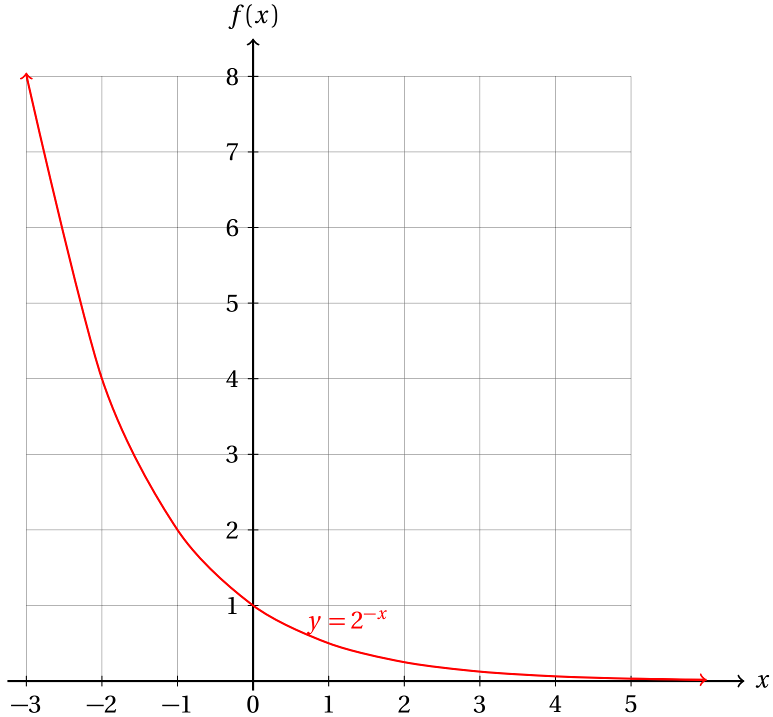
Calcula:

$$\lim_{x\to 0}\left(2^{-x}\right)$$

- Las funciones exponenciales están deifinidas para todo x real.
- Cuando $x = 0$, $2^{-x} = 1$.
- Entonces, si hacemos que los valores de x se acerquen a 0, esperamos que 2^{x} se acerque a 1.
- Matemáticamente:

$$\lim_{x\to 0}\left(2^{-x}\right) = 1$$

- La gráfica nos muestra eso:



Calcula:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-e^{-x}\right)$$

Ejemplo 16

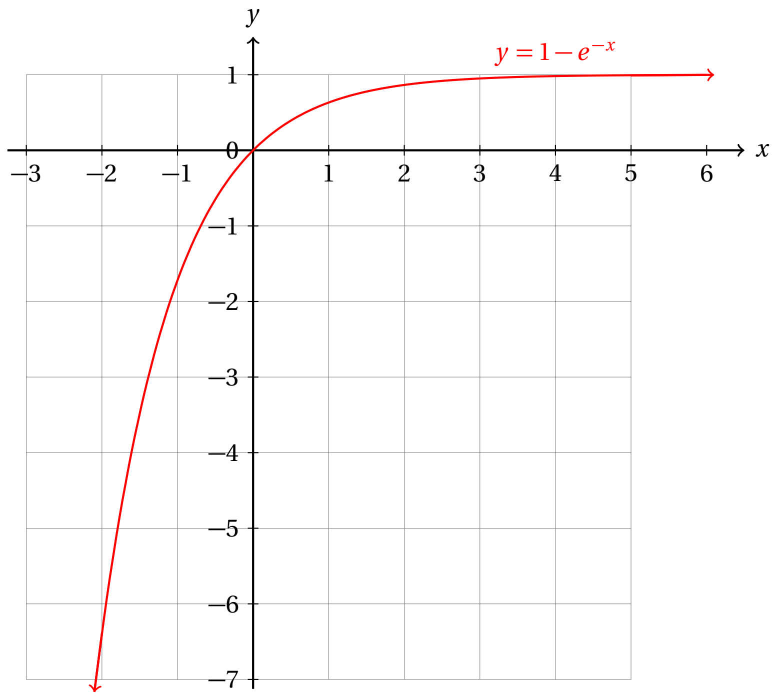
- De nuevo, cuando x tiende a cero, e^{-x} tiende a 1.

- Pero no queremos el límite de la función e^{-x} cuando x tiende a cero, sino de $1-e^{-x}$.

- Así que aplicando las propiedades de los límites, obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(1-e^{-x}\right) &= \lim_{x\to 0}(1)-\lim_{x\to 0}\left(e^{-x}\right)\\ &= 1-1=0\end{aligned}$$

- La gráfica muestra el mismo resultado geométricamente:



- Observa que cuando x crece mucho, los valores de y tienden a 1.

Observa que la gráfica siempre nos ayuda a calcular un límite.

Sin embargo, también podemos calcular los límites sin necesidad de una gráfica.

El análisis de la función y cada una de sus partes es la herramienta que nos ayuda a realizar los cálculos de los límites sin gráficas de las funciones.

Ejemplo 17

Calcula:

$$\lim_{x\to 0}(1-\ln(x))$$

- Cuando x tiende a cero por la derecha, $\ln(x)$ se va a $-\infty$.
- Pero por la izquierda, $\ln(x)$ no está definida.
- De esto nos damos cuenta con la gráfica.
- Entonces, cuando x tiende a cero, $-\ln(x)$ se va a ∞, porque el signo menos refleja la gráfica respecto al eje x.
- Aplicando las propiedades de los límites, podemos calcular el límite por la derecha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}(1-\ln(x)) &= \lim_{x\to 0^+}(1) - \lim_{x\to 0^+}(\ln(x))\\ &= 1-(-\infty)\\ &= \infty\end{aligned}$$

- Pero no podemos calcular el límite por la izquierda, porque la función $\ln(x)$ no está definida para $x \leq 0$.

- Entonces,

$$\lim_{x\to 0}(1-\ln(x)) \text{ no existe.}$$

Calcula:

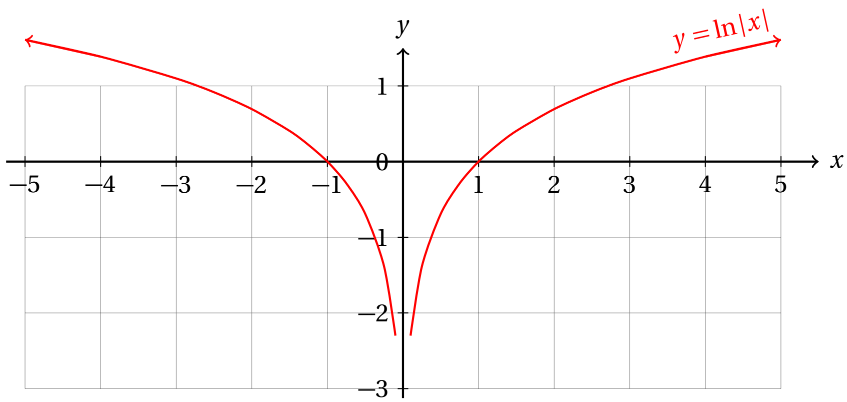
$$\lim_{x\to 0}(\ln|x|)$$

Ejemplo 18

- En este caso, dado que el argumento de la función siempre es no negativo, la función está definida para toda x, excepto en $x=0$.
- Cuando x tiende a cero por la derecha, $\ln|x|$ se va a $-\infty$.
- Igual ocurre por la izquierda, debido a la simetría de la función $|x|$.
- Entonces, cuando x tiende a cero, $\ln|x|$ se va a $-\infty$, tanto por la izquierda como por la derecha.
- Luego,

$$\lim_{x\to 0}(\ln|x|) = -\infty$$

- La gráfica de la función es la siguiente:



La población de una especie de rata que vive en los mercados se calcula con la siguiente fórmula:

$$P(t) = \frac{840\,000}{700+500\cdot e^{-1.02t}}$$

donde la población inicial es de 700 ratas ($t=0$), y t es el tiempo medido en días. Si no se utilizan raticidas para controlar la población, ¿cuál será la población de ratas a los 30 días?

Ejemplo 19

- Primero debes observar que el denominador de la función nunca se hace cero.
- Eso se debe a que:

$$700+500\cdot e^{-1.02t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{7}{5} = e^{-1.02t}$$

pero la función exponencial nunca toma valores negativos. Entonces, el denominador nunca se hace cero.

- Luego, el límite:
$$\lim_{t\to 30} P(t) = \lim_{t\to 30}\left(\frac{840\,000}{700+500\cdot e^{-1.02t}}\right) \qquad \text{existe.}$$
- Vamos a calcularlo.
- Como la función está definida para toda $t\in\mathbb{R}$, tenemos que evaluar la función en $t=30$:
$$\lim_{t\to 30} P(t) = \lim_{t\to 30}\left(\frac{840\,000}{700+500\cdot e^{-1.02t}}\right) = \frac{840\,000}{700+500\cdot e^{-1.02(30)}} = 1200$$
- Entonces, si en un mercado hay 700 ratas al inicio del mes, al final del mismo habrá 1200 ratas.

Ejercicios 19.1.3 Calcula cada uno de los siguientes límites. En caso de que un límite no exista, indícalo.

1) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$ -2

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$ 2

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^4-1}{x-1}\right)$ 4

4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^3-x^2-3x+2}{x-2}\right)$ 5

5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^3+x^2-x-1}{x-1}\right)$ 4

6) $\lim\limits_{x\to 1/3}\left(\frac{3x^3-7x^2+5x-1}{3x-1}\right)$ $\frac{4}{9}$

7) $\lim\limits_{x\to 5/3}\left(\frac{3x^3-8x^2+8x-5}{3x-5}\right)$ $\frac{19}{9}$

8) $\lim\limits_{x\to 7/5}\left(\frac{5x^3-17x^2+29x-21}{5x-7}\right)$ $\frac{54}{25}$

9) $\lim\limits_{x\to 7/5}\left(\frac{5x^3-17x^2+29x-21}{x-7}\right)$ $\nexists$

10) $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\left(\frac{5x^3-7x^2-15x+21}{x^2-3}\right)$ 0

11) $\lim\limits_{x\to 9}\left(\frac{x^3-14x^2+52x-63}{x-9}\right)$ 43

12) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^4+x^3-4x^2-x+3}{x+1}\right)$ 6

13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^4-4x^2+3}{x^2-1}\right)$ -2

14) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^4-4x^2+3}{x-1}\right)$ -4

15) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^4-4x^2+3}{x-1}\right)$ 0

16) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^4-4x^2+3}{x+1}\right)$ 4

17) $\lim_{x\to -1}\left(2x^4+3x^3+4x^2+9x+3\right)$ 3

18) $\lim_{x\to -3}\left(3x^4+4x^3-9x^2-8x+7\right)$ 70

19) $\lim_{x\to -2}\left(-6x^4+6x^3+3x^2-3x-8\right)$ -129

20) $\lim_{x\to 2}\left(-6x^4+4x^3-4x^2-3x+10\right)$ -89

21) $\lim_{x\to -2}\left(6x^4-3x^3-5x^2-3x+10\right)$ 103

22) $\lim_{x\to 2}\left(-6x^4+5x^3+4x^2+9x+4\right)$ -13

23) $\lim_{x\to -1}\left(-3x^4+4x^3-11x^2-5x+6\right)$ -18

24) $\lim_{x\to 2}\left(6x^4+2x^3+3x^2+4x+7\right)$ 136

25) $\lim_{x\to 2}\left(-4x^4+3x^3-8x^2+6x-3\right)$ -54

26) $\lim_{x\to 2}\left(5x^4+5x^3+3x^2-3x-6\right)$ 123

27) $\lim_{x\to 4}\left(3x^4-5x^3+2x^2-3x+10\right)$ 465

28) $\lim_{x\to 6}\left(1x^4-5x^3+7x^2+1x-8\right)$ 475

29) $\lim_{x\to -7}\left(\frac{x^3+9x^2+1x-105}{x^3+26x^2+224x-640}\right)$ $\frac{20}{3}$

30) $\lim_{x\to -9}\left(\frac{x^3+15x^2-62x+72}{x^3+9x^2-22x+120}\right)$ $-\frac{35}{13}$

31) $\lim_{x\to -7}\left(\frac{x^3-14x^2+37x+770}{x^3-1x^2+26x+24}\right)$ $\frac{51}{13}$

32) $\lim_{x\to 7}\left(\frac{x^3-7x^2+100x+700}{x^3-27x^2+236x+660}\right)$ 17

33) $\lim_{x\to -7}\left(\frac{x^3+13x^2-2x-280}{x^3+14x^2-19x-210}\right)$ $-\frac{33}{56}$

34) $\lim_{x\to -10}\left(\frac{x^3+6x^2+72x-320}{x^3+9x^2+102x-880}\right)$ -54

35) $\lim_{x\to -8}\left(\frac{x^3+8x^2+16x-128}{x^3+1x^2+24x-36}\right)$ $\frac{24}{35}$

36) $\lim_{x\to -7}\left(\dfrac{x^3-3\,x^2+61\,x+63}{x^3-4\,x^2+111\,x+594}\right)$ $-\dfrac{32}{9}$

37) $\lim_{x\to -4}\left(\dfrac{x^3+22\,x^2-152\,x+320}{x^3+15\,x^2-71\,x+105}\right)$ -8

38) $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{x^3-1\,x^2+105\,x+297}{x^3-6\,x^2+37\,x+210}\right)$ $\dfrac{7}{2}$

39) $\lim_{x\to -8}\left(\dfrac{x^3-5\,x^2+82\,x+176}{x^3-4\,x^2+76\,x+160}\right)$ $\dfrac{19}{18}$

40) $\lim_{x\to 10}\left(\dfrac{x^3-22\,x^2-147\,x-270}{x^3-20\,x^2-128\,x-256}\right)$ $\dfrac{1}{36}$

41) $\lim_{x\to -2}\left(\dfrac{x^3-19\,x^2-68\,x+220}{x^3-18\,x^2-101\,x+180}\right)$ $\dfrac{78}{7}$

42) $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{x^3-20\,x^2-117\,x-198}{x^3-3\,x^2-10\,x-24}\right)$ -24

43) $\lim_{x\to 0}\left(1-\sin^2 x\right)$ 1

44) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}\right)$ 1

45) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos^2 x}{\tan x}\right)$ 0

46) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sin^2 x}{\tan x}\right)$ $\nexists$

47) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(5\,x)}{x}\right)$ 5

48) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(3\,x)}{2\,x}\right)$ $\dfrac{3}{2}$

49) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(5\,x)}{\sin(7\,x)}\right)$ $\dfrac{5}{7}$

50) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{\sin(\pi\,x)}\right)$ $\dfrac{1}{\pi}$

51) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$ ∞

52) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos^2 x}{x}\right)$ $\nexists$

53) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(5\,x)}{x}\right)$ 5

54) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{2}\,\sin x\right)$ 0

55) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-8}{\sin(x-2)}\right)$ $\frac{8}{\sin 2}$

56) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x-2)}{x-2}\right)$ $-\frac{\cos 2}{2}$

19.1.4 Límites en el infinito

Muchas veces nos interesa conocer cómo se comporta la función cuando x crece mucho.

Por ejemplo, para saber qué va a pasar con la población de una especie en extinción, se elabora un modelo matemático que nos ayuda a predecir el tamaño de la población como una función del tiempo y lo que nos interesa saber es cuánto tiempo tenemos para tratar de incrementarla antes de que el tamaño de esa población sea igual a cero.

Calcula:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)$$

Ejemplo 1

- Este límite es evidente.
- Conforme x crece más, los valores de x^2 crecen todavía más.
- Así que conforme x se va a infinito, los valores de x^2 se van más rápido.
- Entonces,

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)=\infty$$

Calcula:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x^2}\right)$$

Ejemplo 2

- Podemos reescribir el límite de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$$

- Y aplicando la propiedad *III* de los límites, obtenemos:

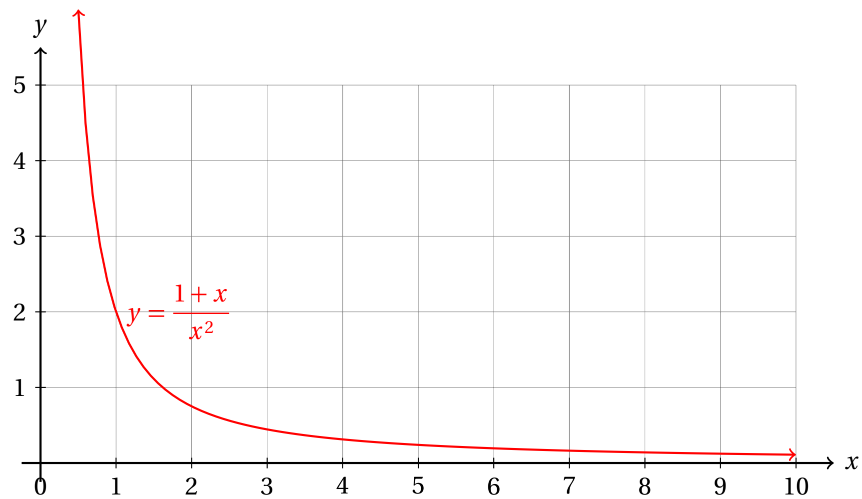
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Cuando x crece mucho, el cociente $1/x$ se va a cero rápidamente.
- Lo mismo le ocurre al cociente $1/x^2$.
- Entonces,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0+0=0$$

- Observa que el grado del denominador era mayor al grado del numerador.

- Como ya sabes, el polinomio de mayor grado crece más rápido.
- Esto nos debe indicar que la función:
$$y = \frac{1+x}{x^2}$$
tiende a cero cuando los valores de x crecen mucho.
- La gráfica también sugiere eso:



Cuando debemos calcular el límite de una función racional cuando x tiende a infinito, es una buena idea observar primero el grado de cada polinomio que forma la función racional.

Cuando el grado del polinomio que está en el numerador es mayor al grado del polinomio que está en el denominador pasa lo ocurrió en el ejemplo anterior.

En caso de que el grado del denominador sea mayor que el grado del numerador debemos usar otro truco.

Ejemplo 3

Calcula:
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{1+2\,x}\right)$$

- En este caso, el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador de la función racional.
- Observa que el polinomio se puede factorizar, pero la factorización no nos ayuda a simplificar la función:
$$y = \frac{x^2-1}{1+2\,x} = \frac{(x+1)(x-1)}{1+2\,x}$$
- Así que usaremos otro truco en este caso.
- El truco consiste en dividir cada uno de los términos de cada polinomio entre el monomio de mayor grado en el denominador de la función racional.

- En este caso, tendremos que dividir entre x:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{1+2\,x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{x^2}{x}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2\,x}{x}}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+2}\right)\end{aligned}$$

- Ahora aplicamos la propiedad V de los límites para obtener:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{1+2\,x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+2}\right)\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2\right)}\end{aligned}$$

- Ya sabemos que cuando x tiende a infinito, el cociente $1/x$ tiende a cero, luego

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{1+2\,x}\right) &= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2\right)}\\ &= \frac{\infty-0}{0+2}\\ &= \infty\end{aligned}$$

- Con lo que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{1+2\,x}\right)=\infty$$

- En este caso, el polinomio que está en el numerador tiene mayor grado que el polinomio que está en el denominador de la función racional.
- Esto nos sugiere que la función debe crecer conforme x crece más.
- Ese argumento se sigue de que para valores de x suficientemente grandes, el numerador siempre será mayor que el denominador.
- El resultado está de acuerdo con este argumento.

El único caso que nos queda pendiente es en el que el grado del polinomio que está en el numerador sea igual al grado del que está en el denominador de la función racional.

Ejemplo 4

Calula:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3\,x^4-2\,x^3+x^2-7}{1+2\,x-3\,x^2+5\,x^3+7\,x^4}\right)$$

- No tienes por qué entrar en pánico al ver un ejercicio así.
- Solamente debes usar el mismo truco que usamos en el ejemplo anterior.
- Vamos a dividir ambos polinomios entre el monomio de mayor grado.
- En este caso vamos a dividir entre x^4:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3\,x^4-2\,x^3+x^2-7}{1+2\,x-3\,x^2+5\,x^3+7\,x^4}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{3\,x^4}{x^4}-\dfrac{2\,x^3}{x^4}+\dfrac{x^2}{x^4}-\dfrac{7}{x^4}}{\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{2\,x}{x^4}-\dfrac{3\,x^2}{x^4}+\dfrac{5\,x^3}{x^4}+\dfrac{7\,x^4}{x^4}}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{7}{x^4}}{\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{5}{x}+7}\right)\end{aligned}$$

- Ahora observa que todos los cocientes que tienen a x o alguna de sus potencias en el denominador se hacen cero cuando x tiende a infinito.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3\,x^4-2\,x^3+x^2-7}{1+2\,x-3\,x^2+5\,x^3+7\,x^4}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{7}{x^4}}{\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{5}{x}+7}\right)\\ &= \frac{3-0+0-0}{0+0-0+0+7}=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3\,x^4-2\,x^3+x^2-7}{1+2\,x-3\,x^2+5\,x^3+7\,x^4}\right)=\frac{3}{7}$$

- Se te queda como ejercicio graficar la función para el intervalo $10\leq x\leq 100$ dando valores de 10 en 10.

Podemos generalizar el resultado del ejemplo anterior con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5

Calcula:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_3\,x^3+a_2\,x^2+a_1\,x+a_0}{b_3\,x^3+b_2\,x^2+b_1\,x+b_0}\right)$$

- De nuevo, tenemos una función racional con polinomios en el numerador como el denominador de igual grado.
- Así que vamos a dividir entre el monomio de mayor grado: x^3

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_3\,x^3+a_2\,x^2+a_1\,x+a_0}{b_3\,x^3+b_2\,x^2+b_1\,x+b_0}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{a_3\,x^3}{x^3}+\dfrac{a_2\,x^2}{x^3}+\dfrac{a_1\,x}{x^3}+\dfrac{a_0}{x^3}}{\dfrac{b_3\,x^3}{x^3}+\dfrac{b_2\,x^2}{x^3}+\dfrac{b_1\,x}{x^3}+\dfrac{b_0}{x^3}}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_3+\dfrac{a_2}{x}+\dfrac{a_1}{x^2}+\dfrac{a_0}{x^3}}{b_3+\dfrac{b_2}{x}+\dfrac{b_1}{x^2}+\dfrac{b_0}{x^3}}\right)\end{aligned}$$

- Cuando x tiende a infinito, cada cociente que incluye a x en el denominador se hace cero y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_3+\frac{a_2}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_0}{x^3}}{b_3+\frac{b_2}{x}+\frac{b_1}{x^2}+\frac{b_0}{x^3}}\right)\\
&= \frac{a_3+0+0+0}{b_3+0+0+0}\\
&= \frac{a_3}{b_3}
\end{aligned}
$$

- En otras palabras, el limite de una función racional con polinomios en el numerador y denominador del mismo grado tiende al cociente de los coeficientes principales de los polinomios que definen la función.
- Matemáticamente, para polinomios de tercer grado, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0}\right)=\frac{a_3}{b_3}$$

- Es muy sencillo generalizar este resultado a polinomios de grado n.
- Ese es tu ejercicio.

Ejemplo 6

Una fábrica de ventiladores ha encontrado que cuando invierte x millones de pesos tiene ventas por $V(x)$ millones de pesos por cada millón invertido, donde

$$V(x)=\frac{7x^2-3x+10}{2x^2+3x+5}$$

¿Cuál es la máxima venta que puede esperar tener esa compañía?

- Obviamente, mientras más invierta esa fábrica, mayores ventas debe tener.
- Si eso es cierto, entonces necesitamos conocer a qué valor se aproxima la función de ventas cuando lo que invierte la compañía es muy grande.
- Matemáticamente, necesitamos calcular:

$$\lim_{x\to\infty}V(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x^2-3x+10}{2x^2+3x+5}\right)$$

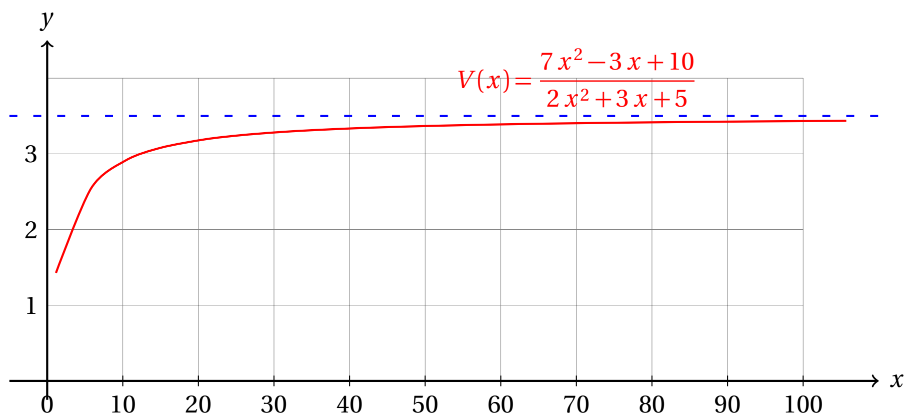
- Calcular el límite es sencillo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}V(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x^2-3x+10}{2x^2+3x+5}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{7x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{10}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7-\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)\\
&= \frac{7-0+0}{2+0+0}=\frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

- Entonces, por más que invierta, nunca podrá vender más de 3.5 millones de pesos por cada millón que invierta.

- Cuando x crece mucho, $V(x)$ tiende a 3.5 millones.

- Geométricamente tenemos que $y = 3.5$ es una asíntota horizontal:



Los límites al infinito, entonces, pueden ayudarnos a graficar una función racional, pues nos dicen cómo se comporta la función para valores de x muy grandes.

Ejemplo 7

Encuentra las asíntotas horizontales de la función:

$$y = \frac{3x - 2}{x + 1}$$

- Cuando x tiende a $-\infty$, tenemos:

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x - 2}{x + 1} \right)$$

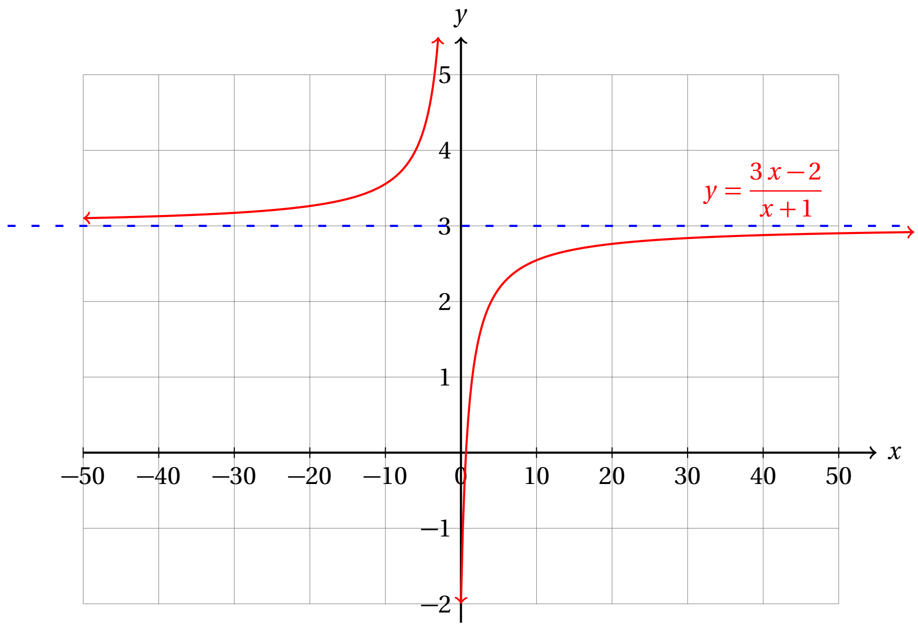
- Dividiremos cada término del numerador como del denominador entre x y después simplificamos:

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x - 2}{x + 1} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\frac{3x}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right)$$

- Cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$, obtenemos:

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3 + 0}{1 - 0} \right) = 3 \qquad \lim_{x \to \infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3 - 0}{1 + 0} \right) = 3$$

- Así que $y = 3$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función:



Un fabricante de tenis deportivos ha encontrado que el costo $C(x)$ de producción de x pares de tenis es de:

$$C(x) = 275\,x + 25\,000$$

Calcula el costo promedio de producción de cada par de tenis deportivos.

Ejemplo 8

- para calcular el costo promedio de producción tenemos que dividir el costo de producción de todos los pares de tenis entre el número de tenis producidos:

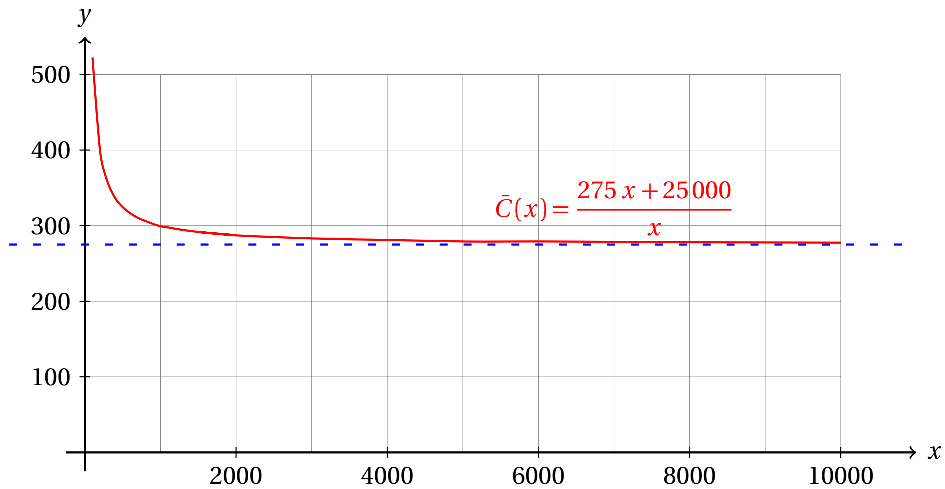
$$\bar{C}(x) = \frac{275\,x + 25\,000}{x}$$

- Cuando el número x de pares de tenis producidos es muy grande, el promedio se aproxima a:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \bar{C}(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{275\,x+25\,000}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{275\,x}{x}+\dfrac{25\,000}{x}}{\dfrac{x}{x}}\right)\\
&= \frac{275+0}{1} = 275
\end{aligned}$$

- El precio promedio cuando produce muchos pares de tenis se acerca a $275.00 pesos.

- ¿Puedes decir, a partir de la siguiente gráfica, si producir más le hace más barato o más caro el precio de producción promedio?



Ejemplo 9

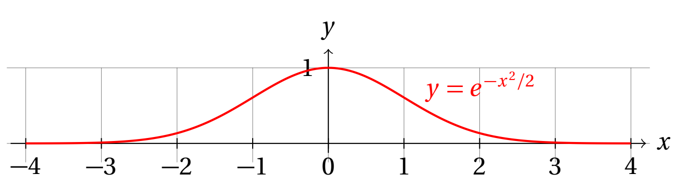
Calcula:

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x^2/2}\right)$$

- Empezamos observando que el exponente de la función es negativo.
- Esto nos indica que podemos escribir:

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x^2/2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{x^2/2}}\right)$$

- Cuando x crece mucho, $x^2/2$ crece todavía más y $e^{x^2/2}$ crece mucho más.
- Así que estamos calculando el resultado de dividir 1 entre un número que crece muy rápido.
- Entonces, conforme x tienda a infinito, esperamos que $e^{-x^2/2}$ se vaya a cero muy rápido.
- La gráfica de la función nos da la misma información.:



- Entonces,

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x^2/2}\right) = 0$$

Ejemplo 10

Calcula:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2} + 5e^{-2t}\right)$$

- Empezamos aplicando las propiedades de los límites:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}+5e^{-2t}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)+\lim_{x\to\infty}5e^{-2t}\\ &= \frac{3}{2}+\lim_{x\to\infty}5e^{-2t}\\ &= \frac{3}{2}+5\cdot\lim_{x\to\infty}e^{-2t}\end{aligned}$$

- Cuando t tiende a infinito $e^{-2t}=1/e^{2t}$ tiende a cero, porque e^{2t} crece muy rápido. Entonces,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}+5e^{-2t}\right)=\frac{3}{2}+5\cdot\lim_{x\to\infty}e^{-2t}=\frac{3}{2}+5\cdot(0)=\frac{3}{2}$$

- Se te queda como ejercicio graficar la función $y=\dfrac{3}{2}+5e^{-2x}$ y verificar gráficamente el resultado.

Ejemplo 11

La producción de un trabajador de ensamble de juguetes después de t días es de:

$$P(t)=35\cdot\left(1-e^{-0.25t}\right)$$

en cada hora de trabajo. ¿Cuál es el número máximo de juguetes que puede ensamblar en una hora un experto ensamblador?

- Para calcular el número de juguetes que puede ensamblar un experto, consideramos que tiene mucho tiempo de práctica ensamblando juguetes.
- Así que tenemos que calcular:

$$\lim_{t\to\infty}P(t)=\lim_{t\to\infty}\left[35\cdot\left(1-e^{-0.25t}\right)\right]$$

- Aplicando las propiedades de los límites obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}P(t) &= \lim_{t\to\infty}\left[35\cdot\left(1-e^{-0.25t}\right)\right]\\ &= 35\cdot\lim_{t\to\infty}\left[1-e^{-0.25t}\right]\\ &= 35\cdot\left[\lim_{t\to\infty}(1)-\lim_{t\to\infty}\left(e^{-0.25t}\right)\right]\\ &= 35\cdot\left[1-\lim_{t\to\infty}\left(e^{-0.25t}\right)\right]\end{aligned}$$

- Usando las leyes de los exponentes, podemos escribir:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}P(t) &= 35\cdot\left[1-\lim_{t\to\infty}\left(e^{-0.25t}\right)\right]\\ &= 35\cdot\left[1-\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{e^{0.25t}}\right)\right]\end{aligned}$$

- Cuando t tiende a infinito, el cociente $1/e^{0.25t}$ tiende a cero, entonces,

$$\lim_{t\to\infty}P(t)=35\cdot[1-0]=35\cdot(1)=35$$

- Con el paso del tiempo un trabajador puede ensamblar a lo más 35 juguetes por hora.
- Verifica geométricamente el resultado graficando la función $P(t) = 35 \cdot \left(1 - e^{-0.25t}\right)$.

Ejemplo 12

Si p es el precio de una caja de cereal, el número de unidades demandadas por los clientes está relacionada con el precio de acuerdo a la siguiente función:

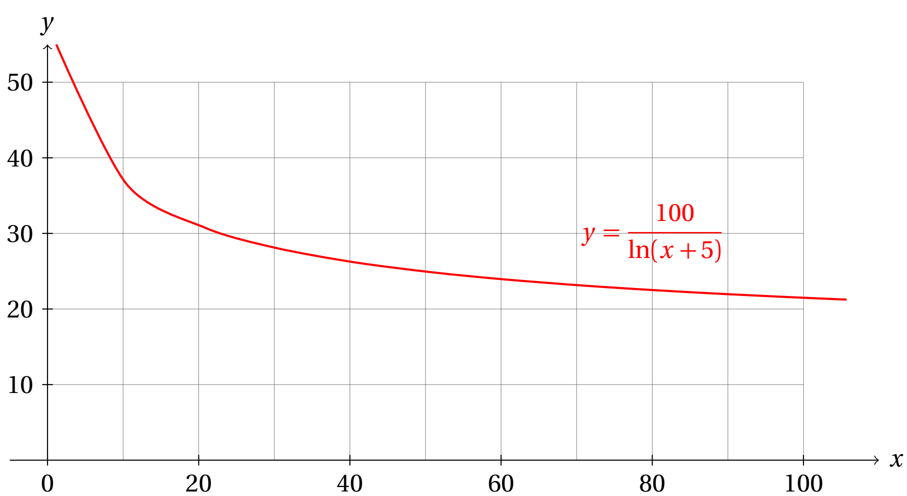
$$p(x) = \frac{100}{\ln(x+5)}$$

Si la demanda crece mucho, ¿qué pasa con el precio?

- Necesitamos calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{100}{\ln(x+5)}\right)$$

- Empezamos graficando la función:



- Ya sabemos que la función $y = \ln(x+5)$ se va a infinito cuando x tiende a infinito.
- Entonces, $\dfrac{100}{\ln(x+5)}$ tiende a cero cuando x tiende a infinito, porque el denominador crece más y más.

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{100}{\ln(x+5)}\right) = 0$$

Ejercicios 19.1.4

Calcula cada uno de los siguientes límites. En caso de que el límite pedido no exista, indícalo.

1) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{2}\right)$ ∞

2) $\lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)$ 0

3) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)$ 1

4) $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x^3\right)$ $-\infty$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{2\,x^2}\right)$ ∞

6) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^3-1}\right)$ 0

7) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2\,x^3-4\,x^2+5\,x-7}{7\,x^3-5\,x^2-4\,x+2}\right)$ $\frac{2}{7}$

8) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5\,x^5-1}{500\,x^4+120\,x^3}\right)$ ∞

9) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}\right)$ 1

10) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2\,x^5-64}{x^5-16\,x^4+8\,x^3+4\,x^2-2\,x+1}\right)$ 2

11) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7\,x^7+10^6}{6\,x^8-10^6}\right)$ 0

12) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6\,x^8-10^6}{7\,x^7+10^6}\right)$ $-\infty$

13) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x^4-6\,x^3+11\,x^2-4\,x-5}{3x^4-2\,x^3+11\,x^2-5\,x-4}\right)$ $\frac{8}{3}$

14) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-4x^4-1\,x^3-2\,x^2-2\,x+8}{-11x^4-3\,x^3-9\,x^2-10\,x+3}\right)$ $\frac{4}{11}$

15) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{10x^4-6\,x^3+5\,x^2-8\,x+7}{-5x^4-11\,x^3+3\,x^2-10\,x+2}\right)$ $-\frac{10}{5}$

16) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x^4+1\,x^3-6\,x^2+4\,x-9}{2x^4+5\,x^3-1\,x^2+8\,x-5}\right)$ $\frac{7}{2}$

17) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-10x^4-3\,x^3-3\,x^2+6\,x-6}{-11x^4-6\,x^3-11\,x^2+4\,x-6}\right)$ $\frac{10}{11}$

18) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x^4+9\,x^3-5\,x^2-10\,x-5}{-6x^4+4\,x^3-4\,x^2-2\,x-6}\right)$ $-\frac{7}{6}$

19) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x^4+4\,x^3+8\,x^2+3\,x+10}{-7x^4+8\,x^3+7\,x^2+3\,x+5}\right)$ $-\frac{9}{7}$

20) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-8x^4+10\,x^3+11\,x^2+2\,x-6}{-10x^4+11\,x^3+6\,x^2+3\,x-6}\right)$ $\frac{4}{5}$

21) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^4+6\,x^3+9\,x^2-5\,x+2}{10x^4+2\,x^3+5\,x^2-1\,x+5}\right)$ $\frac{3}{5}$

22) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x^4+4x^3-6x^2+3x+4}{-6x^4+11x^3-6x^2+4x+10}\right)$ $-\dfrac{7}{6}$

23) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{-11x^4-5x^3-8x^2+1x-3}{-9x^4-10x^3-10x^2+2x-4}\right)$ $\dfrac{11}{9}$

24) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{-4x^4+4x^3-9x^2-11x+2}{7x^4+7x^3-10x^2-7x+1}\right)$ $-\dfrac{4}{7}$

25) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{-6x^4-11x^3+8x^2+3x+8}{3x^4-1x^3+8x^2+1x+5}\right)$ $-\dfrac{6}{3}$

26) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{-10x^4+4x^3+5x^2-8x-9}{-7x^4+7x^3+7x^2-5x-6}\right)$ $\dfrac{10}{7}$

27) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x^4-3x^3-2x^2-3x-8}{-1x^4-10x^3-8x^2-6x-5}\right)$ -6

28) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{-9x^4-4x^3+9x^2+9x+9}{7x^4-3x^3+1x^2+10x+4}\right)$ $-\dfrac{9}{7}$

29) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{-3x^4-2x^3+10x^2+7x-4}{-5x^4-2x^3+4x^2+11x-2}\right)$ $\dfrac{3}{5}$

30) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{-6x^4+5x^3+10x^2-4x-5}{10x^4+8x^3+2x^2-4x-3}\right)$ $-\dfrac{3}{5}$

31) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{-9x^4+10x^3+7x^2+9x+5}{5x^4+5x^3+2x^2+10x+6}\right)$ $-\dfrac{9}{5}$

32) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{-1x^4-7x^3+7x^2+9x+8}{-10x^4-8x^3+11x^2+3x+5}\right)$ $\dfrac{1}{10}$

33) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{-9x^4+2x^3+3x^2-10x-6}{3x^4+11x^3+7x^2-2x-10}\right)$ $-\dfrac{9}{3}$

34) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x^4+1x^3+5x^2-3x+9}{5x^4+3x^3+8x^2-5x+6}\right)$ $\dfrac{9}{5}$

35) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x^4+5x^3-2x^2-3x+6}{2x^4+7x^3-10x^2-4x+8}\right)$ $\dfrac{9}{2}$

36) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{-10x^4-6x^3-7x^2-5x-9}{-1x^4-10x^3-2x^2-4x-4}\right)$ 10

37) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{-6x^4-7x^3-8x^2+6x+8}{4x^4-3x^3-3x^2+4x+4}\right)$ $-\dfrac{3}{2}$

38) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-\ln x}{\ln x}\right)$ ∞

39) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2\ln(x)}{1-\ln(x)}\right)$ -2

40) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3\sqrt{x}}{e^{-x^2}}\right)$ ∞

41) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\cdot e^{-x}}{x^2+1}\right)$ 0

42) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$ 0

43) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^e}\right)$ ∞

44) $\lim_{x\to\infty}(\cos x)$ $\nexists$

45) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\tan x}{\sec x}\right)$ $\nexists$

46) $\lim_{x\to\infty}(\sin x-\cos x)$ $\nexists$

47) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ 0

48) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sin x}{x}\right)$ 1

49) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos x}{x+\sin x}\right)$ 0

50) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x+\sin x}{x^2+e^{2x}}\right)$ 0

19.2 Teorema de continuidad de una función

A través de algunos ejemplos nos hemos dado cuenta que un límite existe siempre que la función es contínua en un intervalo al cual pertenezca el punto al cual tiende la variable independiente de la función.

Hay algunas condiciones que nos ayudan a calcular límites de una manera sencilla límites y que también nos ayudan a determinar si una función es contínua en un punto.

19.2.1 Condiciones de continuidad

Para que una función sea contínua se requeiren de las siguientes condiciones.

Definición 1

CONDICIONES DE CONTINUIDAD

Una función $y = f(x)$ es contínua en $x = a$, si

i. $f(a)$ *está definida,*

ii. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe, y*

iii. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Cuando decimos que una función es contínua en un intervalo I, queremos decir que las condiciones de continuidad se cumplen para cualquier punto de ese intervalo.

Recuerda que la segunda condición requiere que los límites laterales:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) \qquad \text{existen.}$$

En los siguientes ejemplos veremos algunos casos de funciones que son contínuas y otros de funciones discontínuas.

Ejemplo 1

Verifica si la función:

$$y = x^2 - 1$$

es contínua en el punto $x = 0$.

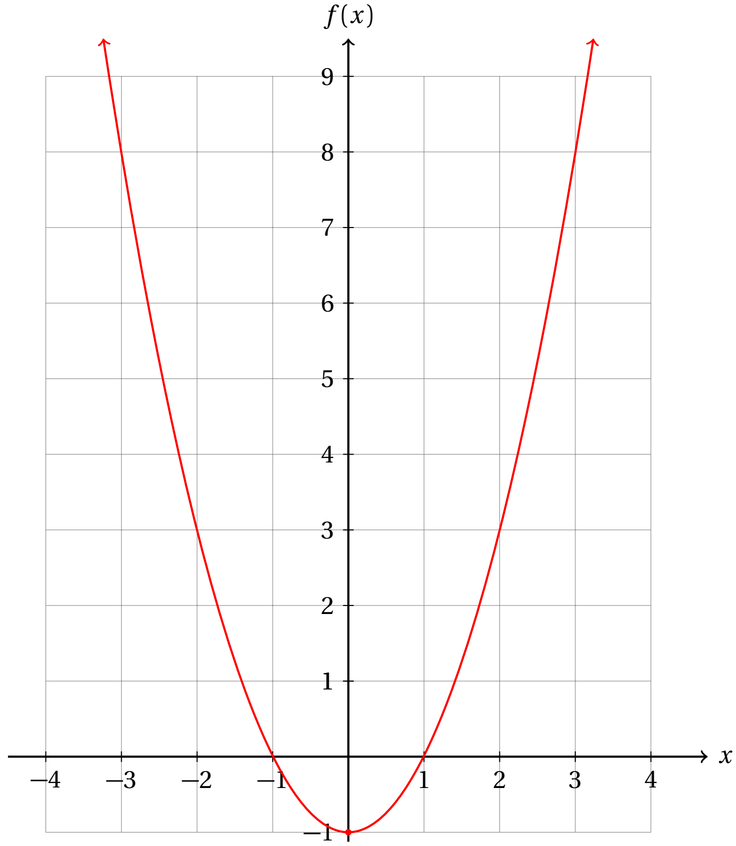
- Esta función es polinomial, y por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$.

- Esto se debe a que siempre podemos multiplicar un número por sí mismo y a ese resultado restarle 1.

- Cuando x se acerca a cero, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} x^2 = (0)^2 = 0$$

- Además, $f(0) = 0^2 = 0$, por lo que esta función es contínua en $x = 0$.



Ejemplo 2

Verifica si la función:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

está definida para $x = 1$.

- Primero vamos a calcular el límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

- Para eso, empezamos factorizando el numerador de la función:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} (x+1) = 1+1 = 2 \end{aligned}$$

- Entonces, el límite existe.
- Ahora debemos verificar que la función está definida cuando $x = 1$.
- Pero cuando $x = 1$ el denominador se hace cero.
- Y entonces, no podemos realizar la división:

$$y(1) = \frac{(1)^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

- Entonces, la función no está definida para $x=1$.
- Y concluimos que la función no es contínua en ese punto.
- Se te queda como ejercicio graficar esta función.

Algunas veces las funciones definidas por intervalos.

En estos casos debemos verificar que la función esté bien definida. Porque, por ejemplo, puede ocurrir que la «*función*» tome dos valores para un solo valor de x debido a que se ledefinió incorrectamente.

Evidentemente, eso no debe ocurrir, porque una función devuelve a lo más un único valor de y para cada x que nosotros le demos.

Si devuelve más de un valor, entonces no se trata de una función.

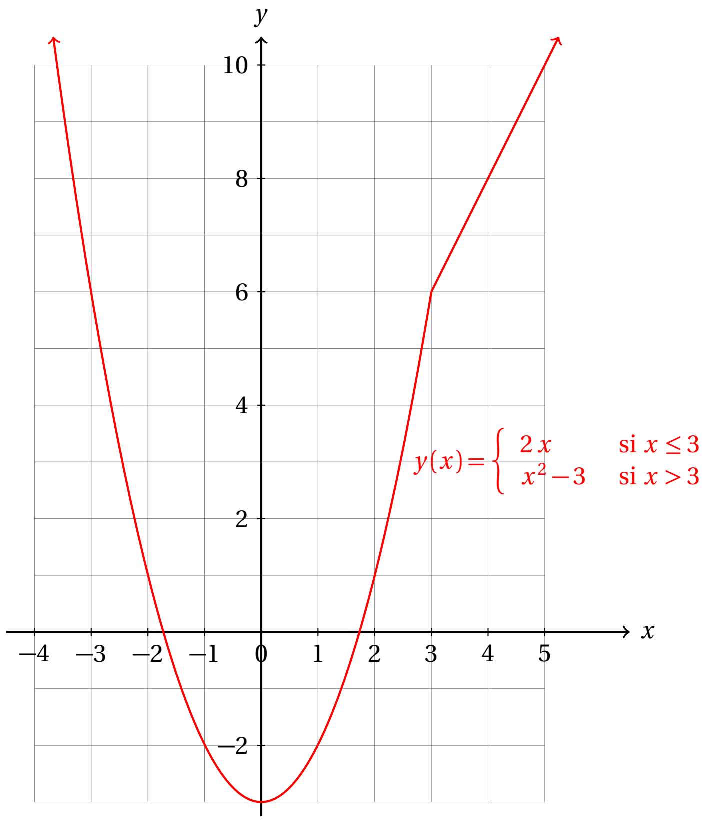
Verifica si la función:

$$y(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 3 \\ x^2-3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

en el punto $x=3$.

Ejemplo 3

- Primero calcularemos el límite:
$$\lim_{x\to 3} y(x)$$
- Observa que la función está definida de una manera por la izquierda y de otra por la derecha de ese punto.
- Así que tendremos que calcular los dos límites laterales y verificar que coinciden.
- Empezamos calculando el límite por la izquierda:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^-} y(x) &= \lim_{x\to 3^-} 2x \\ &= 2(3)=6 \end{aligned}$$
- Ahora calcularemos el límite por la derecha:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^+} y(x) &= \lim_{x\to 3^+} x^2-3 \\ &= (3)^2-3=6 \end{aligned}$$
- Como los dos límites laterales son iguales, el límite $\lim_{x\to 3} y(x)$ existe.
- Ahora verificamos que la función está definida para $x=3$.
- Observa que en la definición, la expresión $x \leq 3$ nos indica que debemos usar la primera rama de la función:
$$y(3)=2x=2(3)=6$$
- Además, podemos ver que $y(3)=\lim_{x\to 3} y(x)$, por lo que la función sí es contínua en $x=3$.
- La gráfica de esta función es la siguiente:



- Observa que la gráfica de la función es contínua porque en $x = 3$ el valor de las dos ramas coincide.

- Esto lo notamos del cálculo de los dos límites laterales.

En general, puedes ver gráficamente si una función es discontínua si al graficarla ésta presenta un «*brinco*», es decir, si no es posible dibujarla de un solo trazo.

Las funciones escalonadas son discontínuas. Igualmente, las funciones racionales con denominador que se hace cero para al menos un valor de x.

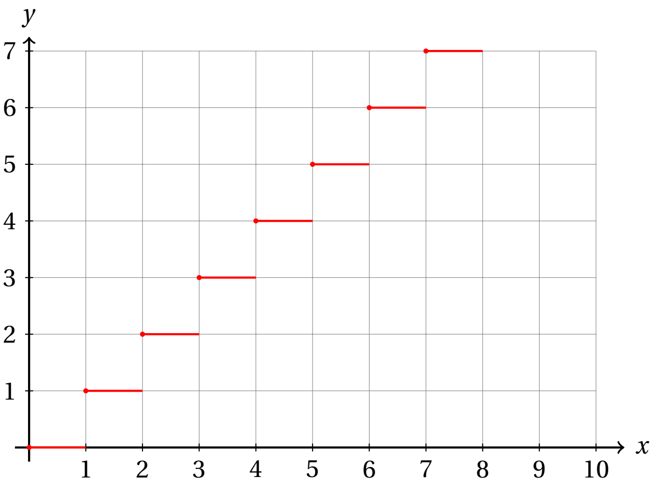
Ejemplo 4

Verifica si la función piso, que se denota por: $y = \lfloor x \rfloor$, y que se define como:

$$\lfloor x \rfloor = \text{mayor entero } \leq x$$

es contínua en el intervalo $(0, \infty)$.

- Observa que la función tiene un mismo valor y para muchos valores de x:



- La gráfica nos indica que la función es discontínua.

- Esto se concluye también al calcular cualquiera de los límites:

$$\lim_{x\to k} \lfloor x \rfloor \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

porque para calcular ese límite, se requiere que los límites por la izquierda y por la derecha coincidan.

- Pero cuando k es un entero, el límite por la derecha es k, mientras que el límite por la izquierda es $k-1$, porque la función $\lfloor x \rfloor$ devuelve la parte entera de x.

- Luego, el límite $\lim_{x\to k} \lfloor x \rfloor$ con k entero, no existe.

- Y por tanto, la función es discontínua para toda $x = k$ con k entera.

Verifica si la función:

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

es contínua en $x = 0$.

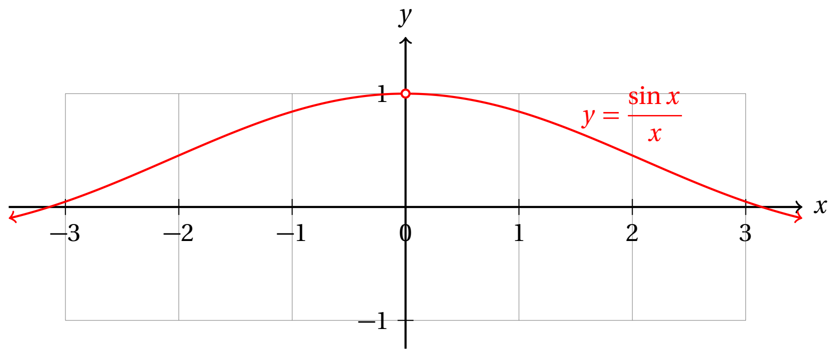
Ejemplo 5

- Ya calculamos el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ en la página 787.

- Si sustituimos $x = 0$ en la función, obtenemos cero sobre cero.

- Así que la función no es contínua, porque no cumple con la primera condición de coninuidad.

- La gráfica de la función es la siguiente:



- Observa que la función no está definida para $x = 0$ debido a la división entre cero.
- Sin embargo, si definimos $f(0) = 1$, la función es contínua.

Reto 1

Considera la función

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es un número racional,} \\ 1 & \text{si } x \text{ es un número irracional} \end{cases}$$

¿Es esta función es contínua o discontínua? Argumenta tu respuesta.

La continuidad es importante en matemáticas porque en una función contínua, un pequeño incremento en x ocasiona un pequeño incremento en y.

No así con las funciones discontínuas.

En otras palabras, para una función contínua, cuando Δx tiende a cero, $y(x+\Delta x)$ tiende a $y(x)$, independientemente de que nos acerquemos a x por la derecha o por la izquierda.

Ejemplo 6

Si las funciones f y g son contínuas y satisfacen:

$$\lim_{x\to 1}\left[3f(x)+g(x)\right] = 12$$

Sabiendo que $f(1) = 2$, calcula: $g(1)$.

- Por las propiedades de los límites, podemos reescribir el límite dado como sigue:

$$\lim_{x\to 1}\left[3f(x)+g(x)\right] = 3\lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x) = 12$$

- Pero sabemos además que las dos funciones son contínuas.
- Así que se cumple también:

$$3\cdot f(1) + g(1) = 12$$

porque de acuerdo a la definición de continuidad,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

y también:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1)$$

- Como $f(1)=2$, tenemos:

$$3\cdot(2)+g(1)=12 \qquad \Rightarrow \qquad g(1)=6$$

- Con lo que terminamos.

Verifica la continuidad de las siguientes funciones para el valor de x dado. **Ejercicios 19.2.1**

1) $y=x^2-x+1$ cuando $x=0$. Continua

2) $y=\dfrac{1}{x}$ cuando $x=0$. Discontínua

3) $y=\dfrac{x}{1+x}$ cuando $x=-1$. Discontínua

4) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}$ cuando $x=1$. Contínua

5) $y=\dfrac{e^{-x}}{x}$ cuando $x=0$. Discontínua

6) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ cuando $x=1$. Contínua

7) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ cuando $x=1$. Discontínua

8) $y=\dfrac{x}{e^x-1}$ cuando $x=0$. Discontínua

9) $y=\dfrac{e^x}{x-e^{-x}}$ cuando $x=0$. Contínua

10) $y=\dfrac{\ln(x)}{e^x-e}$ cuando $x=0$. Discontínua

11) $y=\begin{cases} \dfrac{5x}{2} & \text{si } x\leq 2 \\ x^2+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$ cuando $x=1$. Contínua

12) $y=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x\leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ cuando $x=1$. Contínua

13) $y=\begin{cases} -2x-1 & \text{si } x\leq 0 \\ 2x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ cuando $x=0$. Discontínua

14) $y=\begin{cases} x^3 & \text{si } x\leq 2 \\ 2x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$ cuando $x=2$. Contínua

15) $y=\begin{cases} 5x & \text{si } x\leq 2 \\ x^2+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$ cuando $x=1$. Discontínua

16) $y=\begin{cases} |x|+1 & \text{si } x\leq 0 \\ x^2-x & \text{si } x>0 \end{cases}$ cuando $x=1$. Discontínua

17) $y = \begin{cases} 7x - 14 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ cuando $x = 1$. Contínua

18) $y = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cuando $x = 0$. Disontínua

19) $y = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ \cos(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ cuando $x = 0$. Contínua

20) $y = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \tan(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cuando $x = 0$. Contínua

21) $y = \begin{cases} \cos(2x) & \text{si } x \leq 0 \\ \sin(5x) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cuando $x = 0$. Contínua

22) $y = \begin{cases} \cos(2x) & \text{si } x < 0 \\ \sin(5x) + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ cuando $x = 0$. Contínua

23) $y = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 1 \\ e^{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ cuando $x = 1$. Discontínua

24) $y = \begin{cases} e^{x-1} - 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ cuando $x = 1$. Contínua

25) $y = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x < 0 \\ e^{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ cuando $x = 0$. Discontínua

19.2.2 Teorema de valor intermedio y valores extremos

Cuando una función es contínua en un intervalo, digamos $[a, b]$, entonces, dado que la función no se corta en ese intervalo, los valores de y que va devolviendo esa función en ese intervalo están entre $f(a)$ y $f(b)$, al menos.

Es posible que suba más allá de $f(a)$ ó $f(b)$, aunque no siempre ocurrirá, pero siempre tomará todos los valores entre esos dos límites.

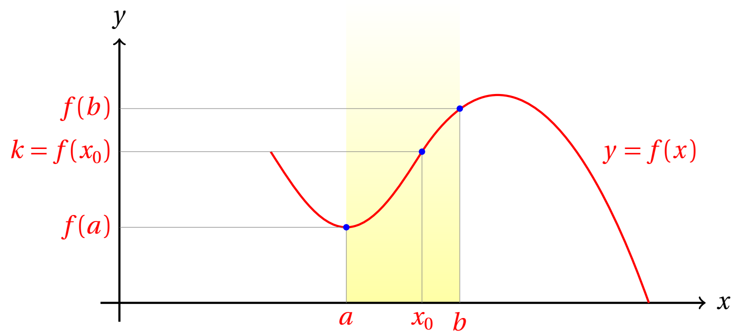
Eso es de lo que habla el teorema del valor intermedio.

Teorema 1

Teorema del valor intermedio
Sea $y = f(x)$ una función contínua en el intervalo $[a, b]$ (cerrado) y sea k un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe un número x_0 en el intervalo $[a, b]$ (es decir, $a \leq x_0 \leq b$) que satisface: $f(x_0) = k$.

En otras palabras, una función contínua toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ cuando los valores de x cambian desde a hasta b.

La siguiente gráfica muestra esto de una manera más clara:



Cuando el valor k va subiendo, los valores de x_0 van moviéndose hacia la derecha (para la gráfica de la función mostrada) y cuando k va bajando sobre el eje y, los valores de x_0 van moviéndose hacia la izquierda.

Geométricamente este teorema nos dice que la línea horizontal $y = k$ corta a la gráfica de la función $y = f(x)$ en al menos un punto cuando es contínua en el intervalo $[a, b]$ y se cumple que $k = f(x_0)$ y $a \leq x_0 \leq b$.

Es posible que corte a la gráfica de la función en varios puntos. Por ejemplo, si dibujamos el punto b después del máximo que se dibujó, es posible para algunos puntos de la gráfica que la recta horizontal corte en dos de sus puntos.

Ejemplo 1

Demuestra que la función:

$$y = x^3 - x^2 + x + 1$$

tiene una raíz en el intervalo $[-1, 1]$.

- Para eso vamos a aplicar el teorema del valor intermedio.
- Como la función es polinomial es contínua en todo el conjunto de los números reales.
- Si $N = f(x_0) = 0$ para algún x_0 que está en el intervalo $[-1, 1]$, hacemos $a = -1$, y $b = 1$, y evaluamos la función en esos puntos:

$$\begin{array}{rcl} y(-1) & = & (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) + 1 = -2 < 0 \\ y(1) & = & (1)^3 - (1)^2 + (1) + 1 = 2 > 0 \end{array}$$

- Por lo que satisface con la condición de que $f(a) \leq k \leq f(b)$.
- Entonces, por la continuidad de la función, debe existir un número x_0 en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(x_0) = 0$.

Observa que no hemos dicho cómo calcular el valor de x_0 que es raíz de la función dada.

Solamente sabemos que existe. Tampoco podemos asegurar que sea único.

En realidad este es el teorema que utilizamos cuando decimos que una función polinomial de grado impar tiene al menos una raíz real porque para valores positivos y grandes de x los valores que va devolviendo la función se hacen positivos para algún x suficientemente grande, y cuando x es negativo y muy grande, los valores que devuelve la función son negativos.

Entonces, dado que toda función polinomial es contínua en todo el conjunto de los números reales, si elegimos el intervalo $[p, q]$ con p tal que $f(p)$ sea un número negativo y q tal que $f(q)$ positivo, entonces, por el teorema de valor intermedio, existe un número x_0 en el intervalo $[p, q]$ tal que $p \leq x_0 \leq q$ y satisface: $f(x_0) = 0$.

Ejemplo 2

Demuestra que una raíz de la función:

$$y = \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$$

está en el intervalo $[-5, 0]$

- Vamos a evaluar la función en los extremos del intervalo:

$$\begin{aligned}
y(-5) &= \frac{(-5)^3 + (-5)^2 - (-5) + 1}{(-5)^2 + 1} = \frac{-94}{26} = -\frac{47}{13} < 0\\
y(0) &= \frac{(0)^3 + (0)^2 - (0) + 1}{(0)^2 + 1} = \frac{1}{1} = 1 > 0
\end{aligned}$$

- Como $f(-5)$ es negativo, $f(0)$ es positivo y la función es contínua, dado que el denominador nunca se hace cero, una de sus raíces está en el intervalo $[-5, 0]$.

Precisamente eso es lo que suponemos cuando graficamos esa función.

Dado que el denominador nunca se hace cero, vamos dando valores a x y calculando los que le corresponden a y. Ubicamos esos puntos en el plano cartesiano y después unimos esos puntos con una curva suave que pase por todos ellos.

Ejemplo 3

Demuestra que la ecuación:

$$\sin x = \cos x$$

tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$.

- Evaluamos la función $y = \sin x - \cos x$ en $x = 0$ y $x = 1$:

$$\begin{aligned}
y(0) &= \sin(0) - \cos(0) = 0 - 1 = -1 < 0\\
y(1) &= \sin(1) - \cos(1) = 0.84147 - 0.5403 = 0.30117 > 0
\end{aligned}$$

- Entonces, por el teorema de valor intermedio, haciendo $M = 0$, $a = 0$ y $b = 1$, existe un número x_0 en $[0, 1]$ tal que $f(x_0) = 0$.

Para cualquier función contínua en del intervalo $[a, b]$, $f(x_0)$ es un número finito. Es decir, existe un número M finito que es el máximo valor que toma la función para algún valor x_M.

Lo mismo se puede decir para el mínimo: existe un valor x_m tal que $f(x_m) = m$ siendo m el mínimo valor que toma la función en el intervalo $[a, b]$.

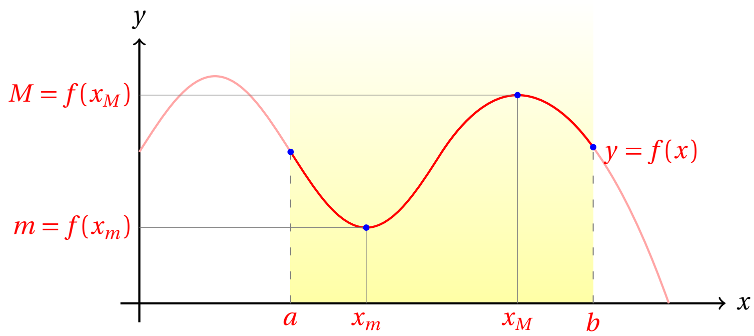
Esto es lo que se plasma en el siguiente teorema.

Teorema 2

Sea $y = f(x)$ una función contínua en el intervalo $[a, b]$. Entonces, la función tiene un valor M máximo y un valor m mínimo en ese intervalo.

Para el caso en que la función es constante, $M = m$, todos los valores que nos devuelve la función siempre es el mismo, digamos $y = k$.

Cuando la función no es constante, tenemos el caso más general.



La función que se muestra en la gráfica es contínua en el intervalo $[a, b]$. Para $x = x_m$ la función adquiere el mínimo en ese intervalo, y para $x = x_M$ adquiere el máximo.

Observa que fuera del intervalo la función puede tomar valores mayores a $f(x_M)$ así como puede tomar valores menores a $f(x_m)$.

Nosotros nos concentramos en los valores que pertenecen al intervalo, es decir, que satisfacen la desigualdad: $a \leq x \leq b$.

Ejemplo 4

Si $y = f(x)$ es una función contínua en el intervalo $[a, b]$ y solamente toman valores enteros, ¿qué podemos decir de esta función?

- Dado que esta función es contínua, no puede presentar saltos en su gráfica.
- Es decir, no puede parecerse a la función escalón.
- Si pudiera tomar dos valores distintos $f(x_1)$ y $f(x_2)$ estos valores deberían ser enteros.
- Por el teorema del valor intermedio debería existir un número x_0 tal que $x_1 \leq x_0 \leq x_2$, y:

$$f(x_1) \leq f(x_0) \leq f(x_2)$$

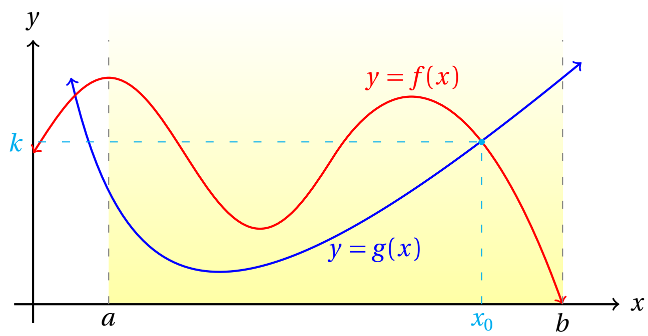
- Pero para que la función sea contínua, $f(x_0)$ debe tomar todos los valores entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$, incluyendo números no enteros.
- Entonces, la función debe tener un solo valor, de otra forma, presentaría saltos.
- En otras palabras, la función es constante en ese intervalo.
- En este caso, el máximo y el mínimo de la función son el mismo valor.
- Por ejemplo, si $y = k$ con k entero, entonces, $f(x_m) = f(x_M)$, debido a que $m = M = k$.

Ejemplo 5

Si las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son contínuas en el intervalo $[a, b]$, y además $f(a) > g(a)$ y también $f(b) < g(b)$, demuestra que existe un x_0 en ese intervalo que cumple: $f(x_0) = g(x_0)$.

- Utilizando el teorema del valor intermedio, hacemos $k = f(x_0)$, donde $f(a) \leq f(x_0) \leq f(b)$.
- Este valor x_0 existe en el intervalo $[a, b]$ porque la función es contínua dentro del intervalo.
- Como la función $y = g(x)$ también es contínua, existe al menos un valor x_1 en el intervalo para el cual $f(x_1) = k$.

- Como las funciones son contínuas, no presentan saltos en sus valores.
- Entonces, en un punto deben cortarse si se satisfacen $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$.
- Es decir, un punto (x_0, k) pertenece a ambas gráficas.
- Por eso, satisfacen $f(x_0) = g(x_0)$.
- La gráfica muestra exactamente eso:



Capítulo 20

Razones de cambio y la derivada

Por aprender...

Por qué es importante...

La derivada es el concepto que nos ayudará a resolver muchos problemas prácticos relacionados con razones de cambio promedio e instantánea.

20.1 La derivada

En esta sección empezamos con el estudio del concepto más importante de este curso.

La derivada, la cual vamos a definir más adelante, es una herramienta poderosísima que ayuda a ingenieros, científicos, biólogos, sociologos, etc., a resolver problemas diversos en los que se involucran razones de cambio.

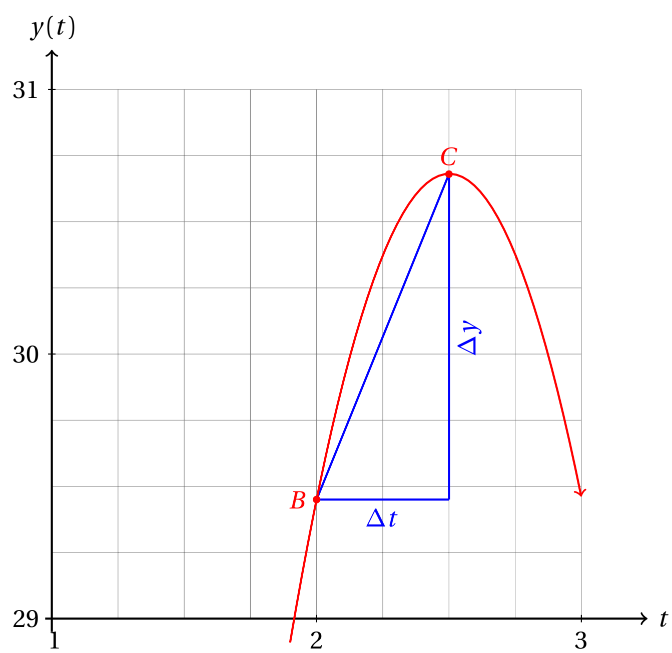
20.1.1 Razón de cambio promedio e instantánea

Al inicio de este curso estudiamos de una manera intuitiva la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, es decir, la velocidad promedio de una piedra que fue lanzada y de la cual conocemos la ecuación de su movimiento.

Entonces, utilizamos la definición básica de velocidad promedio como el cociente de la distancia recorrida dividida entre el tiempo que le tomó al objeto recorrerla[1]:

$$\bar{v} = \frac{y(t_f) - y(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{d}{t}$$

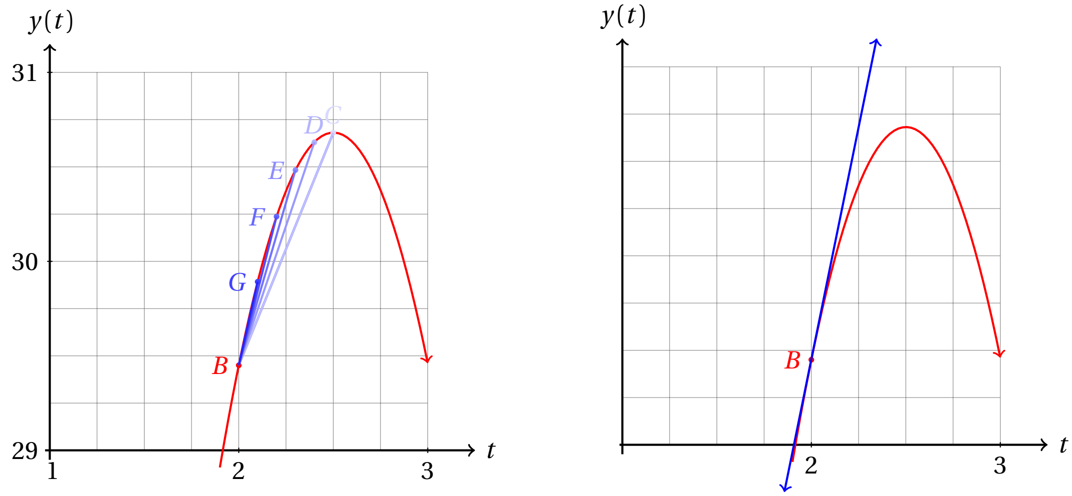
En la gráfica, la velocidad promedio puede calcularse a partir de los puntos B y C, y es igual a la pendiente de la recta que pasa por esos dos puntos, como se puede ver de la fórmula anterior y de la gráfica.



Entonces, cuando el punto C se acerca mucho al punto B, Δt tiende a cero.

La gráfica de la recta secante se va transformando, cambiando su pendiente, como se muestra en la siguiente gráfica:

[1]Ver el ejemplo de la página 773.



Conforme C se acerca al punto B, la pendiente de la recta tangente se aproxima cada vez más a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto B.

La tangente a la curva en un punto corresponde a la velocidad instantánea de la piedra en ese valor de t: en este caso, la pendiente de la recta tangente a la curva es $m = 4.915$, que corresponde a la velocidad de la piedra en ese preciso instante.

Observa que en realidad estamos calculando:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

que viene siendo la velocidad promedio de la piedra cuando el intervalo de tiempo considerado Δt se hace muy pequeño, es decir, la velocidad de la piedra para un instante de tiempo. En otras palabras, la velocidad instantánea.

Si consideramos una inversión donde el interés compuesto se aplica anualmente, podemos calcular la tasa de interés mensual, dividiendo la tasa mensual entre 12, igualmente podemos calcularla diaria, dividiendo entre 365, y así sucesivamente hasta calcular la tasa de interés instantánea, haciendo que el número de periodos durante el año tienda a infinito.

En este caso, la tasa de crecimiento será el número $e \approx 2.71828182845904523536$.

Ejemplo 1

Calcula el monto al final de un año al invertir un peso con una tasa anual del 100% considerando la aplicación del interés en cada año, cada mes, cada día, cada hora, cada minuto, cada segundo y cada centésima de segundo.

- Cuando el interés se aplica solamente al final del año obtenemos:

$$M = (1+1)^1 = 2$$

- Si el interés se aplica mensualmente obtenemos:

$$M = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.6130352902246781603$$

- Si el interés se aplica diariamente obtenemos:

$$M = \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.7145674820218743032$$

- Si el interés se aplica cada hora obtenemos:

$$M = \left(1 + \frac{1}{(365)(24)}\right)^{(365)(24)} = 2.7181266916204521189$$

- Si el interés se aplica cada minuto obtenemos:

$$M = \left(1 + \frac{1}{(365)(24)(60)}\right)^{(365)(24)(60)} = 2.7182792425790150990$$

- Si el interés se aplica cada segundo obtenemos:

$$M = \left(1 + \frac{1}{(365)(24)(60)(60)}\right)^{(365)(24)(60)(60)} = 2.7182817784689974$$

- Y si el interés se aplica cada centésima de segundo obtenemos:

$$M = \left(1 + \frac{1}{(365)(24)(60)(60)(100)}\right)^{(365)(24)(60)(60)(100)} = 2.7182818479376385$$

- Si seguimos disminuyendo el tamaño del tiempo entre los cuales se aplican los intereses hasta obtener la tasa de crecimiento instantánea del dinero.
- Esa tasa es un número constante que se denomina con la letra e y es un número irracional, aproximadamente igual a 2.71828182845904523536.
- En otras palabras, la tasa de crecimiento instantánea de un monto de \$1.00 peso con una tasa promedio anual de 100% es de 271.8282% aproximadamente.

La función exponencial es muy impotante en matemáticas, ingeniería, administración, economía, ciencias sociales, etc., porque muchas cantidades crecen de acuerdo a la constante e.

Observa de este último ejemplo que al igual que en el caso de la piedra, cuando consideramos intervalos más pequeños, la tasa instantánea de cambio crece, en este caso del 100% al 271.83% aproximadamente.

En un pueblo el primer día se recolectó 1 kg de basura. El segundo día se recolectó 2 kg. El tercer día se recolectaron 3 kg de basura, y así sucesivamente. El k-ésimo día se recolectaron k kilogramos de basura. ¿Cuál es la razón de crecimiento promedio e instantánea de la cantidad de basura que han acumulado?	**Ejemplo 2**

- Nos están pidiendo la razón de crecimiento de la cantidad de basura que se ha acumulado desde el primer día.
- En otras palabras, nos piden que sumemos:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + k$$

- Esta suma se calcula muy fácilmente si consideramos que la suma tiene la propiedad conmutativa:

$$\begin{array}{rcccccccc}
S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & k \\
S = & k & + & k-1 & + & k-2 & + \cdots + & 1 \\
\hline
2\,s = & (k+1) & + & (k+1) & + & (k+1) & + \cdots + & (k+1)
\end{array}$$

- En la suma se repite el sumando $k+1$ un total de k veces, por eso:

$$2S = k\cdot(k+1)$$

- Y la cantidad de kilogramos de basura acumulada en ese pueblo es de:

$$S = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$$

- Ahora podemos estudiar su razón de cambio.
- Entonces, la razón de cambio es:

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{S} &= \text{kg acumulados al día } k - \text{kg acumulados al día } k-1\\
\Delta\bar{S} &= \frac{k\cdot(k+1)}{2} - \frac{(k-1)\cdot k}{2}\\
&= \frac{k\cdot[k+1-(k-1)]}{2}\\
&= \frac{k\cdot[2]}{2}\\
&= k
\end{aligned}$$

- Esto tiene sentido, pues en el día k-ésimo agregamos k kilogramos de basura al acumulado.
- Ahora calcularemos la razón de crecimiento instantánea.
- Consideramos un incremento Δt de tiempo,

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta S}{\Delta t} &= \frac{S(k+\Delta t) - S(k)}{\Delta t}\\
&= \frac{(k+\Delta t)\cdot(k+\Delta t+1)}{2\,\Delta t} - \frac{k\cdot(k+1)}{2}\\
&= \frac{k^2 + k\,\Delta t + k + k\,\Delta t + (\Delta t)^2 + \Delta t - k^2 - k}{2\,\Delta t}\\
&= \frac{2\,k\,\Delta t + (\Delta t)^2 + \Delta t}{2\,\Delta t}\\
&= k + \Delta t
\end{aligned}$$

- Cuando Δt tiende a cero, obtenemos la razón de cambia instantánea, que en este caso es: k.

Ejemplo 3

Calcula la razón de cambio instantánea de la siguiente función:

$$y = x^3$$

cuando $x = 2$.

- En otras palabras, deseamos calcular la velocidad instantánea de un objeto que se mueve con posición x^3 en el tiempo x.
- Vamos a calcular el resultado en pasos.
- **Primer paso:** Damos un incremento a x para ver cómo crece y:

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^3 = x^3 + 3\,x^2\Delta x + 3\,x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

- **Segundo paso:** Para calcular Δy le restamos y al valor que acabamos de obtener:

$$\begin{aligned} y+\Delta y-y &= x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3 \\ \Delta y &= 3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3 \end{aligned}$$

- **Tercer paso:** Ahora vamos a dividir entre Δx para obtener la razón de cambio promedio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2$$

- **Cuarto Paso:** finalmente, calculamos el límite de ese cociente cuando Δx tiende a cero, para obtener la razón de cambio instantánea:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2\right) \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2\right)+3\lim_{\Delta x\to 0}\left(x(\Delta x)\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2\right) \\ &= 3x^2+0+0^2 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

- Entonces, la razón de crecimiento promedio es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2$$

- Y la razón decrecimiento instantánea es:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=3x^2$$

- Cuando $x=2$, obtenemos:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Bigg|_{x=2}=3\cdot(2)^2=12$$

Ejemplo 4

Un tren se mueve con una velocidad v (medida en metros por segundo) que es igual a la raíz cuadrada del tiempo en minutos que lleva en movimiento, es decir,

$$v=\sqrt{t}$$

Calcula la velocidad instantánea del tren a los 4 minutos de iniciar su viaje.

- Sabemos que la velocidad es igual a la raíz cuadrada del tiempo.
- Así que vamos a aplicar los cuatro pasos para calcular la velocidad instantánea a los 4 minutos.
- **Paso 1:** Damos un incremento a t para calcular $v+\Delta v$:

$$v+\Delta v=\sqrt{t+\Delta t}$$

- **Paso 2:** Restamos la función original para obtener Δv:

$$\begin{aligned} v+\Delta v-v &= \sqrt{t+\Delta t}-\sqrt{t} \\ \Delta v &= \sqrt{t+\Delta t}-\sqrt{t} \end{aligned}$$

- **Paso 3:** Dividimos entre Δt para calcular la velocidad promedio:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\sqrt{t+\Delta t} - \sqrt{t}}{\Delta t}$$

- Si calculamos el límite de este cociente obtendremos cero sobre cero.
- Así que vamos a racionalizar la fracción.
- Para eso, multiplicaremos tanto en el numerador como en el denominador por $\sqrt{t+\Delta t} + \sqrt{t}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta v}{\Delta t} &= \frac{\sqrt{t+\Delta t} - \sqrt{t}}{\Delta t} \cdot \frac{\sqrt{t+\Delta t} + \sqrt{t}}{\sqrt{t+\Delta t} + \sqrt{t}} \\
&= \frac{t+\Delta t - t}{(\Delta t)\left(\sqrt{t+\Delta t} + \sqrt{t}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t+\Delta t} + \sqrt{t}}
\end{aligned}$$

- Ahora sí podemos continuar con el cuarto paso:
- **Paso 4:** Calculamos el límite cuando Δt tiende a cero para obtener la velocidad instantánea:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) &= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{t+\Delta t} + \sqrt{t}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{t+0} + \sqrt{t}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

- Después de 4 minutos de haber iniciado su viaje su velocidad instantánea es:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)\bigg|_{t=4} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\bigg|_{t=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2\cdot(2)} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ m/s.}$$

- Entonces, el tren lleva una velocidad de 25 centímetros por segundo 4 minutos después de haber arrancado.

Ejemplo 5

Un globo se está inflando con una bomba que le inyecta aire. Considerando que el globo tiene una forma esférica, ¿cómo crece el volumen del globo cuando su radio es de 3 cm?

- Ya sabemos que el volumen de una esfera puede calcularse con la fórmula:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Necesitamos calcular cómo crece el volumen con respecto al radio.
- Para eso vamos a seguir la regla de los cuatro pasos.
- **Paso 1:** Damos un incremento al radio para ver cómo crece el volumen:

$$\begin{aligned}
V + \Delta V &= \frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi\left[r^3 + 3\,r^2(\Delta r) + 3\,r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3\right]
\end{aligned}$$

- **Paso 2:** Restamos el volumen inicial del globo para obtener el incremento en el volumen del mismo:

$$\begin{aligned} V+\Delta V-V &= \frac{4}{3}\pi\left[r^3+3\,r^2(\Delta r)+3\,r(\Delta r)^2+(\Delta r)^3\right]-\frac{4}{3}\pi r^3 \\ \Delta V &= \frac{4}{3}\pi\left[3\,r^2(\Delta r)+3\,r(\Delta r)^2+(\Delta r)^3\right] \end{aligned}$$

- **Paso 3:** Dividimos entre Δr para conocer la razón de crecimiento del volumen promedio con respecto al radio:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta r} &= \frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{3\,r^2(\Delta r)+3\,r(\Delta r)^2+(\Delta r)^3}{\Delta r}\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi\cdot\left[3\,r^2+3\,r(\Delta r)+(\Delta r)^2\right] \end{aligned}$$

- **Paso 4:** Ahora calculamos el límite cuando Δr tiende a cero para conocer la razón de cambio instantánea del volumen:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r\to 0}\left(\frac{\Delta V}{\Delta r}\right) &= \lim_{\Delta r\to 0}\left(\frac{4}{3}\pi\left[3\,r^2+3\,r(\Delta r)+(\Delta r)^2\right]\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi\lim_{\Delta r\to 0}\left(3\,r^2+3\,r(\Delta r)+(\Delta r)^2\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(3\,r^2+3\,r(0)+(0)^2\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi(3\,r^2) \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

- Y cuando el radio del globo es de 3 cm, tenemos que la razón de crecimiento instantánea del volumen es de:

$$\lim_{\Delta r\to 0}\left(\frac{\Delta V}{\Delta r}\right)\bigg|_{r=3} = \left(4\pi r^2\right)\big|_{r=3} = 4\pi(3)^2 = 36\pi$$

- En palabras, el volumen del globo crece 36 cm^3 por cada centímetro que crece el radio del globo cuando éste es de 3 cm.

Ejemplo 6

Un pueblo con 50 personas de población tiene un almacén de agua potable de 120 000 litros. Se espera que no llueva sino hasta dentro de 4 meses. Si cada persona utiliza 80 litros de agua potable diariamente para sus necesidades básicas (lavar ropa, trastos, bañarse, etc.) pero el sistema de tuberías que usan se daña con el tiempo y eso ocasiona fugas de agua potable, además de la que se evapora al ambiente de manera natural. Ellos han calculado que el volumen de agua que se descarga del almacén diariamente se puede calcular con la fórmula:

$$V = 4\,000\,t + 0.05\,t^2$$

donde V es el número de litros de agua y t es el tiempo medido en días. ¿A qué rapidez disminuye el volumen de agua a los 25 días?

- Debemos calcular la razón de decrecimiento instantánea para $t = 25$.
- Aplicaremos los cuatro pasos.

- **Paso 1:** Calculamos $V + \Delta V$ dando un incremento a t:

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= 4\,000(t + \Delta t) + 0.05\,(t + \Delta t)^2 \\ &= 4\,000\,t + 4\,000\,(\Delta t) + 0.05\,t^2 + 0.1\,t(\Delta t) + 0.05\,(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

- **Paso 2:** Restamos V para obtener solamente el decremento en el volumen:

$$\begin{aligned} V + \Delta V - V &= 4\,000\,t + 4\,000\,(\Delta t) + 0.05\,t^2 + 0.1\,t(\Delta t) + 0.05\,(\Delta t)^2 \\ & \quad -\left[4\,000\,t + 0.05\,t^2\right] \\ \Delta V &= 4\,000\,(\Delta t) + 0.1\,t(\Delta t) + 0.05\,(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

- **Paso 3:** Ahora vamos a dividir entre Δt para conocer la razón de decrecimiento promedio:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta t} &= \frac{4\,000\,(\Delta t) + 0.1\,t(\Delta t) + 0.05\,(\Delta t)^2}{\Delta t} \\ &= 4\,000 + 0.1\,t + 0.05\,(\Delta t) \end{aligned}$$

- **Paso 4:** Finalmente calculamos el límite cuando Δt tiende a cero para obtener la razón de decrecimiento instantánea:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right) &= \lim_{\Delta t \to 0} (4\,000 + 0.1\,t + 0.05\,(\Delta t)) \\ &= 4\,000 + 0.1\,t + 0.05\,(0) \\ &= 4\,000 + 0.1\,t \end{aligned}$$

- Entonces, cuando $t = 25$, obtenemos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)\bigg|_{t=25} = (4\,000 + 0.1\,t)|_{t=25} = 4\,000 + 0.1\,(25) = 4\,000 + 2.5 = 4\,002.5$$

- En palabras, el día 25 utilizan 4 002.5 litros de agua por día.

En esta sección hemos utilizado mucho la regla de los cuatro pasos para calcular la razón de variación instantánea de distintas cantidades, que es una buena idea definirla.

Definición 1

REGLA DE LOS CUATRO PASOS

La regla de los cuatro pasos nos ayuda a calcular la razón de variación instantánea de y con respecto a x para la función $y = f(x)$ es la siguiente:

- ✓ ***Paso 1:*** *Dar un incremento a x y calcular $y + \Delta y$.*
- ✓ ***Paso 2:*** *Restar y a $y + \Delta y$ para calcular el incremento Δy.*
- ✓ ***Paso 3:*** *Dividir Δy entre Δx para obtener la razón de variación promedio.*
- ✓ ***Paso 4:*** *Calcular el límite del cociente obtenido en el paso anterior para obtener la razón de variación instantánea de y con respecto a x.*

Es decir:

- ✓ **Paso 1:** $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.
- ✓ **Paso 2:** $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

✓ **Paso 3:** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

✓ **Paso 4:** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$.

Ejercicios 20.1.1

Calcula las siguientes razones de cambio instantáneas en el punto dado para cada una de las funciones.

1) $y=2x+1$, $x=1,2,3,4,5.$ — $y'=2 \quad \forall x$

2) $y=5x-\sqrt{2}$, $x=0,1,2,3,4$ — $y'=5 \quad \forall x$

3) $y=-x+3$, $x=1,2,5,7$ — $y'=-1 \quad \forall x$

4) $y=\dfrac{x}{2}+1$, $x=5,10,15$ — $y'=0.5 \quad \forall x$

5) $y=-2x+9$, $x=0,-1,1$ — $y'=-2 \quad \forall x$

6) $y=x^2$, $x=2,4,6,8$ — $y'=4,8,12,16$

7) $y=3x^2$, $x=1,2,3,5$ — $y'=6,12,18,30$

8) $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$, $x=0,1,2,3,5$ — $y'=0,1,2,3,5$

9) $y=x^3$, $x=1,2,3,4,5$ — $y'=3,12,27,48,75$

10) $y=\dfrac{x^3}{3}$, $x=1,2,3,4,5$ — $y'=1,4,9,16,25$

11) $y=x+x^2$, $x=2,4,6$ — $y'=5,9,13$

12) $y=x^2+x^3$, $x=1,3,5$ — $y'=5,33,85$

13) $y=x+x^2+x^3$, $x=1,5,10$ — $y'=6,86,321$

14) $y=3x-x^2$, $x=1,5,10$ — $y'=1,-7,-17$

15) $y=100+2x-3x^2$, $x=1,5,10$ — $y'=-4,-28,-58$

16) $y=x^4$, $x=3,6,9$ — $y'=108,864,2916$

17) $y=15+x^4$, $x=3,6,9$ — $y'=108,864,2916$

18) $y=x^4-x^2$, $x=1,3,6$ — $y'=2,102,852$

19) $y=\dfrac{x^4-x^2}{2}$, $x=1,3,6$ — $y'=1,51,426$

20) $y=x+\sqrt{x}$, $x=4$ — $y'=1.25$

20.1.2 La derivada como razón de cambio instantánea

Observa que la razón de cambio instantánea es un limite:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\right)$$

Cuando calculamos la razón de cambio promedio, geométricamente estamos calculando el valor de la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por los puntos $P(t, y(y))$ y $Q(t+\Delta t, y(t+\Delta t))$.

Por otra parte, cuando calculamos la razón de cambio instantánea estamos calculando la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(t)$ en el punto $P(t_0, y(t_0))$.

Esa es precisamente la interpretación geométrica de la derivada.

Definición 1

Derivada

La derivada de una función $y = f(x)$ que se denota como y', o bien $\frac{dy}{dx}$ es la razón de cambio instantánea de y respecto a la variable independiente (x). Específicamente:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$$

cuando ese límite existe.

Ejemplo 1

Calcula la derivada de la función:

$$y=5x$$

- Aplicamos la regla de los cuatro pasos.
- **Paso 1:**
$$y+\Delta y=5(x+\Delta x)=5x+5(\Delta x)$$
- **Paso 2:**
$$\Delta y=5x+5(\Delta x)-5x=5(\Delta x)$$
- **Paso 3:**
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5(\Delta x)}{\Delta x}=5$$
- **Paso 4:**
$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}(5)=5$$
- Entonces, si $y = 5x$, su derivada $y' = 5$.

Ejemplo 2

Calcula la derivada de la función:

$$y=5x-12$$

- Evidentemente, vamos a calcular la derivada de y con respecto a x.

- Asi que aplicaremos la regla de los cuatro pasos.
- **Paso 1:**
$$y+\Delta y=5(x+\Delta x)-12$$
- **Paso 2:**
$$\begin{aligned}\Delta y &= 5x+5(\Delta x)-12-[5x-12]\\ &= 5(\Delta x)\end{aligned}$$
- **Paso 3:**
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5(\Delta x)}{\Delta x}=5$$
- **Paso 4:**
$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}(5)=5$$
- Entonces, si $y=5x-12$, su derivada es:
$$\frac{dy}{dx}=5$$

Si comparamos los últimos dos ejemplos, vemos que dos funciones distintas pueden tener la misma derivada.

En particular, su $f(x)=5x$, y $g(x)=5x-12$, la derivada de ambas funciones es la misma:

$$\frac{df}{dx}=\frac{dg}{dx}=5$$

Vamos a generalizar este resultado en el siguiente ejemplo.

Calcula la derivada de la función lineal:

$$y=mx+b$$

Ejemplo 3

- Observa que no solamente estamos considerando el término independiente como una literal, sino también la pendiente.
- Aplicamos la regla de los cuatro pasos.
- **Paso 1:**
$$y+\Delta y=m(x+\Delta x)+b=mx+m(\Delta x)+b$$
- **Paso 2:**
$$\begin{aligned}\Delta y &= mx+m(\Delta x)+b-[mx+b]\\ &= m(\Delta x)\end{aligned}$$
- **Paso 3:**
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{m(\Delta x)}{\Delta x}=m$$

- **Paso 4:**
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}(m) = m$$

- Entonces, para cualquier función lineal, $y = m\,x + b$, su derivada es siempre igual a la pendiente de la misma:
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = m$$

Para la función identidad: $y = x$, tenemos que su derivada es $y' = 1$, porque su pendiente es 1.

También podemos darnos cuenta que para una recta horizontal, $m = 0$, entonces, su derivada es cero. Es decir, si b es una constante, entonces,
$$\frac{db}{dx} = 0$$

En el siguiente ejemplo vamos a demostrar esto.

Ejemplo 4 Demuestra que la derivada de la función constante es cero.

- La función constante puede ser, por ejemplo, $y = b$, donde b es un número real.
- Aplicamos directamente la regla de los cuatro pasos.
- **Paso 1:**
$$y + \Delta y = b$$
porque la función siempre toma el mismo valor, independientemente del valor de x que le demos.
- **Paso 2:**
$$\Delta y = b - b = 0$$
- **Paso 3:**
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$
- **Paso 4:**
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}(0) = 0$$
- Con lo que queda establecido el teorema.

Ejemplo 5 Calcula la derivada de la siguiente función:
$$y = x + x^2$$

- Aplicamos la regla de los cuatro pasos.
- **Paso 1:**
$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (x + \Delta x) + (x + \Delta x)^2 \\ &= x + \Delta x + x^2 + 2\,x(\Delta x) + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

- **Paso 2:**

$$\begin{aligned}\Delta y &= x+\Delta x+x^2+2\,x(\Delta x)+(\Delta x)^2-\left[x+x^2\right]\\ &= \Delta x+2\,x(\Delta x)+(\Delta x)^2\end{aligned}$$

- **Paso 3:**

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x+2\,x(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}\\ &= 1+2\,x+\Delta x\end{aligned}$$

- **Paso 4:**

$$\frac{d\,y}{d\,x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}(1+2\,x+\Delta x)=1+2\,x$$

- Entonces, la derivada de la función $y=x+x^2$ es:

$$\frac{d\,y}{d\,x}=1+2\,x$$

Calcula la derivada de la siguiente función polinomial:

$$y=x+x^2+x^3$$

Ejemplo 6

- Observa que esta función tiene un término cúbico y los otros dos corresponden a la función que derivamos en el ejemplo anterior.
- La función $y=x^3$ se derivó en la sección anterior (página 830).
- Esto nos permitirá comparar los resultados.
- Vamos a aplicar la regla de los cuatro pasos.
- **Paso 1:**

$$\begin{aligned}y+\Delta y &= (x+\Delta x)+(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)^3\\ &= (x+\Delta x)+\left[x^2+2\,x\,(\Delta x)+(\Delta x)^2\right]+\left[x^3+3\,x^2(\Delta x)+3\,x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\right]\end{aligned}$$

- **Paso 2:**

$$\begin{aligned}\Delta y &= (x+\Delta x)+\left[x^2+2\,x\,(\Delta x)+(\Delta x)^2\right]+\left[x^3+3\,x^2(\Delta x)+3\,x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\right]\\ &\quad -\left(x+x^2+x^3\right)\\ \Delta y &= \Delta x+2\,x\,(\Delta x)+(\Delta x)^2+3\,x^2(\Delta x)+3\,x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\end{aligned}$$

- **Paso 3:**

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x+2\,x\,(\Delta x)+(\Delta x)^2+3\,x^2(\Delta x)+3\,x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}\\ &= 1+2\,x+(\Delta x)+3\,x^2+3\,x(\Delta x)+(\Delta x)^2\end{aligned}$$

- **Paso 4:**

$$\frac{d\,y}{d\,x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+2\,x+(\Delta x)+3\,x^2+3\,x(\Delta x)+(\Delta x)^2\right)=1+2\,x+3\,x^2$$

- Ahora observa que las derivadas de las funciones $f(x) = x + x^2$, y $g(x) = x^3$ son:

$$\frac{df}{dx} = 1 + 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{dg}{dx} = 3x^2$$

- También observa que $y = f(x) + g(x) = x + x^2 + x^3$, y su derivada es la suma de las dos derivadas anteriores:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} = 1 + 2x + 3x^2$$

- Esto no debe sorprenderte, pues la derivada al ser un límite, debe heredar algunas de las propiedades de los límites.

Es verdad que si $y = f(x)$, y $y = g(x)$ son dos funciones, entonces,

$$\frac{d}{dx}\big(f(x) + g(x)\big) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

es decir, la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas.

Sin embargo, no es verdad que, en general, la derivada del producto sea igual al producto de las derivadas.

Puedes encontrar evidencia de este hecho observando que si $y = x^2$, podemos hacer $f(x) = x$, y $g(x) = x$. Ya sabemos que $f'(x) = g'(x) = 1$, por tanto, $f'(x) \cdot g'(x) = 1$. Pero por otra parte, tenemos que $y = f(x) \cdot g(x) = x^2$, y también vimos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x \neq 1$$

Es decir, la derivada del producto de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ no es igual al producto de sus derivadas.

Ejemplo 7 Deduce una fórmula para calcular la derivada del producto de dos funciones.

- Definimos: $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, y $y = f(x) \cdot g(x)$.
- Vamos a aplicarle la regla de los cuatro pasos.
- **Paso 1:**

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x)$$

- Al hacer un incremento en x cada función tiene un incremento, Δf para la primera y Δg para la segunda.
  Observa que $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, y que $\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x)$.
- Esto nos permite escribir:

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (f(x) + \Delta f(x)) \cdot \big[g(x) + \Delta g(x)\big] \\ &= f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \big[\Delta g(x)\big] + g(x) \cdot \big[\Delta f(x)\big] + \big[\Delta f(x)\big] \cdot \big[\Delta g(x)\big] \end{aligned}$$

- **Paso 2:**

$$\begin{aligned} \Delta y &= \big[f(x) + \Delta f(x)\big] \cdot \big[g(x) + \Delta g(x)\big] \\ &= f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \big[\Delta g(x)\big] + g(x) \cdot \big[\Delta f(x)\big] + \big[\Delta f(x)\big] \cdot \big[\Delta g(x)\big] - f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x) \cdot \big[\Delta g(x)\big] + g(x) \cdot \big[\Delta f(x)\big] + \big[\Delta f(x)\big] \cdot \big[\Delta g(x)\big] \end{aligned}$$

- **Paso 3:**
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)\cdot[\Delta g(x)]+g(x)\cdot[\Delta f(x)]+[\Delta f(x)][\Delta g(x)]}{\Delta x}$$
Ahora reescribimos la última ecuación de la siguiente forma:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}+g(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\frac{[\Delta f(x)]\cdot[\Delta g(x)]}{\Delta x}$$
- **Paso 4:**
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}+g(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\frac{[\Delta f(x)]\cdot[\Delta g(x)]}{\Delta x}\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(g(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{[\Delta f(x)]\cdot[\Delta g(x)]}{\Delta x}\right)\\ &= f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right)+g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{[\Delta f(x)]\cdot[\Delta g(x)]}{\Delta x}\right)\end{aligned}$$
- Cuando Δx tiende a cero, tanto $\Delta f(x)$ como $\Delta g(x)$ tienden a cero, porque $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$, y que $\Delta g(x)=g(x+\Delta x)-g(x)$.
- Así que el producto $[\Delta f(x)]\cdot[\Delta g(x)]$ tiende a cero más rápido que Δx, de manera que el límite:
$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{[\Delta f(x)]\cdot[\Delta g(x)]}{\Delta x}\right)=0$$
y la derivada del producto de las funciones $y=f(x)$, y $y=g(x)$ es:
$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right)+g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)$$
pero,
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)=\frac{dg}{dx} \qquad \text{y}\\ \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)=\frac{df}{dx}\end{aligned}$$
luego,
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d[f(x)\cdot g(x)]}{dx}=f(x)\cdot\frac{dg(x)}{dx}+g(x)\cdot\frac{df(x)}{dx}$$

Calcula una fórmula para el triple producto de funciones. **Ejemplo 8**

- Definimos: $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$, $y_3=h(x)$, y la función $y=f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$.
- Ahora aplicamos la fórmulaque acabamos de encontrar definiendo $u=f(x)$ y $v=g(x)\cdot h(x)$:
$$\begin{aligned}\frac{d[f(x)\cdot(g(x)\cdot h(x))]}{\Delta x} &= \frac{d[u\cdot v]}{\Delta x}\\ &= u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}\\ &= f(x)\cdot\frac{d[g(x)\cdot h(x)]}{dx}+g(x)\cdot h(x)\cdot\frac{df(x)}{dx}\end{aligned}$$

- Ahora volvemos a aplicar la fórmula de la derivada de un producto en el primer término:

$$\frac{d\left[g(x)\cdot h(x)\right]}{dx} = g(x)\cdot\frac{dh(x)}{dx} + h(x)\cdot\frac{dg(x)}{dx}$$

Entonces, la derivada del triple producto de funciones es:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= f(x)\cdot\left[g(x)\cdot\frac{dh(x)}{dx} + h(x)\cdot\frac{dg(x)}{dx}\right] + g(x)\cdot h(x)\cdot\frac{df(x)}{dx}\\
&= f(x)\cdot g(x)\cdot\frac{dh(x)}{dx} + f(x)\cdot h(x)\cdot\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\cdot h(x)\cdot\frac{df(x)}{dx}
\end{aligned}$$

Ejemplo 9

Calcula la derivada de la función:

$$y = x^n$$

- Este ejercicio no es sencillo, pero es muy instructivo.
- Para resolverlo debes recordar el binomio de Newton:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \cdots + \binom{n}{n-1} x\, a^{n-1} + \binom{n}{n} a^n$$

- Nosotros vamos a hacer $a = \Delta x$ para utilizarlo en el primer paso.
- Así que empezamos aplicando la regla de los cuatro pasos.
- **Paso 1:**

$$\begin{aligned}
y + \Delta y &= (x + (\Delta x))^n\\
&= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}(\Delta x) + \cdots + \binom{n}{n-1} x\,(\Delta x)^{n-1} + \binom{n}{n}(\Delta x)^n\\
&= x^n + n\,x^{n-1}(\Delta x) + \cdots + n\,x\,(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n
\end{aligned}$$

- **Paso 2:**

$$\begin{aligned}
\Delta y &= x^n + n\,x^{n-1}(\Delta x) + \cdots + n\,x\,(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n\\
&= n\,x^{n-1}(\Delta x) + \cdots + n\,x\,(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n
\end{aligned}$$

- **Paso 3:**

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{n\,x^{n-1}(\Delta x) + \cdots + n\,x\,(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}\\
&= n\,x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}(\Delta x) + \cdots + n\,x\,(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}
\end{aligned}$$

- **Paso 4:**

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(n\,x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}(\Delta x) + \cdots + n\,x\,(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right)\\
&= n\,x^{n-1} + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\binom{n}{2} x^{n-2}(\Delta x) + \cdots + n\,x\,(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right)\\
&= n\,x^{n-1}
\end{aligned}$$

- Observa que todos los términos del desarrollo del binomio a la potencia n, excepto el primero, tienen como coeficiente alguna potencia de Δx.

- Eso ocasiona que todos, excepto el primero se hagan cero cuando calculamos el límite cuando Δx tiende a cero.

- Entonces,

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n\,x^{n-1}$$

Calcula la derivada del cociente de dos funciones:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ejemplo 10

- Ahora consideramos un cociente.

- Aplicamos la regla de los cuatro pasos.

- **Paso 1:**

$$y + \Delta y = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}$$

- **Paso 2:**

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\\
&= \frac{g(x)\cdot\left[f(x+\Delta x)\right] - f(x)\cdot\left[g(x+\Delta x)\right]}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}
\end{aligned}$$

- Ahora vamos a sumar $0 = f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)$ en el numerador para poder expresar la fracción como:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \frac{g(x)\cdot f(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}\\
&= \frac{g(x)\cdot\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right] - f(x)\cdot\left[g(x+\Delta x) - g(x)\right]}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}\\
&= \frac{g(x)\cdot\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)\cdot\left[g(x+\Delta x) - g(x)\right]}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}
\end{aligned}$$

- **Paso 3:**

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{g(x)\cdot\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]}{(\Delta x)\cdot g(x)\cdot g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)\cdot\left[g(x+\Delta x) - g(x)\right]}{(\Delta x)\cdot g(x)\cdot g(x+\Delta x)}\\
&= \frac{g(x)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}\cdot\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}\cdot\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\\
&= \frac{1}{g(x+\Delta x)}\cdot\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1}{g(x+\Delta x)}\cdot\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

- **Paso4:**

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{g(x+\Delta x)}\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)\\
&\qquad -\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{g(x+\Delta x)}\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{g(x+\Delta x)}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)\\
&\qquad -\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{g(x+\Delta x)}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \frac{1}{g(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx}-\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{dg(x)}{dx}
\end{aligned}
$$

- Podemos multiplicar en el numerador y en el denominador del primer término por $g(x)$ para simplificar la expresión como sigue:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{g(x)}{\left[g(x)\right]^2}\cdot\frac{df(x)}{dx}-\frac{f(x)}{\left[g(x)\right]^2}\cdot\frac{dg(x)}{dx}\\
&= \frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}
\end{aligned}
$$

donde

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}\qquad \text{y} \qquad g'(x)=\frac{dg(x)}{dx}$$

Reto 1

Justifica la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

usando las fórmulas: $\dfrac{d(x^n)}{dx}=n\,x^{n-1}$ y $\dfrac{d\left[f(x)\cdot g(x)\right]}{dx}=f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$ escribiendo:

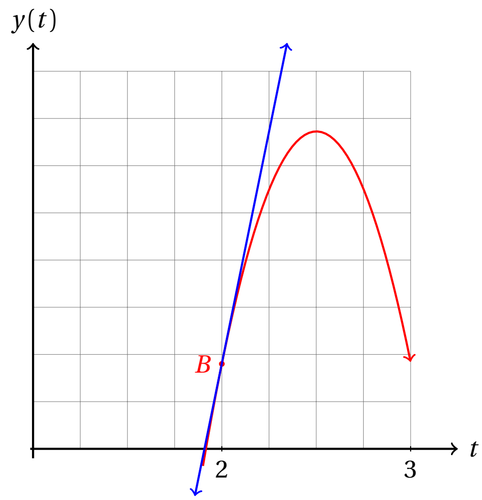
$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\left[g(x)\right]^{-1}.$$

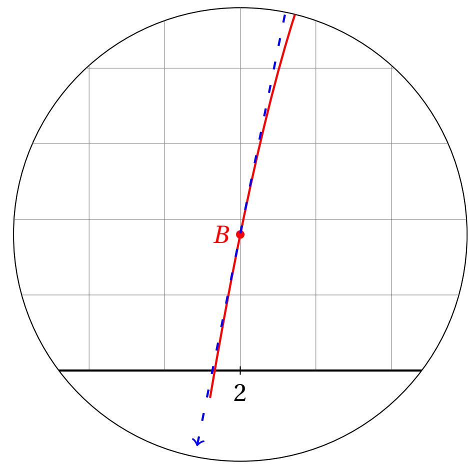
20.1.3 Interpretación geométrica de la derivada

Ya estudiamos una interpretación geométrica de la razón de cambio instantánea.

Ahora vamos a profundizar un poco más en este concepto recordando que la derivada es una razón de cambio instantánea y vamos a descubrir otra interpretación geométrica más de este operador matemático.

Considerando la misma gráfica de la página 827, vamos a hacer un acercamiento al punto donde calculamos la *velocidad instantánea* de la piedra que cae desde los 10 metros de altura:





En la gráfica de la derecha, la recta punteada representa la *recta tangente a la gráfica de la función* en el punto B.

En la cercanía del punto B, la recta y gráfica de la función se confunden, porque la curva es «*suave*». Es decir, los valores que van tomando $y(x)$ no cambian de dirección bruscamente, como por ejemplo, la función valor absoluto.

Para la función $y = |x|$, en la cercanía del origen la dirección de la gráfica de la función cambia bruscamente. La gráfica de la función en ese punto «*no es suave*».

Por otra parte, cualquier función polinomial es suave. La función cuadrática es una función polinomial y por eso es suave. Como la gráfica de esta función es suave, una recta tangente puede aproximar muy bien a su gráfica en la cercanía de cualquiera de sus puntos.

La recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ se puede calcular a través del límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

que no es sino la razón de cambio instantánea de y con respecto a x, o en otras palabras, la derivada de la función respecto a su variable independiente.

Entonces, la derivada también puede interpretarse como la *mejor aproximación lineal a una función en la cercanía de uno de sus puntos.*

De hecho, precisamente esa es la razón por la cual durante mucho tiempo se creyó que la tierra era plana.

En la cercanía de un punto, la superficie que forma el agua de mar parece un plano. El tamaño de la superficie terrestre es muy grande comparada con el tamaño de nosotros, los humanos. Por eso, se creyó que la tierra era plana. Porque un plano es una muy buena aproximación a la superficie de una esfera en un punto.

En un plano, una recta es una muy buena aproximación a una circunferencia en la cercanía de uno de sus puntos. Y conforme el radio de la circunferencia crece, la aproximación parece ser cada vez mejor.

Como resumen, tenemos las siguientes interpretaciones de la derivada de una función.

Definición 1

INTERPRETACIÓN DE LA DERIVADA

Sea $y = f(x)$ una función con derivada en todo su dominio. La derivada de la función $f'(x)$ puede interpretarse de las siguientes tres maneras:

i. La razón de cambio instantánea de la variable y con respecto a la variable independiente de la función x.

ii. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en uno de sus puntos.

iii. La mejor aproximación lineal a la gráfica de la curva $y = f(x)$ en uno de sus puntos.

Ejemplo 1

Calcula la derivada de la función:

$$y = x^2 + 2x - 1$$

y da las tres posibles interpretaciones que se pueden dar al resultado.

- Aplicamos la regla de los 4 pasos.
- **Paso 1:**

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - 1 \\ &= x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 2x + 2(\Delta x) - 1 \end{aligned}$$

- **Paso 2:**

$$\begin{aligned} \Delta y &= x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 2x + 2(\Delta x) - 1 \\ &\quad -(x^2 + 2x - 1) \\ &= 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 2(\Delta x) \end{aligned}$$

- **Paso 3:**

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta_x} &= \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 2(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= 2x + (\Delta x) + 2 \end{aligned}$$

- **Paso 4:**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + (\Delta x) + 2) \\ &= 2x + 2 \end{aligned}$$

- Ahora damos la interpretación.
- **Primera interpretación:**
  La razón de cambio instantánea de $y = x^2 + 2x - 1$ con respecto a la variable x es $y' = 2x + 2$.
- **Segunda interpretación:**
  La pendiente de la recta tangente a la función $y = x^2 + 2x - 1$ en el punto (x, y) está dada por: $y' = 2x + 2$.

- **Tercera interpretación:**
  La mejor aproximación lineal a la función $y = x^2 + 2x - 1$ en cualquiera de sus puntos (x, y) puede calcularse con la ayuda de: $y' = 2x + 2$.

La derivada puede interpretarse geométricamente así como físicamente, dependiendo del contexto en el cual se le calcule.

A partir de una función la derivada puede interpretarse como una corriente eléctrica, gasto de agua, etc.

Ejemplo 2

La posición y (medida en metros) de una bala que cae bajo la acción de la gravedad terrestre está dada por la siguiente función:

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

donde t es el tiempo medido en segundos, y_0 es la altura a la cual se dejó caer la bala y $g = 9.8$ (medida en m/s^2) es la aceleración constante debida a la gravedad. ¿Cómo debemos interpretar la derivada de esta función del tiempo?

- Suponiendo que la bala cae desde 10 metros de altura la función se convierte en el caso particular:

$$y(t) = 10 - \frac{9.8}{2} t^2 = 10 - 4.9 t^2$$

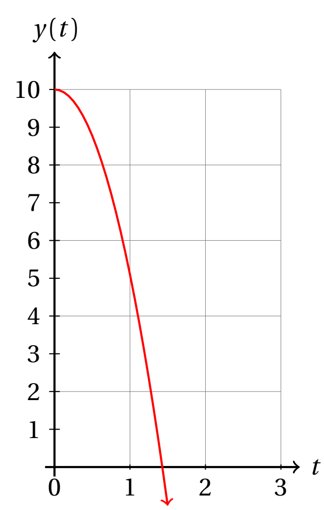
- A partir de un valor de t nosotros podemos calcular un valor de la posición de la bala.
- Por ejemplo, 0.5 segundos después de iniciar su caida, la piedra estaba a:

$$y(t) = 10 - 4.9(0.5)^2 = 8.775 \text{ metros de altura.}$$

- Y un segundo después, estaba a:

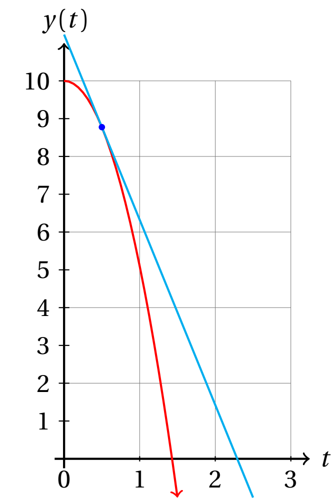
$$y(t) = 10 - 4.9(1)^2 = 5.1 \text{ metros de altura.}$$

- Ahora podemos graficar esta función cuadrática:



- Para calcular la velocidad promedio de la bala entre $t = 0.5$ y $t = 1$ segundos, dividimos distancia entre velocidad.

- En este caso en el eje horizontal tenemos al tiempo (t)
- Y en el eje vertical tenemos distancia.
- El cociente de las unidades de los ejes
$$\frac{\text{Eje vertical}}{\text{Eje horizontal}} = \frac{m}{s}$$
nos indica las unidades de la cantidad física que representa la derivada de la función que estemos estudiando.
- En este caso, la derivada se interpreta físicamente como una velocidad instantánea.
- Geométricamente, sigue representando la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.
- Para encontrar la pendiente de la recta tangente a la función aplicamos la regla de los cuatro pasos.
- **Paso 1:**
$$\begin{aligned} y+\Delta y &= 10-4.9(t+\Delta t)^2 \\ &= 10-4.9\left[t^2+2\,t\,(\Delta t)+(\Delta t)^2\right] \\ &= 10-4.9\,t^2-9.8\,t\,(\Delta t)-4.9(\Delta t)^2 \end{aligned}$$
- **Paso 2:**
$$\begin{aligned} \Delta y &= 10-4.9\,t^2-9.8\,t\,(\Delta t)-4.9(\Delta t)^2-10-4.9\,t^2 \\ &= -9.8\,t\,(\Delta t)-4.9(\Delta t)^2 \end{aligned}$$
- **Paso 3:**
$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{-9.8\,t\,(\Delta t)-4.9(\Delta t)^2}{\Delta t} \\ &= -9.8\,t-4.9(\Delta t) \end{aligned}$$
- **Paso 4:**
$$\begin{aligned} y'(t)=\frac{dy}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}(-9.8\,t-4.9(\Delta t)) \\ y'(t) &= -9.8\,t \end{aligned}$$
- Para el caso $t=0.5$, podemos ver que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva es: $y'(0.5)=-4.9$
- En la siguiente gráfica se muestra la función $y(t)=10-4.9\,t^2$ y la recta tangente en $t=0.5$.



- Se te queda como ejercicio calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función cuando $t = 1$ s. -9.8

Observa que a partir del ejemplo anterior podemos concluir que cada contexto le da una interpretación propia a la derivada de la función que estemos estudiando.

Esto no es de sorprender, porque la derivada es una razón de cambio, y cada razón de cambio tiene una propia interpretación de acuerdo a las cantidades que están formando el cociente.

Ejemplo 3

Cuando se aplica un campo eléctrico E a un conductor, sus cargas eléctricas libres empiezan a moverse, las positivas se mueven en el mismo sentido que el campo eléctrico y las negativas en sentido contrario. Si se miden la cantidad de carga eléctrica Q (medida en coulombios) que atraviesa una sección transversal del conductor y el tiempo t (medido en segundos) que le toma atravesarla, la intensidad de corriente eléctrica I se define como el siguiente límite:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t} \right)$$

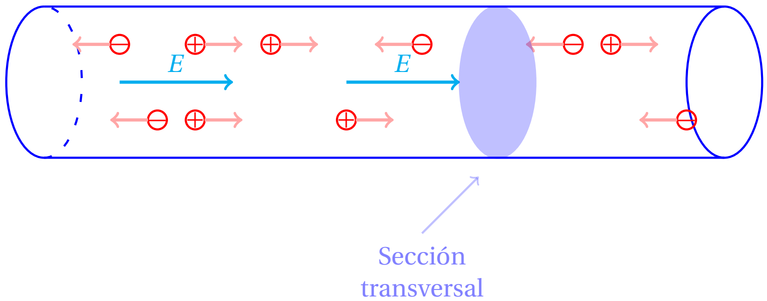
que no es sino la derivada de Q respecto a t. Da una interpretación física de esta derivada.

- Sabemos que Q es carga eléctrica y t es el tiempo.

- Entonces, la intensidad de corriente eléctrica es la razón de cambio instantánea de la cantidad de carga que atraviesa una sección transversal del conductor por unidad de tiempo en un instante determinado.

- En otras palabras, la intensidad de corriente nos indica cuánta carga eléctrica atraviesa una sección transversal del conductor cada segundo para un valor de t determinado.

- El siguiente diagrama explica el fenómeno físico:



- El conductor mostrado contiene cargas positivas ($\oplus$), cargas negativas ($\ominus$) y el campo eléctrico está denotado por las flechas con la letra E encima de ellas ($\xrightarrow{E}$).
- Observa que el movimiento de las cargas positivas tienen la misma dirección que el campo eléctrico, mientras que las cargas negativas la dirección opuesta.
- La intensidad de corriente I nos indica la cantidad de cargas eléctricas que atraviesan la sección transversal mostrada en la figura por unidad de tiempo en un instante determinado.

Las aplicaciones de las derivadas no se limitan solamente a cuestiones de ciencias exactas como matemáticas, física, química, etc.

También podemos encontrar aplicaciones en cualquier otra rama del conocimiento, como en biología, administración, ciencias sociales, etc.

Los siguientes ejemplos corresponden a aplicaciones de administración y economía.

Ejemplo 4

En una empresa han determinado que la función que describe el comportamiento del costo de producción de un producto dependiendo de la cantidad producida es:

$$C = 120\,000 + 345\,n + 0.25\,n^2$$

donde C es el costo de producir n de esos productos. Interpreta la derivada de esta función.

- Sabemos que C es el costo de producir n artículos.
- La derivada de la función se define como:

$$\frac{dC}{dn} = \lim_{\Delta n \to 0} \left(\frac{C(n + \Delta n) - C(n)}{D n} \right)$$

- En el numerador tenemos el incremento en el costo de producir Δn artículos más.
- En el denominador tenemos Δn, que es el número de artículos en que se incrementará la producción.
- El cociente nos indica el incremento promedio del costo de cada artículo.
- Entonces, la derivada de la función nos indica la razón instantánea del incremento en el costo de producción de cada artículo producido.
- Puede mostrarse que la derivada de lafunción es:

$$\frac{dC}{dn} = 345 + 0.5\,n$$

- De la derivada podemos concluir que al aumentar la producción de un artículo más, el costo de producción de cada producto aumenta en 0.5.
- Se te queda como ejercicio verificar que la derivada de la función dada anteriormente es correcta.

Ejemplo 5

La demanda de pares de tenis para caminata que observa un fabricante cambia con el precio al cual oferta dicho producto. Según sus cálculos, la función que describe la demanda en función del precio es la siguiente:

$$N = -25\,p^2 + 700\,p$$

donde N es el número de pares de tenis demandados por el mercado y p es el precio al cual se oferta cada par. Interpreta la derivada de N respecto a p de esta función.

- La derivada de N respecto a p está definida como:

$$\frac{dN}{dp} = \lim_{\Delta p \to 0}\left(\frac{N(p+\Delta p) - N(p)}{\Delta p}\right)$$

- Como N representa la cantidad de pares de tenis que se demandan, el cociente

$$\frac{N(p+\Delta p) - N(p)}{\Delta p}$$

  representa la tasa de incremento en la cantidad de pares de tenis que se demandan por cada peso que se eleva el precio de cada par.
- Entonces, la derivada es la razón de crecimiento instantánea de la demanda de pares de tenis con respecto al precio.
- Por ejemplo, podemos verificar que la derivada de la función es:

$$\frac{dN}{dp} = -50\,p + 700$$

- Esto indica que cuando se aumenta en un peso el precio de cada par de tenis, su demanda disminuye en 50 pares.
- Se te queda como ejercicio verificar que la derivada de la función de demanda que se dio anteriormente es correcta.

Observa que la derivada tiene interpretación que va de acuerdo al contexto del problema en el cual se le aplicó.

La función que relaciona las variables del problema te ayudará a interpretarla correctamente.

20.1.4 Diferenciabilidad en un intervalo

Ahora que conocemos cómo calcular la derivada de una función en un punto conviene hacer la pregunta más general: « *¿Cómo podemos saber si una derivada se puede derivar en un intervalo* (a,b) *dado?*»

Para responder a esta pregunta debemos considerar el caso particular de diferenciabilidad en un punto.

Obviamente si existe la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$, es obvio que la función debe estar definida en ese punto. Pues si no fuera así, ¿cómo podríamos definir la derivada de la función en ese punto, si no pertenece a la función?

Basándonos en la definición de derivada usando los cuatro pasos (página 834) vemos que la derivada de la función $y = f(x)$ existirá en el intervalo (a, b) siempre que el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)$$

exista para cualquier punto $x_0 \in (a, b)$.

Pero primero debemos entender qué significa el hecho de que la función $y = f(x)$ sea derivable en un punto de su dominio.

Basándonos en la regla de los 4 pasos concluimos que se deben cumplir las siguientes dos condiciones:

i. La función debe ser contínua en el punto x_0, y

ii. Los dos límites laterales:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \qquad \text{y} \lim_{\Delta x \to 0^+}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

deben existir para que exista la derivada en ese punto (por la definición de límite).

Si la derivada existe para todo punto del intervalo, entonces decimos que la función es diferenciable en ese intervalo.

Ejemplo 1

Verifica si la función

$$y = x^2$$

es diferenciable en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

- Primero debemos verificar que la función es contínua en ese punto.
- Pero como toda función polinomial es contínua en todo el conjunto de los números reales, y la función $y = x^2$ es polinomial, se sigue que la función es cntínua en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
- Ahora debemos verificar que la función es diferenciable para todo número real.
- Empezamos aplicando la regla de los cuatro pasos.
- **Paso 1:**

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2$$

- **Paso 2:**

$$\Delta y = 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2$$

- **Paso 3:**

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= 2x + \Delta x \end{aligned}$$

- **Paso 4:**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) \\ &= 2x \end{aligned}$$

- La derivada de la función polinomial: $y = x^2$ es una nueva función polinomial: $y' = 2\,x$.
- Como la derivada en sí es otra función polinomial, es contínua y suave en todo el conjunto de los números reales.
- En otras palabras, los límites:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \qquad \text{y} \lim_{\Delta x \to 0^+} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

  existen para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Esto se hace evidente al observar que la derivada $y' = 2\,x$ es una línea recta.
- Entonces, la derivada de $y = x^2$ está definida para todos los números reales, pues siempre es posible calcular y' dado un valor x_0-.

El hecho de que una función sea contínua en un punto no significa que su derivada exista ahí.

El siguiente ejemplo es uno de los clásicos del caso en el que la función es contínua en un punto, pero su derivada no se define ahí.

Ejemplo 2

Verifica si la función

$$y = |x|$$

es derivable en el el punto $x = 0$.

- La función valor absoluto es contínua en todo el conjunto de los números reales.
- Por ende, es contínua en $x = 0$.
- Ahora vamos a ver si su derivada existe en ese punto.
- Aplicamos la regla de los 4 pasos.
- **Paso 1:**

$$y + \Delta y = |x + \Delta x|$$

- **Paso 2:**

$$\Delta y = |x + \Delta x| - |\Delta x|$$

- **Paso 3:**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|x + \Delta x| - |\Delta x|}{\Delta x}$$

- **Paso 4:**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{|x + \Delta x| - |\Delta x|}{\Delta x}\right) \end{aligned}$$

- Para verificar si existe este límite, debemos verificar que los límites:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \qquad \text{y} \qquad \lim_{\Delta x \to 0^+} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

  coincidan.

- Primero calculamos el límite por la izquierda:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \left(\frac{|x + \Delta x| - |\Delta x|}{\Delta x} \right) = -1$$

- Y por otra parte, el límite por la derecha es:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \left(\frac{|x + \Delta x| - |\Delta x|}{\Delta x} \right) = 1$$

  lo cual puedes verificar usando una tabla.

- Entonces, dado que los últimos dos límites no coinciden, el límite:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{|x + \Delta x| - |\Delta x|}{\Delta x} \right)$$

  no existe.

- En conclusión, la función $y = |x|$ no es derivable en el punto $x = 0$ a pesar de que es contínua ahí.

Ejemplo 3

Verifica si la función:

$$y = \begin{cases} \frac{3}{2} x^2 + x & \text{para } x < 1 \\ 4x - \frac{3}{2} & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$$

es derivable en el punto $x = 1$.

- **Primera parte...**
- Primero debemos verificar que la función es contínua en $x = 1$.
- Para eso, vamos a verificar las condiciones de continuidad de una función (página 813).
- **Primera condición:** verificamos que $f(1)$ esté definida:

$$y(1) = 4(1) - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

- **Segunda condición:** verificamos que existe el límite.
- Para eso, vamos a verificar por ambos lados.

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{3}{2} x^2 + x \right) = \frac{5}{2}$$

  por otra parte,

$$\lim_{x \to 1^+} \left(4x - \frac{3}{2} \right) = \frac{5}{2}$$

- Como los dos límites anteriores son iguales, el límite existe.
- Además se cumple la **tercera condición**, es decir:

$$\lim_{x \to 1} \big(y(x) \big) = y(1) = \frac{5}{2}$$

- Entonces, la función es contínua en $x = 1$.
- **Segunda parte...**
- Ahora hay que verificar que la derivada existe en $x = 1$.
- Esto significa que debemos verificar que los límites:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\frac{3}{2}\, x^2 + x}{\Delta x} \right) \qquad \text{y} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{4\,x - \frac{3}{2}}{\Delta x} \right)$$

evaluados en $x = 1$ coinciden.

- El límite por la izquierda es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\frac{3}{2}\, x^2 + x}{\Delta x} \right) = 3\,x + 1$$

- Cuando $x \to 1$, la derivada es: $3(1) + 1 = 4$
- Por otra parte, el límite por la derecha es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{4\,x - \frac{3}{2}}{\Delta x} \right) = 4$$

- En este caso la derivada vale siempre 4, independientemente del valor de x.
- Como los dos límites coinciden, la función es derivable en $x = 1$.

Ejemplo 4

Verifica si la función:

$$y = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{para } x < 2 \\ 4\,x - 1 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$$

es derivable en el punto $x = 2$.

- **Primera parte...**
- Primero verificamos que sea contínua la función
- **Primera condición:** $f(2)$ existe.

$$y(2) = 4(2) - 1 = 7$$

- **Segunda condición:** verificamos el límite.
- Por la izquierda es:

$$\lim_{x \to 2^-} \left(x^2 - 2 \right) = 2$$

- Y por la derecha:

$$\lim_{x \to 2^+} (4\,x - 1) = 7$$

- No es necesario ir más lejos.

- Dado que los límites no coinciden, la función no es contínua en $x = 2$, y por tanto, es imposible calcular su derivada en ese punto.

Verifica si la función:

$$y = \sqrt{x-2}$$

es derivable en el punto $x = 2$.

Ejemplo 5

- **Primera parte...**
- Verificamos si la función es contínua en $x = 2$.
- **Primera condición:** $f(2)$ existe.
$$y(2) = \sqrt{2-2} = 0$$
- **Segunda condición:** verificamos el límite
- Por la izquierda:
$$\lim_{x\to 2^-} \left(\sqrt{x-2}\right)$$
- Recordando que la función $y = sqrt x - 2$ está definida para $x - 2 \geq 0$, nos damos cuenta que es imposible calcular el límite por la izquierda.
- Esto se debe a que las raíces cuadradas de números negativos no están en el conjunto de los números reales.
- Entonces, el límite
$$\lim_{x\to 2} \left(\sqrt{x-2}\right)$$
no existe.
- De aquí que la función, ni sea contínua ni derivable en $x = 2$.

Observa que ahora estamos utilizando varias cosas que ya has aprendido:

✓ continuidad de una función,

✓ límites y

✓ la regla de los cuatro pasos.

entre otros conceptos más básicos como álgebra.

Si te confunden los procedimientos que estamos utilizando para resolver los ejemplos eso significa que no has entendido con suficiente profundidad los conceptos mencionados, así que debes estudiarlos para entender los procedimientos de esta sección.

Reglas de derivación

Hasta aquí hemos utilizado la regla de los cuatro pasos para calcular la derivada de funciones.

Sin embargo existe un procedimiento más sencillo que consiste en calcular la derivada de una clase de funciones y tulizar el resultado como una fórmula para evitar el procedimiento de los cuatro pasos.

De hecho, ha hemos calculado algunas de estas fórmulas. Por ejemplo, en la página 837 hemos calculado la fórmula para derivar cualquier función de la forma:

$$y = m\,x + b$$

10. Regla de la potencia

Ya hemos deducido la fórmula para calcular la derivada de una potencia en la página 842.

La fórmula que obtuvimos es la siguiente:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n\,x^{n-1}$$

Esta fórmula será de gran utilidad para derivar funciones polinomiales.

Calcula la derivada de la función:

$$y = x^{12}$$

Ejemplo 6

- Si tuvieramos que utilizar la regla de los cuatro pasos el procedimiento sería muy largo.
- Sin embargo, ya sabemos la fórmula para derivar una potencia.
- Así que basta con aplicarla.
- En este caso $n = 12$, y de aquí que $n - 1 = 11$.
- Sustituyendo en a fórmula obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d(x^n)}{dx} &= n\,x^{n-1}\\ \frac{dy}{dx} &= 12x^{11}\end{aligned}$$

- Y terminamos.

Calcula la derivada de la función:

$$y = c \cdot f(x)$$

Ejemplo 7

- Por definición, la derivada de esta función es:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{c\cdot f(x+\Delta x) - c\cdot f(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{c\cdot\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]}{\Delta x}\right)$$

- Pero por las propiedades de los límites, podemos reescribir el límite de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = c\cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) = c\cdot\frac{d(f(x))}{dx}$$

- Esta es una regla de derivación.

Calcula la derivada de la función:
$$y = 5\,x^{12}$$
Ejemplo 8

- Aquí debemos aplicar dos reglas de derivación.
- La primera es la que acabamos de deducir en el ejemplo anterior.
- La segunda es la regla de la potencia.
- Entonces, la derivada de la función es:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d(5\cdot x^{12})}{dx}\\
&= 5\cdot\frac{d(x^{12})}{dx}\\
&= (5)(12)\cdot x^{11}
\end{aligned}$$

- Y terminamos.

Estas dos reglas de derivación, junto con otra tercera regla que vamos a deducir en el siguiente ejemplo, se utilizan para derivar funciones polinomiales de una manera muy rápida y sencilla.

Ejemplo 9

Calcula una regla de derivación para la suma de dos funciones:
$$y = f(x) + g(x)$$

- Por definición de derivada, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}\right)$$

- Y aplicando las propiedades de los límites podemos simplificar a:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \frac{d(f(x))}{dx}+\frac{d(g(x))}{dx}
\end{aligned}$$

- En palabras, la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas.

Ejemplo 10

Calcula la derivada de la función:
$$y = 1 + x + 2\,x^2 + 3\,x^3 + 4\,x^4$$

- Aplicamos las reglas que acabamos de deducir:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d(1)}{dx}+\frac{d(x)}{dx}+\frac{d\left(2x^2\right)}{dx}+\frac{d\left(3x^3\right)}{dx}+\frac{d\left(4x^4\right)}{dx}\\
&= \frac{d\left(x^0\right)}{dx}+\frac{d(x)}{dx}+2\cdot\frac{d\left(x^2\right)}{dx}+3\cdot\frac{d\left(x^3\right)}{dx}+4\cdot\frac{d\left(x^4\right)}{dx}\\
&= (0)(x^{-1})+(1)(x^0)+(2)(2)(x^1)+(3)(3)(x^2)+(4)(4)(x^3)\\
&= 0+1+4x+9x^2+16x^3\\
&= 1+4x+9x^2+16x^3
\end{aligned}$$

- Y terminamos.

Para simplificar la tarea de calcular la derivada de una función polinomial observa que basta con multiplicar el exponente por el coeficiente en cada término y la derivada es el producto que acabas de calcular por la literal elevada al exponente menos 1.

20.1.5 Reglas del producto y del cociente

Al igual que la regla de la potencia, ya calculamos las fórmulas para calcular la derivada de un producto de dos funciones en la página 840 y del cociente de dos funciones en la página 843.

Ahora vamos a aplicar estas fórmulas en el cálculo de derivadas de más funciones.

Ejemplo 1

Calcula la derivada de la siguiente función:

$$y=(x^3-1)\cdot(x^2+1)$$

- Tenemos dos formas distintas y correctas de calcular la derivada.
- La primera forma consiste en realizar la multiplicación de los binomios y derivar el resultado:

$$y=x^5+x^3-x^2-1$$

- Y su derivada es:

$$\frac{dy}{dx}=5\cdot x^4+3x^2-2x$$

- La otra forma consiste en aplicar la fórmula para derivar el producto de dos funciones:

$$\frac{d\big(f(x)\cdot g(x)\big)}{dx}=f(x)\cdot\frac{d\big(g(x)\big)}{dx}+g(x)\cdot\frac{d\big(f(x)\big)}{dx}$$

- Así que definimos: $f(x)=x^3-1$, y $g(x)=x^2+1$.
- A partir de estos datos podemos calcular:

$$\frac{d\big(f(x)\big)}{dx}=3x^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{d\big(g(x)\big)}{dx}=2x$$

- Ahora sustituimos los resultados en la fórmula para calcular la derivada del producto:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d\big((x^3-1)\cdot(x^2+1)\big)}{dx}\\
&= \left(x^3-1\right)\cdot\frac{d\left(x^2+1\right)}{dx}+\left(x^2+1\right)\cdot\frac{d\left(x^3-1\right)}{dx}\\
&= \left(x^3-1\right)\cdot(2x)+\left(x^2+1\right)\left(3x^2\right)\\
&= 2x^4-2x+3x^4+3x^2\\
&= 5x^4+3x^2-2x
\end{aligned}$$

- Por los dos métodos obtenemos la misma respuesta, como era de esperarse.

Ejemplo 2

Calcula la derivada de la función:

$$y=\frac{1-x}{x^4+1}$$

- Aplicamos la regla para calcular la derivada de un cociente de dos funciones:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

- Definimos $f(x)=1-x$, y $g(x)=x^4+1$.
- Entonces, $f'(x)=-1$, y $g'(x)=4x^3$.
- Ahora sustituimos estos valores en la regla:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\left(x^4+1\right)(-1)-(1-x)\left(4x^3\right)}{(x^4+1)}\\
&= \frac{-x^4-1-4x^3+4x^4}{(x^4+1)}\\
&= \frac{4x^4-4x^3-1}{(x^4+1)}
\end{aligned}$$

- Y terminamos.

Ejemplo 3

Calcula la derivada de la función:

$$y=\frac{x^3-1}{x^2+1}$$

- Ahora definimos:

$$f(x)=x^3-1 \qquad \text{y} \qquad g(x)=x^2+1$$

- De aquí podemos fácilmente calcular:

$$f'(x)=3x^2 \qquad \text{y} \qquad g'(x)=2x$$

- Ahora sustituimos en la fórmula y obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\left(x^2+1\right)\cdot\left(3x^2\right)-\left(x^3-1\right)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{3x^4+3x^2-2x^4+2x}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

- Y terminamos.

Calcula la derivada de la siguiente función:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

usando dos métodos diferentes.

Ejemplo 4

- **Primer método:** Aplicamos la regla de la potencia.
- Usando las leyes de los exponentes la función puede escribirse de la forma:

$$y = x^{-2}$$

- Ahora aplicamos la regla de la potencia:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

- **Segundo método:** Aplicamos la regla para calcular la derivada de un cociente de dos funciones.
- Definimos: $f(x) = 1$, y $g(x) = x^2$.
- A partir de estas definiciones podemos calcular: $f'(x) = 0$, y $g'(x) = 2x$.
- Ahora sustituimos en la regla correspondiente:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\left(x^2\right)\cdot(0)-(1)\cdot(2x)}{(x^2)^2}\\ &= \frac{-2x}{x^4}\\ &= -\frac{2}{x^3}\end{aligned}$$

- Y terminamos.
- Se te queda como ejercicio calcular la derivada de la función usando la regla para el cálculo de la derivada de un producto de dos funciones, definiendo $f(x) = 1$, y $g(x) = x^{-2}$.

Como puedes ver, el uso de las reglas de derivación nos ahorran mucho trabajo (si eligieramos utilizar la regla de los cuatro pasos) además de que podemos verificar algunos resultados usando otro método alterno, pero igual de válido.

En el siguiente ejemplo también tendremos que verificar el resultado usando dos métodos para calcular la derivada.

Ejemplo 5

Calcula la derivada de la siguiente función:

$$y = \frac{x^4+1}{x+1}$$

por dos diferentes métodos.

- **Primer método:** Aplicamos la regla de la derivada de un cociente de dos funciones.
- Definimos: $f(x) = x^4+1$, y $g(x) = x+1$.
- Ahora podemos calcular: $f'(x) = 4\,x^3$, y $g'(x) = 1$.
- Sustituimos estos valores en la regla correspondiente:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(x+1)\cdot\left(4\,x^3\right)-\left(x^4+1\right)\cdot(1)}{(x+1)^2}\\
&= \frac{4\,x^4+4\,x^3-x^4-1}{(x+1)^2}\\
&= \frac{3\,x^4+4\,x^3-1}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

- **Segundo método:** Aplicamos la regla del producto de dos funciones.
- Definimos: $f(x) = x^4+1$, y $g(x) = (x+1)^{-1}$.
- Entonces, $f'(x) = 4\,x^3$, y $g'(x) = -1/(x+1)^{-2}$.
- Ahora sustituimos en la regla mencionada:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= f(x)\cdot\frac{d\big(g(x)\big)}{dx} + g(x)\cdot\frac{d\big(f(x)\big)}{dx}\\
&= \left(x^4+1\right)\cdot\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)+\left(\frac{1}{x+1}\right)\cdot\left(4\,x^3\right)\\
&= -\frac{x^4+1}{(x+1)^2}+\frac{4\,x^3}{x+1}
\end{aligned}$$

- Ahora vamos a realizar la suma de fracciones algebraicas que queda indicada.
- Para simplificar la operación vamos a multiplicar en el numerador y en el denominador de la última fracción por $(x+1)$.

• Así obtenemos la suma de dos fracciones que tienen denominador común:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x^4+1}{(x+1)^2} + \frac{\left(4\,x^3\right)(x+1)}{(x+1)(x+1)}\\
&= \frac{-x^4-1+\left(4\,x^3\right)(x+1)}{(x+1)^2}\\
&= \frac{-x^4-1+4\,x^4+4\,x^3}{(x+1)^2}\\
&= \frac{3\,x^4+4\,x^3-1}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

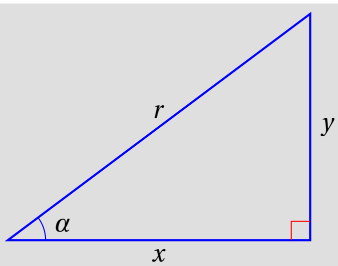
• Y terminamos.

Utilizando estas reglas de derivación y algunas otras que deduciremos más adelante podemos calcular las derivadas de funciones diversas.

En el transcurso del curso estudiaremos otras reglas que nos simplificarán mucho los cálculos.

20.1.6 Derivadas de funciones trigonométricas y sus inversas

Las funciones trigonométricas se definen a partir de un triángulo rectángulo como sigue:



✓ $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$ ✓ $\csc\alpha = \dfrac{r}{y}$

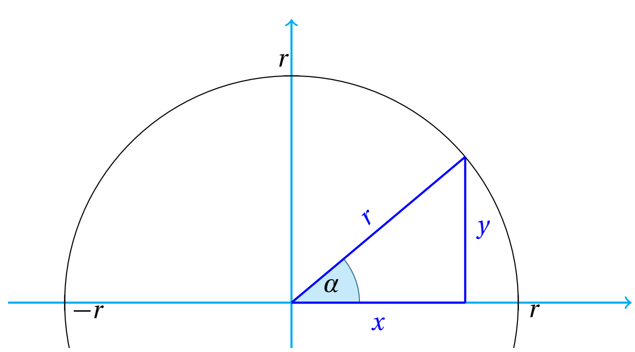
✓ $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ ✓ $\sec\alpha = \dfrac{r}{x}$

✓ $\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$ ✓ $\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$

Como puedes ver, estas funciones que caracterizan a un ángulo dado α.

Sin embargo, al definirlas así, da la impresión que el dominio de estas funciones, es decir, los valores de los ángulos α que pueden tomar como argumento estas funciones está en el intervalo $(0, 180)$. Esto no es así.

Las funciones trigonométricas se definen más correctamente a través de una circunferencia de radio r, de manera que podemos dar a α cualquier valor real.



Observa que, en el caso particular para $r = 1$, las funciones $\cos\alpha$ y $\sin\alpha$ son iguales a x e y respectivamente.

En esta sección nuestra tarea consiste en encontrar las reglas de derviación para las seis funciones trigonométricas.

Ejemplo 1

Calcula la regla de derivación para la función:

$$y = \sin x$$

- Debemos aplicar la regla de los cuatro pasos para deducir la regla.
- **Paso 1:**
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
- **Paso 2:**
$$\begin{aligned}\Delta y &= \sin(x+\Delta x) - \sin x \\ &= \sin x \cos(\Delta x) + \cos x \sin(\Delta x) - \sin x\end{aligned}$$
donde hemos utilizado una identidad trigonométrica[2].
- **Paso 3:**
$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sin x \cos(\Delta x) + \cos x \sin(\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \cos x \cdot \left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right) - \sin x \cdot \left(\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}\right)\end{aligned}$$
- **Paso 4:**
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos x \cdot \left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right) - \sin x \cdot \left(\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}\right)\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos x \cdot \left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)\right) - \lim_{\Delta x \to 0}\left(\sin x \cdot \left(\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}\right)\right) \\ &= \cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right) - \sin x \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}\right)\end{aligned}$$
- Ya sabemos que el primer límite de la expresión anterior es igual a 1.
- Pero el otro límite:
$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}\right)$$
no. Así que vamos a calcularlo[3].
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}\right) &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\left(\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}\right) \cdot \left(\frac{1+\cos(\Delta x)}{1+\cos(\Delta x)}\right)\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1-\cos^2(\Delta x)}{(1+\cos(\Delta x))(\Delta x)}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin^2(\Delta x)}{(1+\cos(\Delta x))(\Delta x)}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin(\Delta x)}{1+\cos(\Delta x)} \cdot \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)\end{aligned}$$

[2] Puedes buscarla en cualquier libro de trigonometría: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

[3] Aquí también usamos otra identidad: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

- Pero el límite de un producto se puede expresar como el producto de los límites, entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin(\Delta x)}{1+\cos(\Delta x)}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)$$

- Cuando Δx tiende a cero, $\sin(\Delta x)$ también tiende a cero, mientras que $1+\cos\Delta x$ tiende a 1.
- Entonces,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}\right) = \frac{0}{1} = 0$$

- Y la regla para derivar la función $y = \sin x$ es:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right) - \sin x \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}\right)\\
&= (\cos x)(1) - (\sin x)(0)\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

Calcula la regla de derivación para la función:

$$y = \cos x$$

Ejemplo 2

- **Paso 1:** Utilizamos otra identidad trigonométrica:

$$y + \Delta y = \cos(x+\Delta x) = \cos x \cos(\Delta x) - \sin x \sin(\Delta x)$$

- **Paso 2:**

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \cos x \cos(\Delta x) - \sin x \sin(\Delta x) - \cos x\\
&= \cos x \cdot [\cos(\Delta x) - 1] - \sin x \sin(\Delta x)\\
&= -\cos x \cdot [1-\cos(\Delta x)] - \sin x \sin(\Delta x)
\end{aligned}$$

- **Paso 3:**

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-\cos x \cdot [1-\cos(\Delta x)] - \sin x \sin(\Delta x)}{\Delta x}\\
&= -\cos x \cdot \frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x} - \sin x \cdot \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\\
&= -\cos x \cdot \frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{1+\cos(\Delta x)}{1+\cos(\Delta x)} - \sin x \cdot \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\\
&= -\cos x \cdot \frac{1-\cos^2(\Delta x)}{(\Delta x)[1+\cos(\Delta x)]} - \sin x \cdot \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\\
&= -\cos x \cdot \frac{\sin^2(\Delta x)}{(\Delta x)[1+\cos(\Delta x)]} - \sin x \cdot \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\\
&= -\cos x \cdot \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\sin(\Delta x)}{1+\cos(\Delta x)} - \sin x \cdot \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

- **Paso 4:**

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\\
&= -\cos x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin(\Delta x)}{1+\cos(\Delta x)}\right)-\sin x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)\\
&= -(\cos x)\cdot(1)\cdot(0)-(\sin x)\cdot(1)\\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$$

Ejemplo 3 Calcula la regla de derivación para la función:

$$y=\tan x$$

- Aquí usaremos la identidad trigonométrica:

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

y la regla para derivar el cociente de dos funciones.

- Para eso definimos: $f(x)=\sin x$, y $g(x)=\cos x$.
- Sus derivadas son conocidas ahora, $f'(x)=\cos x$, y $g'(x)=-\sin x$.
- Sustituyendo estos valores en la regla para derivar al cociente $\sin x/\cos x$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x}\\
&= \sec^2 x
\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\frac{d(\tan x)}{dx}=\sec^2 x$$

Ejemplo 4 Calcula la derivada de la función: $y=\sec x$.

- Usaremos la identidad trigonométrica:

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}$$

y la regla para derivar el cociente de dos funciones.

- Para eso definimos: $f(x)=1$, y $g(x)=\cos x$. Luego, $f'(x)=0$, y $g'(x)=-\sin x$

- Sustituyendo estos valores en la regla para derivar el cociente obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(\cos x)\cdot(0)-(1)\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x\tan x
\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\frac{d(\sec x)}{dx} = \sec x\tan x$$

Calcula la derivada de la función: $y = \csc x$. **Ejemplo 5**

- Ahora utilizaremos la identidad:
$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$
- Definiendo $f(x) = 1$ y $g(x) = \sin x$, tenemos que $f'(x) = 0$ y $g'(x) = \cos x$.
- Sustituyendo en la regla para la derivada de un cociente de dos funciones, obtenemos:
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(\sin x)\cdot(0) - (1)\cdot(\cos x)}{\sin^2 x}\\ &= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\\ &= -\csc x \cot x\end{aligned}$$
- Entonces,
$$\frac{d(\csc x)}{dx} = -\csc x \cot x$$

Ejemplo 6 Calcula la derivada de la función:
$$y = \cot x$$

- Utilizaremos la identidad:
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
- Definiendo: $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, se sigue: $f'(x) = \sin x$, $g'(x) = -\cos x$.
- Sustituyendo en la regla de derivación correspondiente obtenemos:
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(\sin x)\cdot(\sin x) - (-\cos x)\cdot(\cos x)}{\sin^2 x}\\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\\ &= \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x\end{aligned}$$
- Luego,
$$\frac{d(\cot x)}{dx} = \csc^2 x$$

Más adelante utilizaremos las reglas de derivación que hemos deducido en esta sección para derivar funciones trigonométricas.

Por ahora solamente es importante que sepas que existen.

Hay otras funciones que se llaman trigonométricas inversas.

Por ejemplo $y = \arcsin x$ es la función inversa de $y = \sin$. Algunas veces se escribe también como $y = \sin^{-1} x$ para enfatizar que se trata de la función inversa de la función seno.

Es importante hacer notar que el super-índice -1 no es un exponente, sino un índice para aclarar que se trata de la función inversa. Es decir:

$$\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x} \qquad \text{sino} \qquad \sin^{-1} x = \arcsin x$$

En palabras, $\arcsin x$ es la medida del ángulo (en radianes) en el intervalo de $(-\pi/2, \pi/2)$ cuyo seno es x.

Por ejemplo, el seno de $\pi/4$ radianes es $\sqrt{2}/2$. Entonces, $\arcsin(\sqrt{2}/2) = \pi/4$.

De manera semejante se definen las otras funciones trigonométricas inversas: $\arccos x$, $\arctan x$, $\text{arccot}\, x$, $\text{arcsec}\, x$ y $\text{arccsc}\, x$.

Las reglas para derivar las funciones trigonométricas inversas se dan enseguida sin demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\arcsin x)}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
\frac{d(\arccos x)}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
\frac{d(\arctan x)}{dx} &= \frac{1}{1+x^2}\\
\frac{d(\text{arccsc}\, x)}{dx} &= -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\\
\frac{d(\text{arcsec}\, x)}{dx} &= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\\
\frac{d(\text{arccot}\, x)}{dx} &= -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

20.1.7 Derivadas de funciones exponenciales y logaritmicas

Ahora tenemos que deducir las reglas para derivar las funciones exponenciales y las logaritmicas. Empezamos con la función $y = \log_a x$

Deduce la regla para calcular la derivada de la función:

$$y = \log_a x$$

Ejemplo 1

- Empezamos considerando el cociente de incementos:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot\left(\log_a(x+\Delta x) - \log_a x\right)$$

- Por las propiedades de los logaritmos podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{\Delta x}\right) &= \frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{\Delta x}\right)\\
&= \frac{1}{x}\cdot\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}
\end{aligned}$$

- Por definición del número e, ya sabemos que el límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = e$$

porque cuando Δx tiende a cero, el cociente $x/\Delta x$ tiende a infinito, mientras que el cociente $\Delta x/x$ tiende a cero.

- Y por definición de derivada, tenemos que calcular el límite:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\cdot\left(\log_a(x+\Delta x)-\log_a x\right)\right)\\
&= \frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right)\\
&= \frac{1}{x}\cdot\log_a\lim_{\Delta x\to 0}(1+u)^{1/u}\\
&= \frac{1}{x}\cdot\log_a e
\end{aligned}$$

- Entonces, la regla de derivación para lafunción $y=\log_a x$, es:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\log_a e$$

Ejemplo 2

Deduce la regla de derivación de la función:

$$y=a^x$$

- En este caso, tenemos que calcular el límite:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}\right)$$

- Pero como la función logaritmica es inversa de la función exponencial, también podemos ver que si $y=a^x$, entonces se sigue que:

$$x=\log_a y$$

- Nosotros ya sabemos cómo derivar esta función.
- Pero observa que en ésta, estamos considerando a x como una función de y.
- Así que tendremos que derivar a x respecto de y:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}\log_a e$$

- Pero nosotros no queríamos calcular esta derivada, sino $\dfrac{dy}{dx}$.
- Para eso se requiere del uso de la regla de la cadena, tema que estudiamos en la siguiente sección.

20.1.8 Regla de la cadena

Hasta aquí hemos derivado funciones que no son compuestas.

El problema surge cuando tenemos una función que es compuesta, por ejemplo, digamos que el precio de la gasolina depende del precio del dólar. A su vez el precio del dólar depende de otro factor, como el precio del euro.

Si D es el precio del dólar y E es el precio del Euro, entonces, $D = f(E)$. A su vez, si G es el precio de la gasolina, tenemos que $G = g(D) = g(f(E))$.

Así que necesitamos una forma de derivar funciones compuestas.

Ejemplo 1

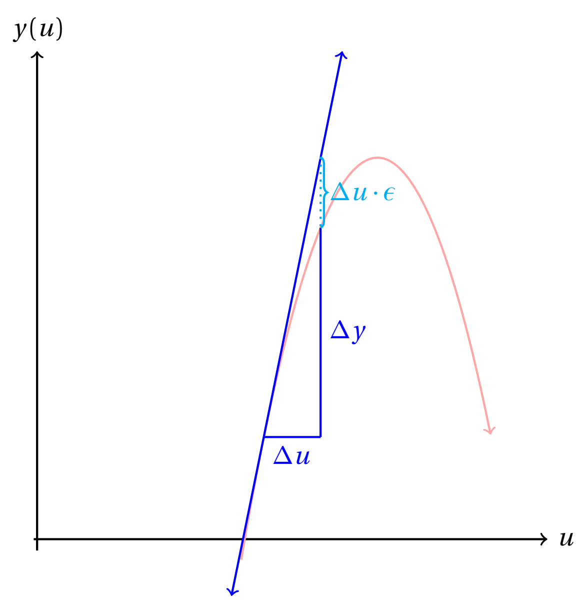
Suponiendo que las funciones $y = f(u)$, y $u = g(x)$ son diferenciables un intervalo abierto I, calcula la derivada de la función compuesta:

$$y = f(g(x))$$

- Como las funciones son diferenciables son suaves.
- Entonces, pequeños incrementos en x ocasionarán pequeños incrementos en u y éste a su vez en y.
- Esto nos permite escribir:

$$\Delta y = \frac{dy}{du} \cdot \Delta u - \Delta u \cdot \epsilon$$

donde ϵ es un número muy pequeño que tiende a cero conforme Δx tiende a cero.



- Entonces,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - \epsilon \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

- Tomando el límite cuando el incremento en x se hace cero, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{dy}{du}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-\epsilon\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\
&= \frac{dy}{du}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)-\lim_{\Delta x\to 0}\left(\epsilon\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\
&= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}-(0)\cdot\frac{du}{dx}\\
&= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

- Esta es la regla de la cadena:

$$\frac{d(f(g(x)))}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

donde se supone que las funciones $y=f(u)$, y $u=g(x)$ son diferenciables.

En palabras, la regla de la cadena nos dice que para derivar una función compuesta:

$$y=f(g(x))$$

debemos primero derivar la función $y=f(u)$ (respecto de u) y después derivar $u=g(x)$ (respecto de x). Al multiplicar estos resultados obtenemos la derivada de y respecto de x.

Ahora podemos aplicar esta regla para deducir completamente la derivada de una función exponencial.

Ejemplo 2

Deduce la regla de derivación de la función:

$$y=a^x$$

- Si $y=a^x$, se sigue que $x=\log_a y$.
- Derivando ambos lados de la igualdad respecto de x obtenemos:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{1}{y}\cdot\log_a e\cdot\frac{dy}{dx}$$

donde hemos aplicado la regla de la cadena, porque $y=a^x$, es una función de x.

- De esta última igualdad podemos fácilmente despejar dy/dx:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\log_a e}=\frac{a^x}{\log_a e}$$

- Utilizando las propiedades de los logaritmos podemos reescribir el resultado como:

$$\frac{dy}{dx}=a^x\log_e a$$

- Para el caso particular en el cual $a=e$, obtenemos:

$$\frac{d(e^x)}{dx}=e^x\ln e=e^x$$

- En palabras, este resultado nos dice que la razón de cambio instantánea de la función $y=e^x$ es igual a la función misma para cada uno de sus puntos.

Gracias a la regla de la cadena podemos derivar funciones compuestas aplicando las demás reglas de derivación que ya hemos deducido antes.

Ejemplo 3

Calcula la derivada de la función:

$$y = (2\,x + 5)^{27}$$

aplicando la regla para derivar una potencia y la regla de la cadena.

- La regla para derivar una potencia es:

$$\frac{d\,(x^n)}{d\,x} = n\,x^{n-1}$$

- En este caso, el argumento de la función es: $u = 2\,x + 5$, cuya derivada es fácil de calcular:

$$\frac{d\,(2\,x+5)}{d\,x} = 2$$

- Ahora podemos hacer el cambio de variable: $u = 2\,x + 5$ y derivamos:

$$y = u^{27} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\,y}{d\,x} = 27\,u^{26} \cdot \frac{d\,(u)}{d\,x}$$

- Y al sustituir $u = 2\,x + 5$ en el resultado junto con su derivada, obtenemos:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 27(2\,x+5)^{26} \cdot (2) = 54(2\,x+5)^{26}$$

- Y terminamos.
- Observa que multiplicamos (2)(27) para obtener 54 como coeficiente.
- El 2 salió de derivar el argumento de la función que deseabamos derivar.

A partir de los ejemplos anteriores, vemos que debemos aplicar la regla de la cadena a todas las reglas de derivación que conocemos.

El siguiente resumen de fórmulas contiene todas las reglas de derivación que conocemos hasta ahora.

✓ $\dfrac{d\,(u+v)}{d\,x} = \dfrac{d\,u}{d\,x} + \dfrac{d\,v}{d\,x}$

✓ $\dfrac{d\,(u \cdot v)}{d\,x} = u \cdot \dfrac{d\,v}{d\,x} + v \cdot \dfrac{d\,u}{d\,x}$

✓ $\dfrac{d\left(\dfrac{u}{v}\right)}{d\,x} = \dfrac{v \cdot \dfrac{d\,u}{d\,x} - u \cdot \dfrac{d\,v}{d\,x}}{v^2}$

✓ $\dfrac{d\,(u^n)}{d\,x} = n\,u^{n-1}\dfrac{d\,u}{d\,x}$

✓ $\dfrac{d\,(\sin u)}{d\,x} = \cos u\,\dfrac{d\,u}{d\,x}$

✓ $\dfrac{d\,(\cos u)}{d\,x} = -\sin u\,\dfrac{d\,u}{d\,x}$

✓ $\dfrac{d\,(\tan u)}{d\,x} = \sec^2 u\,\dfrac{d\,u}{d\,x}$

✓ $\dfrac{d\,(\sec u)}{d\,x} = \sec u \tan u\,\dfrac{d\,u}{d\,x}$

✓ $\dfrac{d\,(\csc u)}{d\,x} = -\csc u \cot u\,\dfrac{d\,u}{d\,x}$

✓ $\dfrac{d\,(\cot u)}{d\,x} = \csc^2 u\,\dfrac{d\,u}{d\,x}$

✓ $\dfrac{d(\arcsin u)}{d\,u} = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\dfrac{d\,u}{d\,x}$

✓ $\dfrac{d(\arccos u)}{du} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

✓ $\dfrac{d(\arctan u)}{du} = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

✓ $\dfrac{d(\text{arccsc}\, u)}{du} = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

✓ $\dfrac{d(\text{arcsec}\, u)}{du} = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

✓ $\dfrac{d(\text{arccot}\, u)}{du} = -\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

✓ $\dfrac{d\left(\log_a u\right)}{dx} = \dfrac{\log_a e}{u}\dfrac{du}{dx}$

✓ $\dfrac{d(\ln u)}{dx} = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

✓ $\dfrac{d(a^u)}{dx} = a^u \ln a \dfrac{du}{dx}$

✓ $\dfrac{d(e^u)}{dx} = e^u \dfrac{du}{dx}$

A partir de aquí, utilizaremos el *formulario* para derivar funciones de una manera más rápida y sencilla.

Ejemplo 4

Calcula la derivada de la siguiente función:

$$y = \sin(2x) + \cos(3x + \pi)$$

- Ya sabemos que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de sus derivadas.
- Así que nos conviene definir: $f(x) = \sin(2x)$, y $g(x) = \cos(3x + \pi)$.
- Usando $u = 2x$ y $v = 3x$ es fácil deducir que

$$\frac{du}{dx} = 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{dv}{dx} = 3$$

- Sustituyendo esto en la regla de la cadena aplicada a la derivada de y respecto de x, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d(\sin(u))}{dx} + \frac{d(\cos(v))}{dx} \\
&= \cos(u)\frac{du}{dx} - \sin(v)\frac{dv}{dx} \\
&= \cos(2x)(2) - \sin(3x + \pi)(3) \\
&= 2\cos(2x) - 3\sin(3x + \pi)
\end{aligned}$$

- Y terminamos.

Ejemplo 5

Calcula la derivada de la función:

$$y = e^{x^2}$$

- Definiendo: $u = x^2$, es fácil ver que

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

- Sustituyendo esto en la regla de derivación correspondiente, obtenemos:

$$\frac{d\left(e^{x^2}\right)}{dx} = \frac{d(e^u)}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

- Al realizar las operaciones indicadas, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{d\left(e^{x^2}\right)}{dx} &= e^u \cdot \frac{du}{dx}\\ &= e^{x^2}\cdot(2x)\\ &= 2xe^{x^2}\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\frac{d\left(e^{x^2}\right)}{dx} = 2xe^{x^2}$$

Calcula la derivada de la función:

$$y = x \cdot \tan(2x)$$

Ejemplo 6

- Para derivar esta función tenemos que aplicar:
  - ✓ Regla del producto,
  - ✓ Regla de la cadena
- Definimos: $f(x) = x$, y $g(x) = \tan(2x)$.
- La derivada de $f(x)$ es inmediata: $f'(x) = 1$.
- Por otra parte, la derivada de $g(x)$ requiere la aplicación de las reglas de la cadena y para derivar la tangente:

$$\frac{d(\tan(u))}{dx} = \sec^2 u \, \frac{du}{dx}$$

donde $u = 2x$, por lo que: $u' = 2$.

- Sustituyendo estos valores en la derivada de $g(x)$ obtenemos:

$$g'(x) = \frac{d(\tan(u))}{dx} = 2\sec^2(2x)$$

- Ahora podemos sustituir

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1\\ g(x) = \tan(2x) & g'(x) = 2\sec^2(2x)\end{array}$$

en la regla para derivar el producto de dos funciones:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)\\ &= (x)\cdot\left[2\sec^2(2x)\right] + [\tan(2x)]\cdot(1)\\ &= 2x\sec^2(2x) + \tan(2x)\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\frac{d(x\cdot\tan(2x))}{dx} = 2x\sec^2(2x) + \tan(2x)$$

Ejemplo 7

Calcula la derivada de la función:

$$y = \frac{\sec(x^2+1)}{x^2+1}$$

- Definiendo: $u = x^2+1$, podemos reescribir la función como:

$$y = \frac{\sec u}{u}$$

- Es fácil deducir que

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

- Ahora tenemos que aplicar la derivada de un cociente:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{u \cdot \frac{d(\sec u)}{dx} - (\sec u) \cdot \frac{du}{dx}}{u^2} \\
&= \frac{(u) \cdot \left(\sec u \tan u \frac{du}{dx}\right) - \sec u \cdot \frac{du}{dx}}{u^2} \\
&= \frac{\left(x^2+1\right) \cdot \sec\left(x^2+1\right) \tan\left(x^2+1\right)(2x) - \sec\left(x^2+1\right)(2x)}{(x^2+1)} \\
&= \frac{(2x)\left[\left(x^2+1\right) \sec\left(x^2+1\right) \tan\left(x^2+1\right) - \sec\left(x^2+1\right)\right]}{(x^2+1)}
\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec(x^2+1)}{x^2+1}\right) = \frac{(2x)\left[\left(x^2+1\right) \sec\left(x^2+1\right) \tan\left(x^2+1\right) - \sec\left(x^2+1\right)\right]}{(x^2+1)}$$

Un fabricante de computadoras ha encontrado que el costo de producción $C(x)$ de x laptops está dado por:

$$C(x) = (7\,x + 12)^2 + 12\,500$$

Calcula costo marginal de producción de laptops para esa compañía.

Ejemplo 8

- El costo marginal de producción se define como la derivada del costo de producción.
- En este caso la función de costo es compuesta, así que tendremos que aplicar la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,(C(x))}{d\,x} &= \frac{d\left((7\,x+12)^2\right)}{d\,x} + \frac{d\,(12\,500)}{d\,x} \\
&= 2\cdot(7\,x+12)(7) \\
&= 14\cdot(7\,x+12) \\
&= 98\,x+168
\end{aligned}$$

- Entonces el costo marginal de producción es de: $C'(x) = 98\,x + 168$.
- El costo marginal de producción nos indica cuánto cuesta producir una computadora más. ¿Puedes explicar por qué?

Calcula la derivada para cada una de las siguientes funciones. Puedes utilizar el formulario dado en la página 873. Recuerda aplicar la regla de la cadena en las funciones compuestas.

Ejercicios 20.1

1) $y = 5\,e^{2x}$.
2) $y = 6\,e^{3x}$.
3) $y = 2\,e^{9x}$.
4) $y = 4\,\ln(2\,x)$.
5) $y = 10\,\ln(9\,x)$.
6) $y = 9\,e^{5x}$.
7) $y = 10\,\ln(10\,x)$.
8) $y = 8\,\ln(10\,x)$.
9) $y = 9\,e^{8x}$.
10) $y = 7\,\ln(10\,x)$.
11) $y = 8\,e^{9x}$.
12) $y = 3\,e^{10x}$.
13) $y = 10\,e^{2x}$.
14) $y = 3\,e^{9x}$.
15) $y = 8\,e^{7x}$.
16) $y = 2\,e^{8x}$.
17) $y = 2\,e^{9x}$.
18) $y = 4\,\ln(9\,x)$.
19) $y = 5\,\ln(4\,x)$.
20) $y = 7\,e^{3x}$.
21) $y = 4\cos(6\,x)$.
22) $y = 2\,\tan(3\,x)$.
23) $y = 6\,\tan(4\,x)$.
24) $y = 3\cos(7\,x)$.
25) $y = 7\sin(7\,x)$.
26) $y = 9\cos(9\,x)$.
27) $y = 3\sin(6\,x)$.
28) $y = 2\cos(3\,x)$.
29) $y = 2\,\tan(5\,x)$.
30) $y = 5\cos(9\,x)$.
31) $y = 4\cos(7\,x)$.
32) $y = 3\sin(8\,x)$.
33) $y = 2\cos(10\,x)$.

34) $y = 8\sin(6x)$.

35) $y = 3\tan(2x)$.

36) $y = 5\cos(3x)$.

37) $y = 8\sin(2x)$.

38) $y = 5\tan(10x)$.

39) $y = 10\tan(8x)$.

40) $y = 9\cos(5x)$.

41) $y = 7\sin(5x)$.

42) $y = 2\cos(9x)$.

43) $y = 6\cos(2x)$.

44) $y = 4\sin(7x)$.

45) $y = \left(8e^{8x}\right)(9\sin(9x))$.

46) $y = (4\ln(2x))\left(8e^{10x}\right)$.

47) $y = (10\sin(10x))(8\ln(7x))$.

48) $y = \left(5e^{10x}\right)\left(3e^{5x}\right)$.

49) $y = (2\tan(5x))(9\tan(7x))$.

50) $y = (10\ln(4x))\left(10e^{5x}\right)$.

51) $y = \left(6e^{4x}\right)\left(5e^{9x}\right)$.

52) $y = (7\ln(8x))(2\cos(4x))$.

53) $y = (9\ln(4x))(9\cos(7x))$.

54) $y = (3\ln(3x))\left(6e^{3x}\right)$.

55) $y = \left(2e^{2x}\right)(6\ln(3x))$.

56) $y = (10\ln(7x))(8\ln(8x))$.

57) $y = (6\sin(6x))(2\sin(9x))$.

58) $y = (10\ln(10x))\left(2e^{2x}\right)$.

59) $y = \left(4e^{9x}\right)\left(10e^{8x}\right)$.

60) $y = \left(3e^{2x}\right)(2\ln(6x))$.

61) $y = (10\tan(9x))(7\tan(9x))$.

62) $y = (3\tan(10x))(8\ln(7x))$.

63) $y = (10\sin(2x))(4\ln(9x))$.

64) $y = (8\tan(5x))\left(6e^{8x}\right)$.

65) $y = (4\ln(10x))(2\cos(2x))$.

66) $y = (10\ln(4x))(6\tan(8x))$.

67) $y = \left(6e^{8x}\right)(8\ln(10x))$.

68) $y = (6\sin(8x))\left(8e^{7x}\right)$.

69) $y = \dfrac{6\ln(2x)}{4e^{9x}}$.

70) $y = \dfrac{6\ln(5x)}{5e^{10x}}$.

71) $y = \dfrac{9\sin(10x)}{4e^{4x}}$.

72) $y = \dfrac{4\tan(6x)}{8\ln(5x)}$.

73) $y = \dfrac{10\sin(4x)}{8e^{8x}}$.

74) $y = \dfrac{5\ln(7x)}{9e^{5x}}$.

75) $y = \dfrac{8e^{4x}}{5\ln(7x)}$.

76) $y = \dfrac{5\tan(4x)}{3\cos(9x)}$.

77) $y = \dfrac{7\sin(5x)}{2\ln(2x)}$.

78) $y = \dfrac{9\ln(8x)}{5\sin(8x)}$.

79) $y = \dfrac{2\sin(7x)}{6\sin(8x)}$.

80) $y = \dfrac{9\ln(3x)}{3e^{4x}}$.

81) $y = \dfrac{2\ln(6x)}{4\tan(2x)}$.

82) $y = \dfrac{9\ln(2x)}{5\ln(10x)}$.

83) $y = \dfrac{7e^{4x}}{3\ln(7x)}$.

84) $y = \dfrac{7\ln(4x)}{6e^{8x}}$.

85) $y = \dfrac{4\sin(3x)}{7\ln(7x)}$.

86) $y = \dfrac{2\cos(6x)}{3\ln(3x)}$.

87) $y = \dfrac{10\tan(8x)}{5\sin(2x)}$.

88) $y = \dfrac{2\,e^{7x}}{3\,e^{8x}}$.

89) $y = \dfrac{10\,\tan(5x)}{10\,e^{4x}}$.

90) $y = \dfrac{5\,\ln(4x)}{6\cos(9x)}$.

91) $y = \dfrac{7\,\ln(4x)}{7\cos(6x)}$.

92) $y = \dfrac{2\,e^{6x}}{4\,\ln(2x)}$.

93) $y = \dfrac{6\,\tan(7x)}{5\,\ln(3x)}$.

94) $y = \dfrac{10\,\ln(9x)}{4\,\ln(4x)}$.

95) $y = \dfrac{8\,\ln(7x)}{2\,e^{2x}}$.

96) $y = \dfrac{10\cos(9x)}{7\,\ln(10x)}$.

97) $y = \dfrac{5\,\ln(10x)}{10\,\tan(8x)}$.

98) $y = \dfrac{7\,\ln(10x)}{10\cos(3x)}$.

99) $y = \dfrac{7\,e^{5x}}{2\,\ln(3x)}$.

100) $y = \dfrac{8\,\ln(2x)}{2\,e^{9x}}$.

101) $y = \dfrac{4\,\ln(9x)}{6\,\ln(6x)}$.

102) $y = \dfrac{7\,e^{6x}}{9\,\ln(8x)}$.

103) $y = \dfrac{7\,e^{4x}}{4\,\ln(2x)}$.

104) $y = \dfrac{3\,\ln(6x)}{9\,\ln(10x)}$.

105) $y = \dfrac{2\,\ln(3x)}{5\,\ln(2x)}$.

106) $y = \dfrac{8\cos(5x)}{10\,e^{7x}}$.

107) $y = \dfrac{3\sin(3x)}{9\,\ln(4x)}$.

108) $y = \dfrac{7\sin(6x)}{3\,\tan(6x)}$.

109) $y = \dfrac{7\,\ln(2x)}{9\sin(9x)}$.

110) $y = \dfrac{10\cos(7x)}{4\,\ln(3x)}$.

111) $y = \dfrac{9\,\ln(9x)}{3\,\ln(8x)}$.

112) $y = \dfrac{7\,\ln(7x)}{7\sin(4x)}$.

113) $y = \dfrac{5\,\tan(5x)}{2\cos(8x)}$.

114) $y = 2 + x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 1$

115) $y = x - x^2 + x^3 + 12\,x^4$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 1 - 2\,x + 3\,x^2 + 48\,x$

116) $y = 12 + 3\,x - 5\,x^2$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 3 - 10\,x$

117) $y = 3\,x + 5\,x^3 - 7\,x^5$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 3 + 15\,x^2 - 35\,x^6$

118) $y = 6\,x^3 + 24\,x^5 + 4\,x^7$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 18\,x^2 + 120\,x^4 + 28\,x^6$

119) $y = x^{12} - (2\,x - 1)^{13}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 12\,x^{11} - 26\,x - 13$

120) $y = (3\,x + 5)^5$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 15(3\,x + 5)^4$

121) $y=(1-2x)^7$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-14(1-2x)^6$

122) $y=(2x-5)^2-(3x+7)^5$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=8x-20-15(3x+7)^4$

123) $y=(ax^2+bx+c)^m$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=m\cdot(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{m-1}$

124) $y=\sqrt{2x+1}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

125) $y=\sqrt{8x-4}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}}$

126) $y=x\cdot\sqrt{x+1}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

127) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2-x}{x^2}$

128) $y=x^2\cdot\sqrt{x^2-1}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^3-2x}{\sqrt{x^2-1}}$

129) $y=\sin(7x)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=7\cos(7x)$

130) $y=-\cos(x^2+1)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=2x\sin(x^2+1)$

131) $y=\tan(\pi-x)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\sec^2(\pi-x)$

132) $y=\sec x-\csc(x^2)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\sec x\tan x+2x\left[\csc(x^2)\cot(x^2)\right]$

133) $y=\cos(x^3-1)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-3x^2\sin(x^3-1)$

134) $y=\tan(mx+b)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=m\sec^2(mx+b)$

135) $y=\cos(e^{-x})$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right)$

136) $y=\sin([3x+2]^3)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=9(3x+2)^2\cos([3x+2]^3)$

137) $y=\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}\sec^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

138) $y=\sin\sqrt{2x^2-x^3}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x-3x^2}{2\sqrt{2x^2-x^3}}\cdot\cos\sqrt{2x^2-x^3}$

139) $y=\csc\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{x^3}\csc\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\cot\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

140) $y=\cos(\sin x)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\cos(x)\cdot\sin(\sin x)$

141) $y=\sin(\cos(2x))$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-2\sin(2x)\cos(\cos(2x))$

142) $y = \cot\left(\sin^2 x\right)$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = 2\sin x \cos x \csc^2\left(\sin^2 x\right)$

143) $y = \sin(\tan x + \cot x)$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \left(\sec^2 x + \csc^2 x\right)\cdot\cos(\tan x + \cot x)$

144) $y = 5^{2x+1}$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = 2\cdot 5^{2x+1}\ln 5$

145) $y = 3^{x^2-1}$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = 2x\cdot 3^{x^2-1}\ln 3$

146) $y = \log_7\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = x\ln 7 + \ln 7$

147) $y = e^{\sin(2x)}$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = 2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$

148) $y = \ln(\sin x) + e^{\cos x}$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \cot x - \sin x\cdot e^{\cos x}$

149) $y = \sin\left(e^{x^2}\right)$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = -2xe^{x^2}\cos\left(e^{x^2}\right)$

150) $y = \sin(x^2)\cdot\cos(e^x)$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = e^x\sin(x^2)\sin(e^x) - 2x\cos(x^2)\cos(e^x)$

151) $y = \dfrac{e^{x-1}}{\sin(2x)}$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin(2x)e^{x-1} + 2x\cos(2x)e^{x-1}}{\sin^2(2x)}$

152) $y = \ln(\sec(x^2))$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = 2x\tan\left(x^2\right)$

153) $y = \sec\left(e^{x^2}\right)$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}\sec\left(e^{x^2}\right)\tan\left(e^{x^2}\right)$

154) $y = \exp\left(\sqrt{x}\right)$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\exp\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$

155) $y = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{x^4-1}$

156) $y = \exp\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}\cdot\exp\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

157) $y = \ln(\sin x) - \ln(\cos x)$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \sec x\csc x$

158) $y = \exp(\tan x)$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x\cdot\exp(\tan x)$

159) $y = \dfrac{e^{2x}}{\ln(x^2+1)}$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x}\cdot\left(2\ln\left(x^2+1\right) - \dfrac{2x}{x^2+1}\right)}{\ln^2(x^2+1)}$

160) **Reto:** Pensé una función. Cuando la derivé me dió la misma función. ¿Qué función pensé? $\quad y = e^x$

161) **Reto:** Pensé una función. Cuando la derivé obtuve el negativo de la función inicial. ¿Qué función pensé? $\quad y = e^{-x}$

162) **Reto:** Pensé una función. La derivé. Al resultado lo volví a derivar y obtuve la función inicial. ¿Qué función pensé? $y = e^{-x}$

163) **Reto:** Pensé una función. La derivé. Al resultado lo volví a derivar y obtuve el negativo de la función inicial. ¿Qué función pensé? $y = \sin x, \; y = \cos x$

Capítulo 21

Valores máximos y mínimos y sus aplicaciones

Por aprender...

21.1. Aplicaciones de la primera derivada

- 21.1.1. Cálculo de valores máximos y mínimos con el criterio de la primera derivada
- 21.1.2. Derivadas de orden superior
- 21.1.3. Cálculo de valores máximos y mínimos con el criterio de la segunda derivada
- 21.1.4. Funciones crecientes y decrecientes

21.2. Concavidad

- 21.2.1. Criterio de la segunda derivada
- 21.2.2. Puntos de inflexión
- 21.2.3. Trazado de curvas

21.3. Aplicaciones de la derivada

- 21.3.1. Problemas prácticos de máximos y mínimos
- 21.3.2. Aplicaciones en las ciencias naturales económico-administrativas y sociales

Por qué es importante...

En la práctica siempre tenemos el interés de realizar procesos minimizando costo, tiempo, etc., o maximizando la utilidad, el beneficio, etc. En este capítulo usaremos la derivada para resolver ese tipo de problemas.

21.1 Aplicaciones de la primera derivada

Ahora vamos a utilizar las derivadas para resolver problemas de optimización.

Frecuentmente nos encontramos con la necesidad de optimizar funciones para resolver problemas.

Por ejemplo, para construir una granja rectangular utilizando el mínimo de cerca, necesitamos expresar el perímetro de la granja como una función y encontrar su mínimo. O igual, puede ser que tengamos una cantidad de cerca y deseemos construir la granja que tenga a mayor superficie.

En ambos casos necesitamos optimizar (minimizar o maximizar) una cantidad en función de otra.

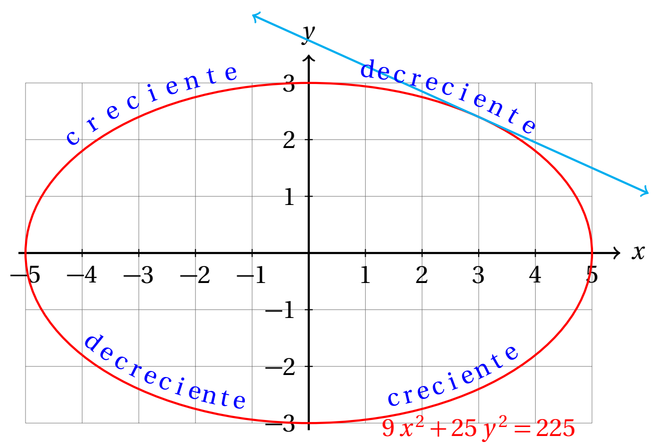
21.1.1 Máximos y mínimos

La cuestión que nos ocupa ahora es calcular el máximo o el mínimo de una función.

Nosotros sabemos que la derivada nos dice cómo se comporta localmente una función, es decir, su está creciendo o decreciendo.

Cuando la derivada de la función en un punto es positiva, la función está creciendo en ese punto, y cuando la derivada es negativa, está decreciendo.

En la elipse que utilizamos para resolver el problema de la página **??** se muestran una recta tangente a la elipse en el punto $P(3, 2.4)$.



En este caso la pendiente es negativa. De esto nos podemos dar cuenta de la ecuación de la recta tangente, porque está en su forma *pendiente-ordenada al origen*:

$$y = -\frac{9}{20}x + \frac{15}{4}$$

En este caso la pendiente de la recta es: $m = -9/20$.

Por la simetría de la elipse, si evaluamos la derivada de su ecuación en el punto $P(-3, 2.4)$, obtenemos:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-3,y=2.4} = -\frac{9x}{25y} = \frac{9(-3)}{25(2.4)} = \frac{9}{20}$$

El mismo valor, pero con signo contrario.

En este caso y crece con respecto a x.

en el punto $M(0,3)$, la elipse tiene un máximo. En ese punto la derivada de la función es igual a cero:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0,y=3} = -\frac{9x}{25y} = \frac{9(0)}{25(2.4)} = 0$$

Observa que un poco antes del punto M, dado que la función es creciente en el intervalo $(-5,0)$ la derivada de la función es positiva. Por otra parte, un poco después del punto M, la derivada es netgativa, porque la función es decreciente en el intervalo $(0,5)$.

Esa es la forma que debemos esperar de una función que tiene un máximo en un punto $M(x_M, y_M)$: poco antes la función es creciente y poco después es decreciente. Así, $f(x_m)$ será mayor para todos los valores de x en la cercanía de x_M.

Definición 1

MÁXIMO LOCAL
Sea $y = f(x)$ una función definida en el intervalo (a,b). Si existe un valor x_M que cumple:

$$f(x_M) \geq f(x) \text{ para toda } x \in (a,b)$$

Entonces, decimos que x_M es el máximo local de la función en el intervalo (a,b).

Ejemplo 1

Calcula el máximo local de la función:

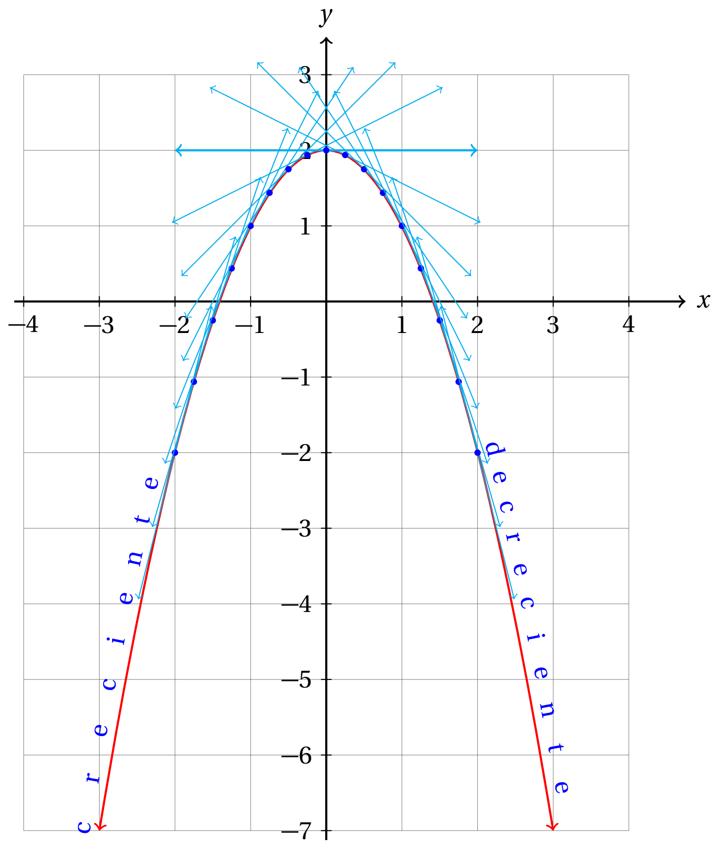
$$y = 2 - x^2$$

en el intervalo $(-2,2)$.

- Empezamos derivando la función para saber cómo se comportan las pendientes:

$$\frac{dy}{dx} = -2x$$

- Para valores de $x < 0$, la derivada es positiva, es decir, la función es creciente para $x < 0$.
- Para valores de x positivos, la pendiente de la recta tangente es negativa, por lo que para $x > 0$ la función decrece.
- La derivada de a función se hace cero cuando $x = 0$.
- En este punto la función deja de crecer y a partir de ahí empieza a decrecer.
- Es decir, el máximo de la función se encuentra en ese punto.
- La gráfica de la función nos da esa misma información:



- Observa que la recta tangente a la función en el punto $M(0,2)$ es horizontal.

- Esto se debe a que la función en ese punto deja de crecer y empieza a decrecer.

- En otras palabras, la derivada de la función cambia de signo en ese punto.

Cuando la derivada de una función se hace cero, la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto es horizontal, pues su pendiente vale cero.

Ejemplo 2

Calcula los máximos y mínimos locales de la función:

$$y = x^3 + x^2 - 6x$$

- La derivada de la función es:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 6$$

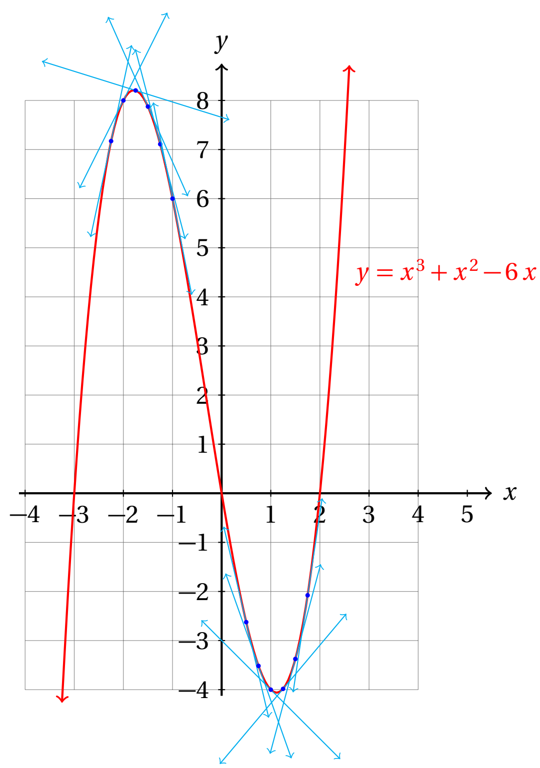
- Debemos encontrar los puntos en los cuales la derivada se hace cero:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\ &= \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(3)(-6)}}{2(3)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-(-72)}}{6} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \end{aligned}$$

- Entonces, los puntos donde la derivada de la función se hacen cero son:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{19}}{3} \approx 1.1196 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3} \approx -1.7863$$

- La siguiente gráfica muestra la función y algunas rectas tangentes:



- De la gráfica se hace evidente que en el intervalo $(-\infty, -1.7863)$ la función es creciente.
- En el intervalo $(-1.7863, 1.1196)$, la función es decreciente.
- Y en el intervalo $(1.1196, \infty)$ la función es creciente.
- Observa cómo la pendiente de las rectas tangentes a la función cambian de signo después de pasar por un máximo o por un mínimo.

- Precisamente cuando la pendiente de la recta tangente se hace cero tenemos un máximo o un mínimo de la función.

A partir del ejemplo anterio podemos fácilmente concluir que cuando la derivada de una función es cero, tenemos un máximo un mínimo, pero existe un caso especial.

Ejemplo 3

Calcula los máximos y mínimos de la siguiente función:

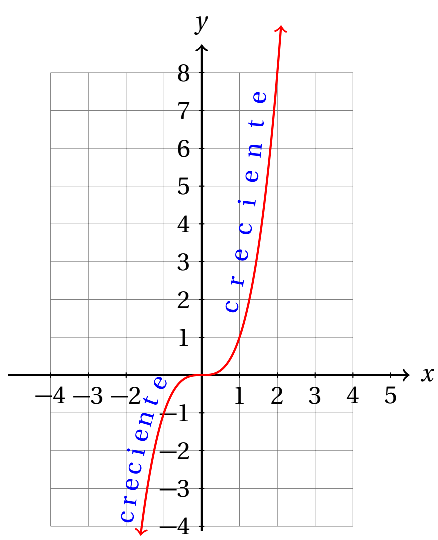
$$y = x^3$$

- La derivada de esta función es:

$$\frac{dy}{dx} = 3\,x^2$$

- La derivada se hace cero en $x = 0$.

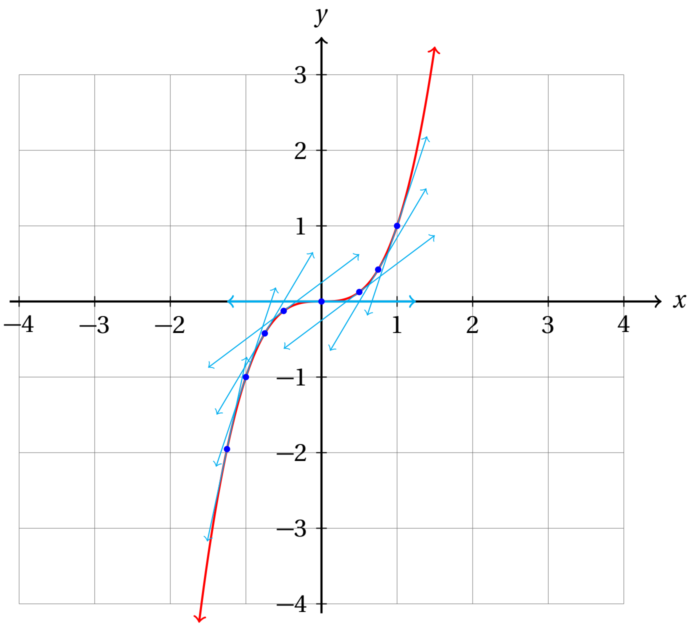
- Pero en $(0,0)$ la función ni tiene máximo, ni tiene mínimo:



- Observa que a pesar de que la derivada de la función se hace cero en el origen, la función no tiene un máximo ni un mínimo.

- Esto es así porque la función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y también es creciente en $(0, \infty)$.

- En otras palabras, la derivada de la función no cambia de signo.



- En el origen, la pendiente de la recta tangente es cero.
- Por eso, la recta tangente a la curva es horizontal.
- Pero las pendientes de las demás rectas tangentes siempre son positivas.
- La función crece antes del origen, deja de crecer en el origen y vuelve a crecer después de él.

Definición 2

PUNTOS CRÍTICOS

Un punto crítico de la función $y = f(x)$ es el punto c para el cual $f'(c) = 0$, o $f'(c)$ no existe.

Por los ejemplos anteriores hemos observado que en un máximo y en un mínimo, la derivada de la función se hace cero. Entonces,

Teorema 1

Si la función $y = f(x)$ tiene, bien un máximo, bien un mínimo, en $x = c$, entonces, $f'(c) = 0$. Es decir, $x = c$ es un punto crítico de la función.

Debes notar, que algunos puntos críticos de una función no son ni máximos ni mínimos de la misma.

La función que estudiamos en el ejemplo anterior $y = x^3$ tiene un punto crítico en $x = 0$, sin embargo, ese punto no es ni máximo ni mínimo de la función.

Otro caso particular de los puntos críticos se presenta cuando $f'(c)$ no está definida para algún valor c en el dominio de la función.

Ejemplo 4

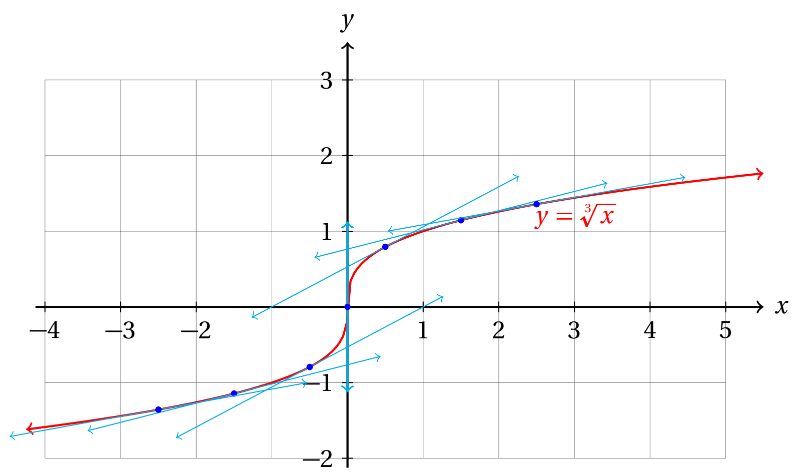
Calcula los máximos y mínimos de la función:

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

- La derivada de la función es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\,x^{-2/3} = \frac{1}{3\,x^{2/3}} = \frac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}}$$

- Cuando $x = 0$, la derivada no está definida.
- Entonces, $x = 0$ es un punto crítico de la función.
- Recuerda que las rectas verticales no tienen definida la pendiente.
- Entonces, en $x = 0$ la función tiene por recta tangente una recta vertical:



Observa que en un punto crítico, la función deja de crecer, o crece infinitamente en ese punto.

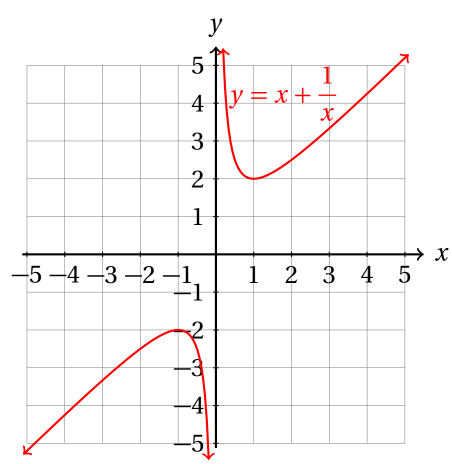
Ejemplo 5

Calcula los puntos críticos de la función:

$$y = x + \frac{1}{x}$$

y determina si son máximos o mínimos.

- Empezamos graficando la función:



- La gráfica sugiere dos puntos críticos: un máximo con x cerca de -1 y un mínimo con $x \approx 1$.

- Ahora derivamos la función:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

- Los puntos críticos representan los puntos donde $f'(x) = 0$.

- Vamos a resolver esa ecuación:

$$\begin{array}{rcccc} 1 - \dfrac{1}{x^2} = 0 & \Rightarrow & 1 = \dfrac{1}{x^2} & & \\ x^2 = 1 & \Rightarrow & x_1 = 1 & \text{y} & x_2 = -1 \end{array}$$

- Entonces, la función tiene dos (+1) puntos críticos.

- Ahora vamos a determinar si se trata de máximos o mínimos o del caso particular.

- Para eso evaluamos la derivada de la función poco antes y poco después para ver cómo cambia el signo:

x	-2.0	-1.0	-0.5	0.5	1.0	2.0
$f(x)$	-2.5	-2.0	-2.5	2.5	2.0	2.5
$f'(x)$	$+0.75$	0.0	-3.0	-3.0	0.0	$+0.75$

- En el punto crítico $x = -1$, el signo de la derivada cambia de $+$ a $-$, por lo que concluimos que se trata de un máximo.

- Por otra parte, en $x = 1$, el signo de la derivada cambia de $-$ a $+$, por lo que debe ser un mínimo.

- Cuando $x = 0$ la derivada no está definida, por lo que ahí la función debe decrecer infinitamente.

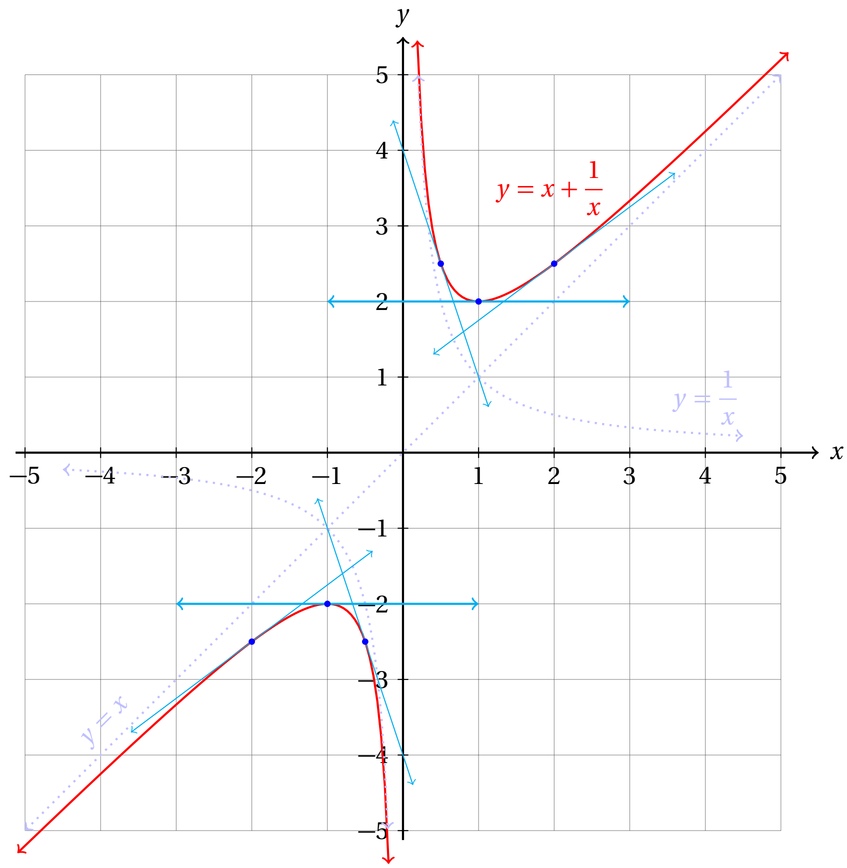
- Observa que cuando x está muy cercano a cero, la derivada tiene signo negativo:

$$\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

- Cuando x es muy grande (positivo o negativo), x es mucho más grande que $1/x$, así que la función se acerca mucho a la recta: $y = x$.

- Por otra parte, cuando x es muy cercano a cero (positivo o negativo), x es muy pequeño comparado con $1/x$, así que entonces la función se parece mucho a la hipérbola $y = 1/x$.

- Todo esto se debe a que la función es una combinación de las funciones $y = x$, y $y = 1/x$.



Algunas funciones no tienen ni un punto crítico. Por ejemplo, las funciones:

$$y = m\,x + b \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\,y}{d\,x} = m \qquad (m \neq 0)$$

$$y = e^{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\,y}{d\,x} = e^{x}$$

En ninguna de ellas podemos resolver la ecuación $f'(x) = 0$.

Por eso no tienen puntos críticos.

Por otra parte, algunas funciones tienen un número infinito de números críticos. por ejemplo,

$$y = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\,y}{d\,x} = \cos x$$

$$y = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\,y}{d\,x} = -\sin x$$

Al ser periódicas, las funciones $y = \sin x$, y $y = \cos x$ tienen un número infinito de números críticos.

Calcula los puntos críticos de la función racional:

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

y determina si son máximos o mínimos.

Ejemplo 6

- Empezamos derivando la función.
- En este caso debemos utilizar la regla para derivar el cociente de dos funciones:

$$\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{v \cdot \frac{d(u)}{dx} - u \cdot \frac{d(v)}{dx}}{v^2}$$

- Definimos:

$$u = x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{dx} = 1$$
$$v = x^2 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} = 2x$$

- Al sustituir en la regla de derivación correspondiente, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\left(x^2+1\right)\cdot(1)-(x)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

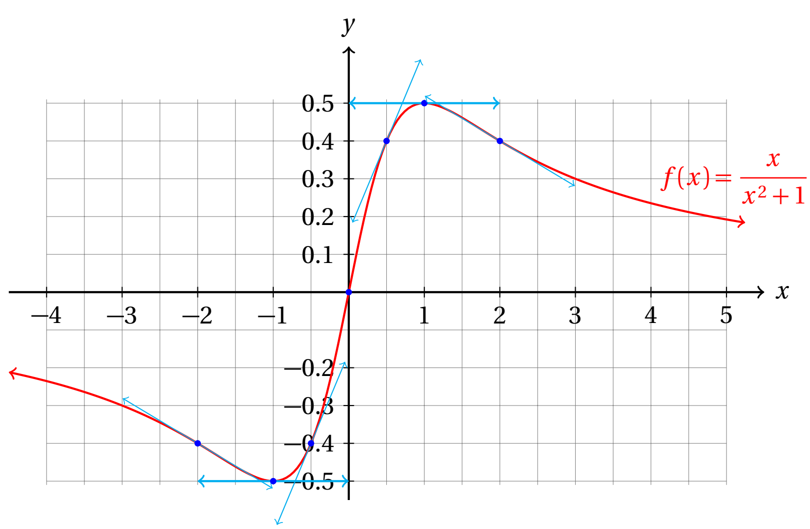
- Para calcular los puntos críticos debemos igualar a cero la derivada y resolver:

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 - x^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1$$

- Ahora conocemos los puntos críticos.
- Vamos a determinar si se trata de máximo o mínimo usando el signo de la derivada.

x	-2.0	-1.0	-0.5	0.5	1.0	2.0
$f(x)$	-0.4	-0.5	-0.4	0.4	0.5	0.4
$f'(x)$	-0.12	0.0	$+0.48$	$+0.48$	0.0	-0.12

- Es fácil ver que la función pasa por el origen de coordenadas.
- La información conocida de esta función se muestra en la gráfica siguiente:



- En el punto crítico $x = -1$ tenemos un mínimo, porque la derivada de la función cambia de signo de $-$ a $+$.
- En $x = 1$ tenemos un máximo, ahí la derivada de la función cambia de $+$ a $-$.
- Se te queda como ejercicio graficar la función.

Calcula los puntos críticos de la función:

$$y = \frac{x^2+1}{x-1}$$

y grafícala.

Ejemplo 7

- De nuevo, aplicamos la regla para derivar el cociente de dos funciones.
- Definimos:

$$\begin{aligned} u = x^2+1 \qquad &\Rightarrow \qquad \frac{du}{dx} = 2x \\ v = x-1 \qquad &\Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} = 1 \end{aligned}$$

- Sustituyendo en la regla de derivación correspondiente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x-1)\cdot(2x) - \left(x^2+1\right)\cdot(1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x+1-2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^2-2}{(x-1)^2} \\ &= 1 - \frac{2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

- Igualamos a cero y resolvemos para calcular los puntos críticos:

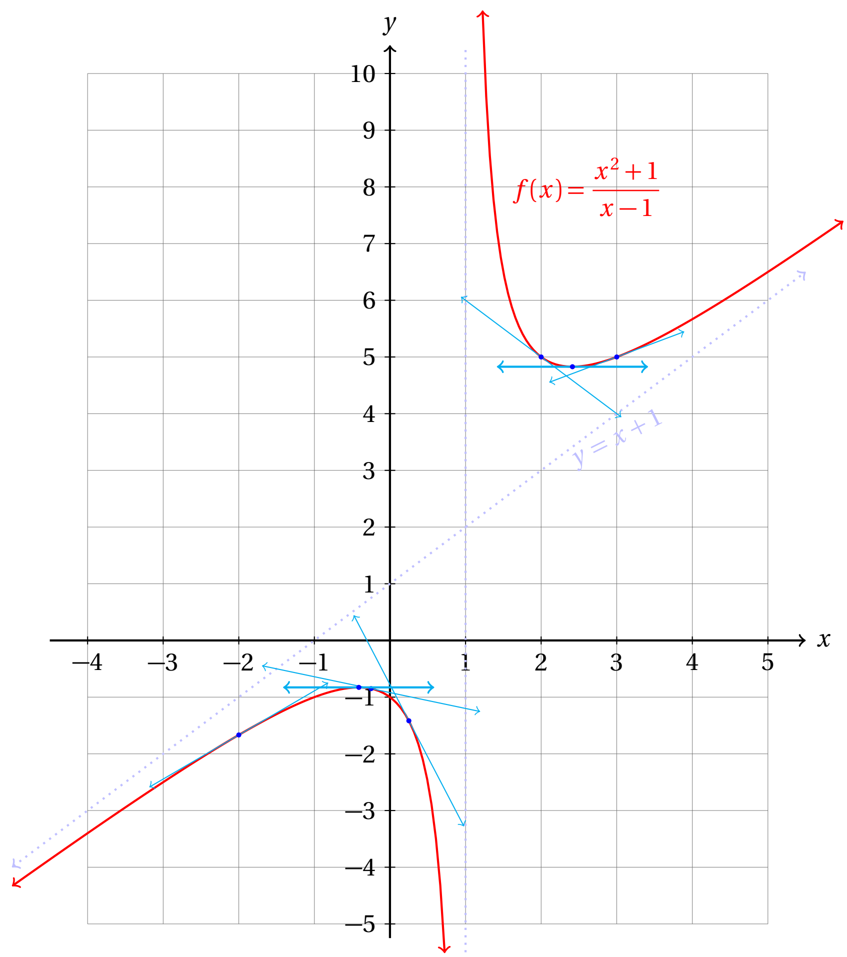
$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{(x-1)^2} &= 0 \\ 1 &= \frac{2}{(x-1)^2} \\ (x-1)^2 &= 2 \\ x-1 &= \pm\sqrt{2} \\ x &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

- Ahora nos vamos a la tabla para ver cómo cambia de signo la derivada alrededor de los puntos críticos.

- Para la tabla conviene más usar: $1-\sqrt{2}\approx -0.4142$, y $1+\sqrt{2}\approx 2.4142$

x	-2.0	-0.4142	-0.25	2.0	2.4142	3.0
$f(x)$	-0.4	-0.828	-0.85	5.0	4.828	5.0
$f'(x)$	$+0.778$	0.0	-0.28	-1.0	0.0	$+0.5$

- En el punto crítico $x=1-\sqrt{2}$ el signo de la derivada cambia de $+$ a $-$, por lo que es un máximo.
- En $x=1+\sqrt{2}$ el signo de la derivada va de $-$ a $+$, por lo que es un mínimo.
- Observa que la derivada no está definida para $x=1$, porque aparece en el denominador.
- Entonces, éste es otro punto crítico de la función.
- De hecho, la recta $x=1$ es una asíntota de la gráfica de la función:



Entonces, para calcular los máximos y mínimos locales de una función:

✓ Derivamos la función.

✓ Resolvemos $f'(x)=0$ para encontrar los puntos críticos ($x=c$) de $y=f(x)$.

✓ Evaluamos la derivada de la función a la izquierda y a la derecha de cada punto crítico.

i. Si $f'(c) > 0$ a la izquierda y $f'(c) < 0$ a la derecha, $x = c$ es un máximo.
ii. Si $f'(c) < 0$ a la izquierda y $f'(c) > 0$ a la derecha, $x = c$ es un mínimo.
iii. Si $f'(c)$ tiene el mismo signo a la izquierda como a laderecha, $x = c$ no es ni máximo ni mínimo.

Ejemplo 8

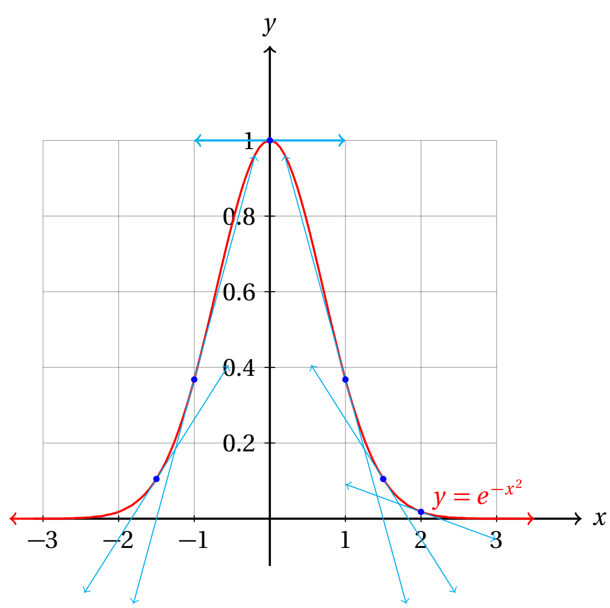
Calcula los puntos críticos de la función:

$$y = e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

- Empezamos calculando la derivada de la función:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x e^{-x^2}$$

- Para que la derivada se haga cero se requiere que $x = 0$.
- Entonces, esta función solamente tiene un punto crítico.
- A la izquierda del punto crítico ($x < 0$), la derivada es positiva y a la derecha ($x > 0$) es negativa.
- Esto nos sugiere que la función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, \infty)$.
- Como el signo de la derivada va de $+$ a $-$, el punto crítico $x = 0$ es un máximo.
- Además, cuando $x = 0$, $y = 1$, porque $e^0 = 1$.
- Enseguida se muestra la gráfica de la función:



Ejercicios 21.1.1 Calcula los máximos y mínimos de las siguientes funciones.

1) $y = 5x^3 - 2x^2 - 8x - 4$ $\quad x_c = -\dfrac{4 \pm \sqrt{496}}{30}$

2) $y = -3x^3 + 11x^2 + 2x - 4$ $\quad x_c = -\dfrac{22 \pm \sqrt{556}}{18}$

3) $y = 2x^3 - 5x^2 - 8x + 5$ $\quad x_c = -\dfrac{10 \pm \sqrt{292}}{12}$

4) $y = -2x^3 - 6x^2 + 3x + 9$ $\quad x_c = 2 \pm \dfrac{\sqrt{216}}{12}$

5) $y = 2x^3 + 10x^2 + 1x - 9$ $\quad x_c = -10 \pm \dfrac{\sqrt{376}}{12}$

6) $y = -5x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ $\quad x_c = \dfrac{6 \pm \sqrt{276}}{30}$

7) $y = -1x^3 + 8x^2 - 4x + 5$ $\quad x_c = 2 \pm \dfrac{\sqrt{208}}{6}$

8) $y = 6x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ $\quad x_c = -\dfrac{6 \pm \sqrt{684}}{36}$

9) $y = 1x^3 - 9x^2 - 5x - 2$ $\quad x_c = -\dfrac{18 \pm \sqrt{384}}{6}$

10) $y = -3x^3 - 7x^2 + 8x - 4$ $\quad x_c = \dfrac{14 \pm \sqrt{484}}{18}$

11) $y = -2x^3 - 10x^2 - 3x + 7$ $\quad x_c = -\dfrac{20 \pm \sqrt{328}}{12}$

12) $y = -4x^3 + 5x^2 - 2x - 9$ $\quad x_c = \dfrac{10 \pm \sqrt{4}}{24}$

13) $y = -1x^3 + 8x^2 - 9x + 9$ $\quad x_c = \dfrac{16 \pm \sqrt{148}}{6}$

14) $y = -2x^3 - 6x^2 - 2x + 4$ $\quad x_c = -3 \pm \dfrac{\sqrt{96}}{12}$

15) $y = -5x^3 + 4x^2 + 9x - 4$ $\quad x_c = -\dfrac{8 \pm \sqrt{604}}{30}$

16) $y = -2x^3 + 10x^2 - 4x - 6$ $\quad x_c = \dfrac{20 \pm \sqrt{304}}{12}$

17) $y = 5x^3 - 2x^2 - 3x - 4$ $\quad x_c = -\dfrac{4 \pm \sqrt{196}}{30}$

18) $y = -3x^3 - 10x^2 - 5x - 11$ $\quad x_c = -2 \pm \dfrac{\sqrt{220}}{18}$

19) $y = 2x^3 - 11x^2 - 8x - 10$ $\quad x_c = -\dfrac{22 \pm \sqrt{676}}{12}$

20) $y = -4\,x^3 - 10\,x^2 - 7\,x - 2$ $x_c = -\dfrac{20 \pm \sqrt{64}}{24}$

21) $y = -2\,x^3 - 9\,x^2 + 5\,x - 2$ $x_c = \dfrac{18 \pm \sqrt{444}}{12}$

22) $y = -1\,x^3 - 9\,x^2 - 2\,x - 8$ $x_c = -\dfrac{18 \pm \sqrt{300}}{6}$

23) $y = -4\,x^3 - 4\,x^2 + 7\,x + 1$ $x_c = \dfrac{8 \pm \sqrt{400}}{24}$

24) $y = -3\,x^3 + 7\,x^2 + 6\,x - 11$ $x_c = -\dfrac{14 \pm \sqrt{412}}{18}$

25) $y = 1\,x^3 + 7\,x^2 + 9\,x + 11$ $x_c = -\dfrac{14 \pm \sqrt{88}}{6}$

26) $y = -2\,x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 10$ $x_c = -\dfrac{12 \pm \sqrt{360}}{12}$

27) $y = -4\,x^3 + 5\,x^2 + 7\,x - 7$ $x_c = -\dfrac{10 \pm \sqrt{436}}{24}$

28) $y = -2\,x^3 - 9\,x^2 - 2\,x - 2$ $x_c = -\dfrac{18 \pm \sqrt{276}}{12}$

29) $y = 4\,x^3 + 5\,x^2 - 4\,x - 6$ $x_c = \dfrac{10 \pm \sqrt{292}}{24}$

30) $y = -2\,x^3 + 10\,x^2 + 3\,x - 4$ $x_c = -\dfrac{20 \pm \sqrt{472}}{12}$

31) $y = -1\,x^3 + 6\,x^2 - 4\,x + 3$ $x_c = \dfrac{12 \pm \sqrt{96}}{6}$

32) $y = -5\,x^3 - 10\,x^2 - 3\,x - 2$ $x_c = -\dfrac{20 \pm \sqrt{220}}{30}$

33) $y = 5\,x^3 - 7\,x^2 - 10\,x + 2$ $x_c = -\dfrac{14 \pm \sqrt{796}}{30}$

34) $y = 2\,x^3 + 6\,x^2 - 11\,x - 4$ $x_c = \dfrac{12 \pm \sqrt{408}}{12}$

35) $y = -1\,x^3 + 10\,x^2 - 5\,x - 10$ $x_c = 2 \pm \dfrac{\sqrt{340}}{6}$

36) $y = -4\,x^3 - 4\,x^2 + 1\,x - 7$ $x_c = 4 \pm \dfrac{\sqrt{112}}{24}$

37) $y = 3\,x^3 - 11\,x^2 - 4\,x - 9$ $x_c = -\dfrac{22 \pm \sqrt{628}}{18}$

38) $y = -4\,x^3 - 10\,x^2 - 8\,x - 8$ $x_c = -\dfrac{20 \pm \sqrt{16}}{24}$

39) $y = 4\,x^3 - 4\,x^2 + 1\,x + 4$ $x_c = 4 \pm \dfrac{\sqrt{16}}{24}$

40) $y = -4\,x^3 + 7\,x^2 - 2\,x + 5$ $\qquad x_c = \dfrac{14 \pm \sqrt{100}}{24}$

41) $y = 2\,x^3 - 8\,x^2 + 4\,x + 3$ $\qquad x_c = 2 \pm \dfrac{\sqrt{160}}{12}$

42) $y = 3\,x^3 - 2\,x^2 - 7\,x + 4$ $\qquad x_c = -\dfrac{4 \pm \sqrt{268}}{18}$

43) $y = -3\,x^3 + 4\,x^2 + 8\,x - 5$ $\qquad x_c = -\dfrac{8 \pm \sqrt{352}}{18}$

44) $y = 2\,x^3 + 8\,x^2 - 6\,x + 4$ $\qquad x_c = \dfrac{16 \pm \sqrt{400}}{12}$

45) $y = -3\,x^3 + 4\,x^2 + 6\,x + 7$ $\qquad x_c = -\dfrac{8 \pm \sqrt{280}}{18}$

46) $y = 4\,x^4 - 4\,x^3 - 5\,x^2 - 11$ $\qquad x_c = \dfrac{12 \pm \sqrt{784}}{32}$

47) $y = -3\,x^4 + 3\,x^3 + 5\,x^2 + 9$ $\qquad x_c = -\dfrac{9 \pm \sqrt{561}}{-24}$

48) $y = 4\,x^4 + 6\,x^3 + 2\,x^2 + 9$ $\qquad x_c = -\dfrac{18 \pm \sqrt{68}}{32}$

49) $y = -4\,x^4 + 4\,x^3 + 10\,x^2 - 1$ $\qquad x_c = -\dfrac{12 \pm \sqrt{1424}}{-32}$

50) $y = 5\,x^4 - 2\,x^3 - 5\,x^2 - 3$ $\qquad x_c = \dfrac{6 \pm \sqrt{836}}{40}$

51) $y = -3\,x^4 - 5\,x^3 + 9\,x^2 - 4$ $\qquad x_c = \dfrac{15 \pm \sqrt{1089}}{-24}$

52) $y = -6\,x^4 + 2\,x^3 + 5\,x^2 + 3$ $\qquad x_c = -\dfrac{6 \pm \sqrt{996}}{-48}$

53) $y = 2\,x^4 - 5\,x^3 - 10\,x^2 + 3$ $\qquad x_c = \dfrac{15 \pm \sqrt{865}}{16}$

54) $y = 1\,x^4 - 5\,x^3 + 5\,x^2 - 8$ $\qquad x_c = \dfrac{15 \pm \sqrt{65}}{8}$

55) $y = -3\,x^4 - 6\,x^3 + 8\,x^2 - 7$ $\qquad x_c = \dfrac{18 \pm \sqrt{1092}}{-24}$

56) $y = -3\,x^4 - 4\,x^3 + 2\,x^2 + 9$ $\qquad x_c = \dfrac{12 \pm \sqrt{336}}{-24}$

57) $y = 4\,x^4 - 6\,x^3 - 2\,x^2 - 5$ $\qquad x_c = \dfrac{18 \pm \sqrt{580}}{32}$

58) $y = 5\,x^4 + 5\,x^3 - 4\,x^2 + 10$ $\qquad x_c = -\dfrac{15 \pm \sqrt{865}}{40}$

59) $y = 4\,x^4 - 5\,x^3 - 4\,x^2 - 10$ $\qquad x_c = \dfrac{15 \pm \sqrt{737}}{32}$

60) $y = -1\,x^4 - 5\,x^3 - 2\,x^2 + 10$ $\quad x_c = \dfrac{15 \pm \sqrt{161}}{-8}$

61) $y = 5\,x^4 + 3\,x^3 - 7\,x^2 - 10$ $\quad x_c = -\dfrac{9 \pm \sqrt{1201}}{40}$

62) $y = -4\,x^4 - 3\,x^3 + 5\,x^2 - 9$ $\quad x_c = \dfrac{9 \pm \sqrt{721}}{-32}$

63) $y = -3\,x^4 + 2\,x^3 + 4\,x^2 + 8$ $\quad x_c = -\dfrac{6 \pm \sqrt{420}}{-24}$

64) $y = -4\,x^4 - 4\,x^3 + 9\,x^2 - 1$ $\quad x_c = \dfrac{12 \pm \sqrt{1296}}{-32}$

65) $y = 5\,x^4 - 5\,x^3 - 3\,x^2 + 10$ $\quad x_c = \dfrac{15 \pm \sqrt{705}}{40}$

66) $y = 2\,x^4 - 3\,x^3 - 3\,x^2 + 2$ $\quad x_c = \dfrac{9 \pm \sqrt{273}}{16}$

67) $y = 3\,x^4 - 3\,x^3 - 4\,x^2 + 2$ $\quad x_c = \dfrac{9 \pm \sqrt{465}}{24}$

68) $y = 5\,x^4 + 2\,x^3 - 7\,x^2 + 11$ $\quad x_c = -\dfrac{6 \pm \sqrt{1156}}{40}$

69) $y = 3\,x^4 - 3\,x^3 - 10\,x^2 + 8$ $\quad x_c = \dfrac{9 \pm \sqrt{1041}}{24}$

70) $y = 3\,x^4 + 5\,x^3 - 11\,x^2 + 7$ $\quad x_c = -\dfrac{15 \pm \sqrt{1281}}{24}$

21.1.2 Derivadas de orden superior

Ya habrás observado que al derivar una función obtenemos otra nueva función.
Por ejemplo, la derivada de la función $y = x^2$ es $y' = 2\,x$.
Observa que y' es otra función, generalmente diferente a y.
Si volvemos a derivar la función, obtenemos la segunda derivada de la función:

$$
\begin{aligned}
\text{Si } y = f(x) \quad &\Rightarrow \quad y' = f'(x) \text{ es la primera derivada de la función,}\\
&\Rightarrow \quad y'' = \frac{d\big(f'(x)\big)}{d\,x} = f''(x) \text{ es la segunda derivada,}\\
&\Rightarrow \quad y''' = \frac{d\big(f''(x)\big)}{d\,x} = f'''(x) \text{ es la tercera derivada,}\\
&\Rightarrow \quad y^{(4)} = \frac{d\big(f'''(x)\big)}{d\,x} = f^{(4)}(x) \text{ es la cuarta derivada, etc.}
\end{aligned}
$$

Derivada de orden superior

Sea $y = f(x)$ una función derivable. La derivada de orden k es la función que se obtiene al derivar (respecto de x) la función k veces consecutivas, y se denota como:

$$\frac{d^k y}{d x^k} = f^{(k)}(x)$$

El número k se conoce como el orden de la derivada.

Definición 1

Ejemplo 1

Calcula la derivada de orden 5 de la siguiente función:

$$y = \cos x$$

- Tenemos que derivar tres veces para obtener la derivada de orden 3.
- Aquí está la primera derivada:
$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$
- La segunda derivada es:
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\cos x$$
- La tercera derivada de la función es:
$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \sin x$$
- La derivada de orden cuatro es:
$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \cos x$$
- Y Finalmente, la derivada de orden cinco es:
$$\frac{d^5 y}{dx^5} = -\sin x$$

Ejemplo 2

Calcula la derivada de orden 3 de la función:

$$y = e^{-x^2}$$

- Para calcular la primera derivada usamos las reglas de derivación de la función exponencial y de la cadena:
$$\frac{dy}{dx} = -2\,x\,e^{-x^2}$$
- Para calcular la segunda derivada tenemos que aplicar, además, la regla del producto.
- Definimos $u = -2\,x$, y $v = e^{-x^2}$. Entonces,

$$\frac{du}{dx} = -2 \qquad \text{y} \qquad \frac{dv}{dx} = -2\,x\,e^{-x^2}$$

- Ahora sustituimos en la regla para derivar el producto de dos funciones:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = 4\,x^2 e^{-x^2} - 2\,e^{-x^2}$$

- La derivada de tercer orden se obtiene derivando de nuevo.
- Para eso, definimos: $u = 4\,x^2$, y $v = e^{-x^2}$, por lo que ahora:

$$\frac{d u}{d x} = -8\,x \qquad \text{y} \qquad \frac{d v}{d x} = -2\,x\,e^{-x^2}$$

- Ahora sustituimos para terminar:

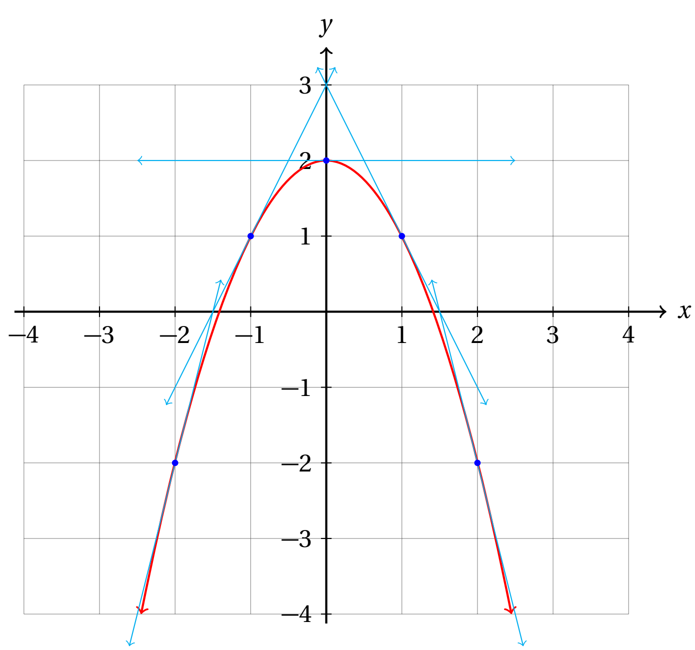
$$\begin{aligned}
\frac{d^3 y}{d x^3} &= \left(4\,x^2\right)\cdot\left(-2\,x\,e^{-x^2}\right) + \left(e^{-x^2}\right)\cdot(-8\,x) + 4\,x\,e^{-x^2}\\
&= -8\,x^3 e^{-x^2} - 8\,x\,e^{-x^2} + 4\,x\,e^{-x^2}\\
&= \left(-8\,x^3 - 8\,x + 4\,x\right)e^{-x^2}
\end{aligned}$$

- Con lo que terminamos.

Ahora haremos un paréntesis para entender qué representa la segunda derivada. Esto, a su vez, nos permitirá entender qué representan las derivadas de orden 3, 4, etc.

Primero debemos recordar que la derivada es una razón de cambio instantánea, es decir, la primera derivada nos dice si la función está creciendo o decreciendo en un punto.

Por ejemplo, en la página 886, estudiamos la parábola $y = 2 - x^2$. Ahí encontramos que la derivada de la función es positiva para valores de x negativos y negativa para valores de x positivos. En otras palabras, la función es creciente a la derecha y decreciente a la izquierda.



Pero observa que la pendiente de las rectas tangentes (es decir, el valor de la derivada de la función evaluada en el punto de tangencia) va disminuyendo cada vez más, porque la primer tangente que se dibujó tiene mayor pendiente que la segunda, y ésta a su vez tiene una pendiente mayor a la siguiente y así sucesivamente, hasta que llegamos a $x = 0$, donde la pendiente es cero y la recta tangente a la parábola es horizontal.

A partir de ahí la pendiente se hace negativa y sigue decreciendo, o en otras palabras, crece con signo negativo.

La primera derivada de esta función es: $y' = -2x$. La segunda derivada es: $y'' = -2$. Esto nos dice que la primera derivada tiene una razón de cambio instantánea constante e igual a -2.

Esto nos indica que la pendiente de la recta tangente (el valor de la primera derivada) cambia en -2 unidades cada vez que x aumenta 1 unidad.

Observa la recta tangente a la función en $x = -1$. ¿Puedes decir cuánto vale la pendiente de esa recta?

Ahora compara ese valor con la pendiente de la recta tangente en $x = 0$. Y después compara este valor con la pendiente de la recta tangente a la función en $x = 1$.

El valor de la pendiente del siguiente punto de tangencia lo obtienes sumando -2 al anterior, y esto es así porque la segunda derivada nos dice cómo cambia la primera derivada.

A su vez, la tercera derivada nos dice cómo cambia la segunda derivada, y así sucesivamente.

Ejemplo 3

Discute el significado de la segunda derivada de la función:

$$y = -4.905\,t^2 + 24.535\,t$$

que describe la tryectoria de una piedra lanzada al aire, donde y es la altura (medida en metros) de la piedra medida desde el suelo y t es el tiempo (medido en segundos) que la piedra lleva en el aire.

- La primera derivada de esta función representa la razón de cambio de la posición de la piedra respecto al tiempo.
- Es decir, la primera derivada es la velocidad instantánea de la piedra:

$$\frac{dy}{dx} = -9.81\,t + 24.535 \qquad [\text{m/s}]$$

- La primera derivada nos dice cómo cambia la posición de la piedra conforme avanza el tiempo.
- En otras palabras, indica cuánto cambia la posición de la piedra en un segundo para un valor de t específico.
- Observa que derivar causa que las unidades de y se dividan por el tiempo t.
- La segunda derivada representa la razón de cambio instantánea de la velocidad (instantánea) de la piedra.
- Es decir, nos dice cómo cambia la velocidad de la piedra conforme avanza el tiempo.
- Esto es, en un segundo, cuánto cambia la velocidad de la piedra, para un valor de t dado.
- Esta magnitud física se conoce como la aceleración instantánea de la piedra:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -9.81 \qquad \left[\text{m/s}^2\right]$$

- La aceleración que sufren los cuerpos debido a la atracción gravitacional[1] de la tierra es de $g = 9.81$ m/s^2, que es el resulado que obtuvimos.

[1] Al nivel del mar.

- El signo negativo nos indica que la aceleración está orientada hacia abajo.

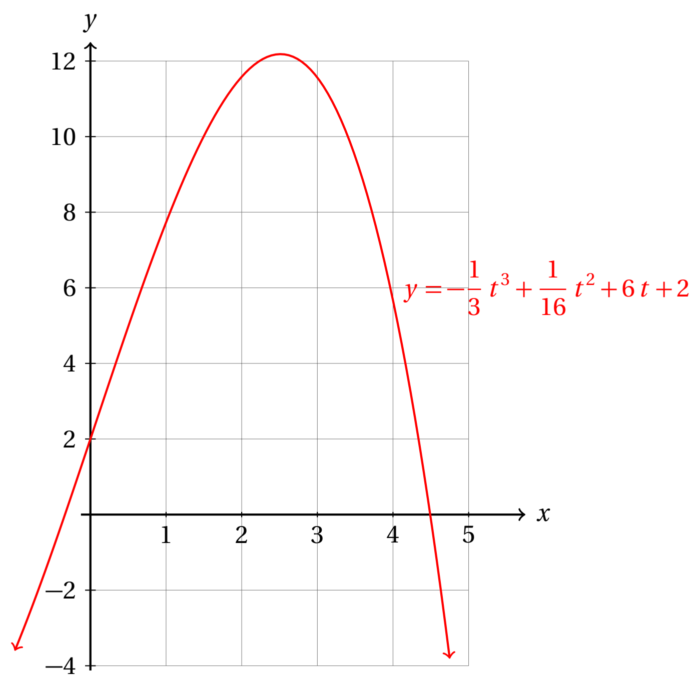
Ejemplo 4

Calcula la velocidad y la aceleración de un cuerpo que se mueve sobre el eje y con posición:

$$y = -\frac{1}{3}\,t^3 + \frac{1}{16}\,t^2 + 6\,t + 2$$

donde t es el tiempo medido en segundos, para $t = 1, 2, 3$ y 4

- Empezamos graficando la función para tener una idea de su comportamiento:



- De la gráfica vemos que la función es creciente en $t = 1, 2$, y decreciente en $t = 3$, y en adelante.
- Así que esperamos que la derivada de la función sea positiva en $t = 1, 2$ y negativa para los demás valores.
- Enseguida se muestran las dos primeras derivadas:

$$\frac{dy}{dt} = -t^2 + \frac{1}{8}\,t + 6 \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -2\,t + \frac{1}{8}$$

- Ahora vamos a evaluarlas en $t = 1, 2, 3$ y 4

t	1.0	2.0	3.0	4.0	tiempo
$f(t)$	7.729	11.583	11.563	5.667	posición
$f'(t)$	5.125	2.25	−2.625	−9.5	velocidad
$f''(t)$	−2.0	−4.0	−6.0	−8.0	aceleración

Ejemplo 5

Calcula todas las derivadas de la función polinomial de tercer grado:

$$y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- La primera derivada de esta función es:

$$\frac{dy}{dx} = 3\,a_3 x^2 + 2\,a_2 x + a_1$$

- La segunda derivada es:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 6\,a_3 x + 2\,a_2$$

  porque a_1 es una constante real.

- La tercera derivada es:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 6\,a_3$$

  porque ahora la constante es $2\,a_2$.

- La cuarta derivada y todas las derivadas sucesivas son cero, porque en cada caso estamos calculando la derivada de una constante.

- Es decir,

$$\frac{d^k y}{dx^k} = 0 \qquad k \geq 4, k \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 6

Calcula todas las derivadas de la función:

$$y = e^x$$

- Dado que la derivada de la función $y = e^x$ es igual a la función misma, todas sus derivadas son iguales a e^x:

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{dy}{dx} = e^x & \dfrac{d^2 y}{dx^2} = e^x \\
\dfrac{d^3 y}{dx^3} = e^x & \dfrac{d^4 y}{dx^4} = e^x \\
\vdots & \vdots \\
 & \dfrac{d^k y}{dx^k} = e^x \qquad k \in \mathbb{N}
\end{array}$$

Ejemplo 7

Calcula todas las derivadas de la función:

$$y = \sin x$$

- Primera derivada:
$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$
- Segunda derivada:
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$
- Tercera derivada:
$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$$
- Cuarta derivada:
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x$$
- Observa que la cuarta derivada es igual a la función inicial.
- Entonces, la derivada de orden cinco es igual a la primera derivada:
$$\frac{d^5y}{dx^5} = \cos x = \frac{dy}{dx}$$
- Y la derivada de orden seis es igual a la segunda derivada:
$$\frac{d^6y}{dx^6} = -\sin x = \frac{d^2y}{dx^2}$$
- Y así sucesivamente.
- Entonces, las derivadas de la función son:
$$\frac{d^{(4k)}y}{dx^{(4k)}} = \sin x \qquad \frac{d^{(4k+1)}y}{dx^{(4k+1)}} = \cos x$$
$$\frac{d^{(4k+2)}y}{dx^{(4k+2)}} = -\sin x \qquad \frac{d^{(4k+3)}y}{dx^{(4k+3)}} = -\cos x$$

  donde k es un número natural.

Calcula la derivada superior indicada para cada una de las siguientes funciones. **Ejercicios 21.1.2**

1) $y = 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 10x - 10$, sexto orden.
2) $y = -5x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 10x + 3$, cuarto orden.
3) $y = -3x^4 - 1x^3 + 3x^2 - 9x - 5$, tercer orden.
4) $y = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 3$, tercer orden.
5) $y = 2x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 8$, sexto orden.
6) $y = 5x^4 - 6x^3 - 1x^2 - 1x + 6$, cuarto orden.
7) $y = 5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 5x - 5$, cuarto orden.
8) $y = 3x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 7x + 4$, quinto orden.

9) $y = -4\,x^4 + 6\,x^3 - 6\,x^2 - 3\,x - 9$, quinto orden.

10) $y = 5\,x^4 + 4\,x^3 - 1\,x^2 - 6\,x - 2$, cuarto orden.

11) $y = -3\,x^4 + 5\,x^3 + 8\,x^2 + 9\,x - 4$, quinto orden.

12) $y = -3\,x^4 - 4\,x^3 + 8\,x^2 - 5\,x + 6$, quinto orden.

13) $y = -2\,x^4 - 2\,x^3 - 11\,x^2 + 5\,x - 11$, segundo orden.

14) $y = 5\,x^4 + 3\,x^3 - 1\,x^2 - 4\,x - 3$, cuarto orden.

15) $y = -2\,x^4 - 2\,x^3 + 11\,x^2 + 9\,x + 10$, sexto orden.

16) $y = 1\,x^4 - 2\,x^3 + 8\,x^2 - 3\,x - 4$, segundo orden.

17) $y = 5\,x^4 - 5\,x^3 + 6\,x^2 + 6\,x + 3$, quinto orden.

18) $y = -3\,x^4 + 3\,x^3 - 9\,x^2 - 2\,x + 11$, primer orden.

19) $y = -2\,x^4 - 3\,x^3 + 9\,x^2 + 5\,x - 1$, segundo orden.

20) $y = -2\,x^4 + 2\,x^3 - 4\,x^2 + 1\,x + 2$, segundo orden.

21) $y = -4\,x^4 + 4\,x^3 + 8\,x^2 + 2\,x + 5$, tercer orden.

22) $y = 3\,x^4 + 2\,x^3 + 10\,x^2 + 10\,x + 3$, segundo orden.

23) $y = 5\,x^4 + 5\,x^3 + 8\,x^2 + 9\,x + 4$, cuarto orden.

24) $y = 4\,x^4 - 2\,x^3 + 11\,x^2 - 6\,x - 6$, primer orden.

25) $y = -2\,x^4 + 5\,x^3 + 5\,x^2 + 2\,x + 10$, cuarto orden.

26) $y = 8\sin(3x)$, segundo orden.

27) $y = 10\tan(5x)$, segundo orden.

28) $y = 7\tan(4x)$, cuarto orden.

29) $y = 3\cos(4x)$, primer orden.

30) $y = 4\sin(10x)$, segundo orden.

31) $y = 2\cos(9x)$, primer orden.

32) $y = 6\sin(2x)$, sexto orden.

33) $y = 9\sin(7x)$, primer orden.

34) $y = 2\cos(2x)$, quinto orden.

35) $y = 5\sin(10x)$, segundo orden.

36) $y = 8\sin(6x)$, tercer orden.

37) $y = 2\tan(6x)$, quinto orden.

38) $y = 6\tan(7x)$, segundo orden.

39) $y = 4\tan(8x)$, quinto orden.

40) $y = 5\sin(10x)$, quinto orden.

41) $y = 7\,e^{8x}$, tercer orden.

42) $y = 4\,e^{8x}$, sexto orden.

43) $y = 6\,e^{5x}$, tercer orden.

44) $y = 5\,e^{4x}$, primer orden.

45) $y = 8\,e^{9x}$, segundo orden.

46) $y = 8\,e^{8x}$, tercer orden.

47) $y = 2\,e^{6x}$, tercer orden.

48) $y = 8\,e^{9x}$, segundo orden.

49) $y = 8\,e^{3x}$, cuarto orden.

50) $y = 7\,e^{10x}$, cuarto orden.

51) $y = 7\ln(8x)$, quinto orden.

52) $y = 5\ln(6x)$, segundo orden.

53) $y = 6\ln(9x)$, cuarto orden.

54) $y = 6\ln(7x)$, sexto orden.

55) $y = 3\ln(7x)$, cuarto orden.

56) $y = 7\ln(10x)$, primer orden.

57) $y = 3\ln(9x)$, quinto orden.

58) $y = 4\ln(9x)$, quinto orden.

59) $y = 9\ln(5x)$, tercer orden.

60) $y = 2\ln(4x)$, tercer orden.

61) $y = (8\cos(4x))(10\ln(9x))$, segundo orden.

62) $y = (2\ln(5x))\left(8e^{9x}\right)$, segundo orden.

63) $y = (7\ln(3x))(4\sin(8x))$, tercer orden.

64) $y = (9\ln(10x))\left(9e^{5x}\right)$, primer orden.

65) $y = (5\ln(6x))\left(5e^{6x}\right)$, primer orden.

66) $y = (8\tan(7x))\left(7e^{10x}\right)$, segundo orden.

67) $y = \left(10e^{9x}\right)(5\ln(3x))$, primer orden.

68) $y = \left(8e^{10x}\right)\left(3e^{9x}\right)$, segundo orden.

69) $y = \left(9e^{9x}\right)(10\sin(3x))$, primer orden.

70) $y = (2\ln(6x))\left(5e^{6x}\right)$, primer orden.

71) $y = (5\sin(9x))(6\tan(6x))$, primer orden.

72) $y = (6\tan(7x))(5\tan(9x))$, tercer orden.

73) $y = \dfrac{5e^{3x}}{3\ln(9x)}$, primer orden.

74) $y = \dfrac{4e^{10x}}{6\tan(9x)}$, segundo orden.

75) $y = \dfrac{10e^{3x}}{4\tan(10x)}$, segundo orden.

76) $y = \dfrac{7\tan(3x)}{10e^{7x}}$, primer orden.

77) $y = \dfrac{5\cos(6x)}{10\ln(9x)}$, segundo orden.

78) $y = \dfrac{5\ln(3x)}{4\ln(3x)}$, tercer orden.

79) $y = \dfrac{10\cos(6x)}{3e^{7x}}$, segundo orden.

80) $y = \dfrac{5\ln(2x)}{10\ln(7x)}$, tercer orden.

81) $y = \dfrac{8\ln(8x)}{2\ln(9x)}$, segundo orden.

82) $y = \dfrac{10\sin(10x)}{8e^{10x}}$, tercer orden.

83) $y = \dfrac{8\cos(8x)}{2e^{10x}}$, segundo orden.

84) $y = \dfrac{8\tan(4x)}{4\ln(4x)}$, tercer orden.

85) $y = \dfrac{2\ln(10x)}{10\ln(4x)}$, segundo orden.

86) $y = \dfrac{5\sin(7x)}{7\ln(3x)}$, primer orden.

87) $y = \dfrac{8e^{9x}}{9\ln(3x)}$, primer orden.

88) $y = \dfrac{5\ln(10x)}{2\ln(6x)}$, segundo orden.

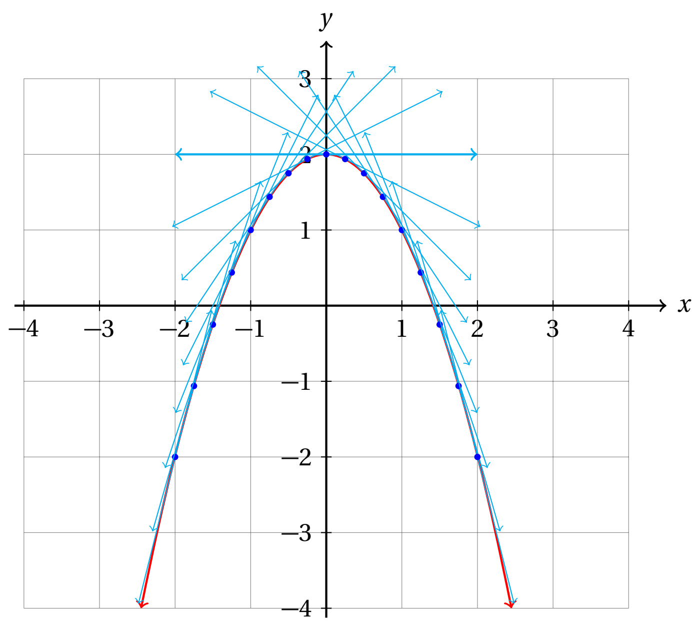
89) $y = \dfrac{9e^{3x}}{3e^{8x}}$, tercer orden.

90) $y = \dfrac{8\ln(9x)}{9\ln(10x)}$, segundo orden.

21.1.3 Máximos y mínimos usando la segunda derivada

Ahora que sabemos que la segunda derivada nos da información acerca de la primera derivada, vamos a utilizarla para calcular los máximos y mínimos de funciones.

Ya vimos que la función $y = 2 - x^2$ tiene un máximo en el punto $x = 0$.



De la gráfica se observa inmediatamente que la pendiente de las rectas tangentes va disminuyendo conforme avanzamos sobre el eje x.

Esto es claro al observar que para valores de x negativos, las pendientes de las rectas tangentes son positivas, y para valores de x positivos las rectas tangentes son negativas.

Esto significa que la razón de cambio de la derivada de la función en el intervalo que vemos en la gráfica es negativa, pues las pendientes van decreciendo.

En conclusión, si la segunda derivada de la función evaluada en un punto crítico es negativa, entonces el punto crítico corresponde a un máximo.

Un análisis semejante puede ayudarte a convencerte que si la segunda derivada de una función en un punto crítico es positiva, entonces el punto crítico es un mínimo de la función.

Pero tenemos un caso especial. Cuando el valor de la segunda derivada de la función evaluada en el punto crítico es cero.

En este punto, la derivada deja crecer (o decrecer) y empieza a decrecer (o crecer). A este punto crítico lo llmaremos *punto de inflexión*.

Definición 1

Criterio de la segunda derivada

Sea $y = f(x)$ una función y x_c uno de sus puntos críticos. Entonces,

- ✓ *si $f''(x_c) < 0$, la función tiene un máximo en $x = x_c$*
- ✓ *si $f''(x_c) > 0$, la función tiene un máximo en $x = x_c$*
- ✓ *si $f''(x_c) = 0$, la función tiene un punto de inflexión en $x = x_c$*

Ejemplo 1

Utiliza el criterio de la segunda derivada para verificar que el punto crítico $x = 0$ de la función:

$$y = 2 - x^2$$

es un máximo.

- Si la segunda derivada evaluada en $x = 0$ es negativo, tenemos que la pendiente está decreciendo alrededor de ese punto crítico.
- Es decir, antes de $x = 0$ la pendiente es positiva y después es negativa.
- La segunda derivada de la función es:
$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -2$$
- La segunda derivada de la función siempre es negativa.
- Entonces, el único punto crítico de la función es un máximo.

Ejemplo 2

Calcula los máximos y mínimos de la función:

$$y = \frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - 12x$$

- La primera derivada de la función:
$$\frac{dy}{dx} = 3x^4 - 2x^2 - 12$$
- Igualando a cero la primera derivada obtenemos una ecuación de cuarto grado.
- Podemos utilizar la sustitución: $u = x^2$ para simplificarla a una ecuación de segundo grado:
$$3u^2 - 2u - 12 = 0$$
- Ahora vamos a resolver la ecuación:
$$\begin{aligned} u &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-12)}}{2(3)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - (-144)}}{6} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{148}}{6} \end{aligned}$$
- Entonces,
$$u_1 = \frac{2 + \sqrt{148}}{6} \qquad \text{y} \qquad u_2 = \frac{2 - \sqrt{148}}{6}$$

- Es evidente que $u_2 < 0$, luego:

$$\begin{aligned} x_{1,2}^2 &= \frac{2+\sqrt{148}}{6} \qquad \Rightarrow \\ x_1 &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{148}}{6}} \approx 1.5365288 \\ x_2 &= -\sqrt{\frac{2+\sqrt{148}}{6}} \approx -1.5365288 \end{aligned}$$

- Ahora calculamos la segunda derivada de la función:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12\,x^3 - 4\,x$$

- Al evaluarla en los puntos críticos obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(x_1)}{dx^2} &= 12(1.5365288)^3 - 4(1.5365288) \approx 37.3853 > 0 \qquad \text{(Mínimo)} \\ \frac{d^2y(x_1)}{dx^2} &= 12(-1.5365288)^3 - 4(-1.5365288) \approx -37.3853 < 0 \qquad \text{(Máximo)} \end{aligned}$$

- Entonces la función tiene un máximo en el punto $x = -1.5365288$ y un mínimo en $x = 1.5365288$.
- Se te queda como ejercicio verificar que los puntos críticos han sido correctamente clasificados utilizando el criterio de la primera derivada (usando una tabla de valores de $x, f(x)$ y $f'(x)$) y graficar la función.

Ejemplo 3

Calcula los máximos y mínimos de la función:

$$y = x \cdot \ln(x)$$

usando el criterio de la segunda derivada.

- Empezamos calculando los puntos críticos de la función.
- Primero calculamos la primera derivada:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) \cdot (1) \\ &= 1 + \ln(x) \end{aligned}$$

- Ahora igualamos la primera derivada a cero y resolvemos:

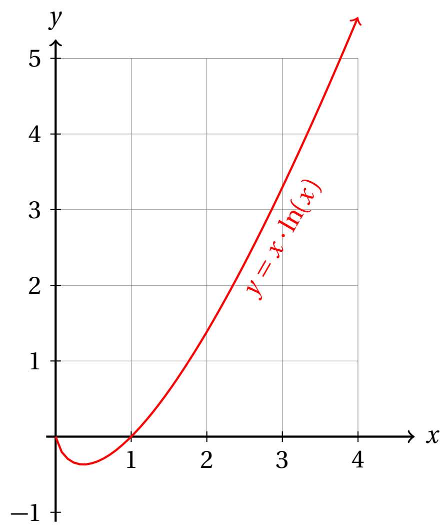
$$\ln(x) = -1 \qquad \Rightarrow \qquad e^{\ln(x)} = x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

- Ahora calculamos la segunda derivada de la función:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}$$

- Puesto que $e > 0$, al evaluar la segunda derivada en el único punto crítico de la función obtenemos un número positivo.

- Esto nos indica que el punto crítico corresponde a un mínimo.



Calcula los máximos y mínimos de la función:

$$y = \sin x \cdot \cos x$$

en el intervalo $(0, \pi)$ usando el criterio de la segunda derivada.

Ejemplo 4

- Para calcular la primera derivada usaremos la regla del producto:
- Definiendo: $u = \sin x$, y $v = \cos x$, tenemos que:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \qquad \text{y} \qquad \frac{dv}{dx} = -\sin x$$

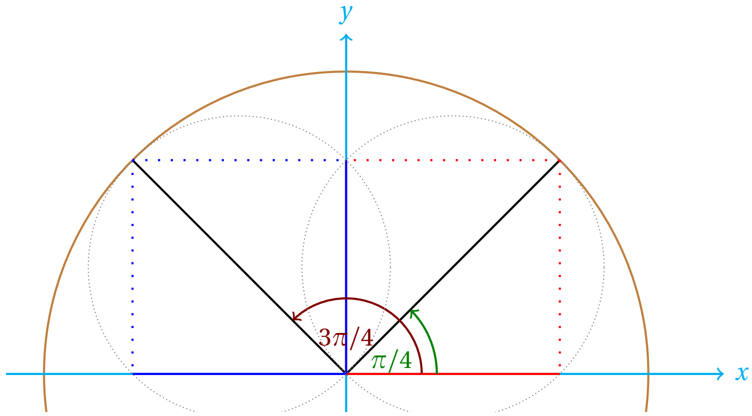
- Sustituyendo estos valores en la regla de derivación correspondiente obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)\\ &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

- Ahora calculamos los puntos críticos de la función igualando a cero la primera derivada:

$$\cos^2 x = \sin^2 x \qquad \Rightarrow \qquad |\cos x| = |\sin x|$$

- Los valores para los cuales $\sin x$ y $\cos x$ son iguales en valor absoluto son $x = \pi/4$ y $x = 3\pi/4$.
- Esto se observa fácilmente en una circunferencia unitaria:



- Ahora vamos a calcular la segunda derivada de la función:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\cos x \sin x - 2\sin x \cos x = -4\sin x \cos x$$

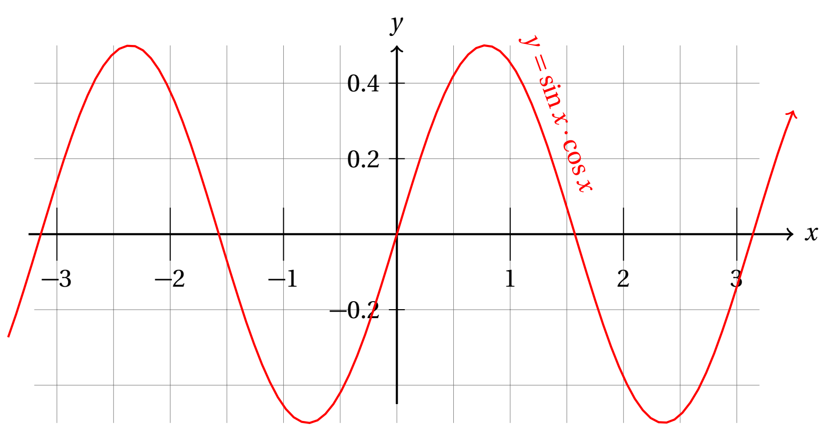
- Al evaluar en los puntos críticos obtenemos:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\pi/4} &= -4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -2 \end{aligned}$$

- Por lo que tiene un máximo en $x = \pi/4$.
- Ahora vamos a evaluar la segunda derivada en el otro punto crítico:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=3\pi/4} &= -4\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= -4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

- Por lo que ahora se trata de un mínimo.
- La gráfica de esta función es la siguiente:



Calcula los máximos y mínimos de la función:

$$y = 3\,x^4 - 12\,x^3 - 24\,x^2 + 5$$

utilizando el criterio de la segunda derivada.

Ejemplo 5

- Primero calculamos la primera derivada de la función:

$$\begin{aligned}\frac{d\,y}{d\,x} &= 12\,x^3 - 36\,x^2 - 48\,x \\ &= 12\,x\cdot\left(x^2 - 3\,x - 4\right) \\ &= 12\,x\cdot(x+1)\cdot(x-4)\end{aligned}$$

- Los puntos críticos de la función son evidentes a partir de la factorización de la derivada:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -1, \qquad \text{y} \qquad x_3 = 4$$

- Ahora vamos a calcular la segunda derivada de la función para clasificar los puntos críticos evaluando en ella:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{d\,x^2} &= 36\,x^2 - 72\,x - 48 \\ \left.\frac{d^2y}{d\,x^2}\right|_{x=-1} &= 60 \qquad \text{(Mínimo)} \\ \left.\frac{d^2y}{d\,x^2}\right|_{x=0} &= -48 \qquad \text{(Máximo)} \\ \left.\frac{d^2y}{d\,x^2}\right|_{x=4} &= 240 \qquad \text{(Mínimo)}\end{aligned}$$

- Se te queda como ejercicio graficar la función.

En la mayoría de las aplicaciones de los máximos y mínimos de funciones trataremos de optimizar un objetivo.

En las siguientes secciones veremos problemas aplicados donde se requiera de la optimización de alguna cantidad que depende funcionalmente de otra.

Calcula los máximos y mínimos de las siguientes funciones utilizando el criterio de la segunda derivada.

Ejercicios 21.1.3

1) $y = 2\,x^3 + 9\,x^2 + 5\,x + 9$

2) $y = -5\,x^3 + 9\,x^2 + 7\,x + 9$

3) $y = 4\,x^3 + 6\,x^2 - 4\,x - 7$

4) $y = 4\,x^3 + 8\,x^2 + 1\,x - 4$

5) $y = -4\,x^3 - 8\,x^2 - 1\,x + 6$

6) $y = 1\,x^3 - 9\,x^2 - 7\,x - 3$
7) $y = -4\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x + 6$
8) $y = 6\,x^3 - 6\,x^2 - 1\,x - 8$
9) $y = -2\,x^3 - 10\,x^2 - 5\,x - 10$
10) $y = -2\,x^3 + 7\,x^2 - 7\,x + 2$
11) $y = 6\,x^3 - 7\,x^2 - 9\,x + 8$
12) $y = -5\,x^3 - 8\,x^2 + 2\,x - 9$
13) $y = -3\,x^3 + 9\,x^2 + 6\,x + 7$
14) $y = -5\,x^3 + 9\,x^2 + 9\,x + 3$
15) $y = 3\,x^3 - 11\,x^2 - 8\,x + 3$
16) $y = 4\,x^3 + 2\,x^2 - 4\,x - 7$
17) $y = 2\,x^3 + 8\,x^2 - 4\,x - 6$
18) $y = -4\,x^3 + 10\,x^2 + 4\,x - 9$
19) $y = 5\,x^3 - 5\,x^2 - 5\,x - 2$
20) $y = -6\,x^3 + 10\,x^2 + 3\,x - 9$
21) $y = -3\,x^3 - 9\,x^2 + 2\,x - 9$
22) $y = 3\,x^3 - 3\,x^2 - 2\,x - 5$
23) $y = -3\,x^3 - 3\,x^2 + 6\,x + 9$
24) $y = -6\,x^3 - 6\,x^2 + 6\,x + 11$
25) $y = 2\,x^3 - 7\,x^2 + 1\,x - 2$
26) $y = -5\,x^4 - 3\,x^3 + 5\,x^2 - 10$
27) $y = 4\,x^4 - 3\,x^3 - 9\,x^2 + 7$
28) $y = -4\,x^4 - 4\,x^3 + 3\,x^2 - 7$
29) $y = -1\,x^4 + 3\,x^3 + 5\,x^2 + 11$
30) $y = -3\,x^4 - 5\,x^3 + 2\,x^2 + 4$
31) $y = -3\,x^4 - 6\,x^3 + 8\,x^2 - 1$
32) $y = 1\,x^4 + 5\,x^3 + 3\,x^2 + 2$
33) $y = 5\,x^4 - 5\,x^3 - 8\,x^2 - 8$
34) $y = 2\,x^4 - 4\,x^3 - 1\,x^2 - 7$
35) $y = -4\,x^4 + 5\,x^3 + 2\,x^2 - 4$
36) $y = 2\,x^4 - 5\,x^3 - 10\,x^2 - 10$
37) $y = -4\,x^4 - 2\,x^3 + 4\,x^2 + 3$

38) $y = 2x^4 - 1x^3 - 6x^2 + 9$

39) $y = -2x^4 - 1x^3 + 4x^2 - 7$

40) $y = -2x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 9$

41) $y = 5x^4 - 5x^3 + 1x^2 + 6$

42) $y = -4x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 9$

43) $y = 3x^4 - 1x^3 - 8x^2 + 1$

44) $y = -2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 7$

45) $y = -4x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 10$

21.1.4 Funciones crecientes y decrecientes

Ahora estudiaremos el comportamiento de la función a partir de la derivada.

Hasta ahora hemos calculado máximos y mínimos de funciones. También sabemos que cuando $f'(x) > 0$ la función es creciente en ese intervalo.

Con esta información podemos hacer bosquejos de funciones usando su derivada.

Ejemplo 1

Determina los intervalos en los cuales la función:

$$y = x^3 + x^2 - 6x$$

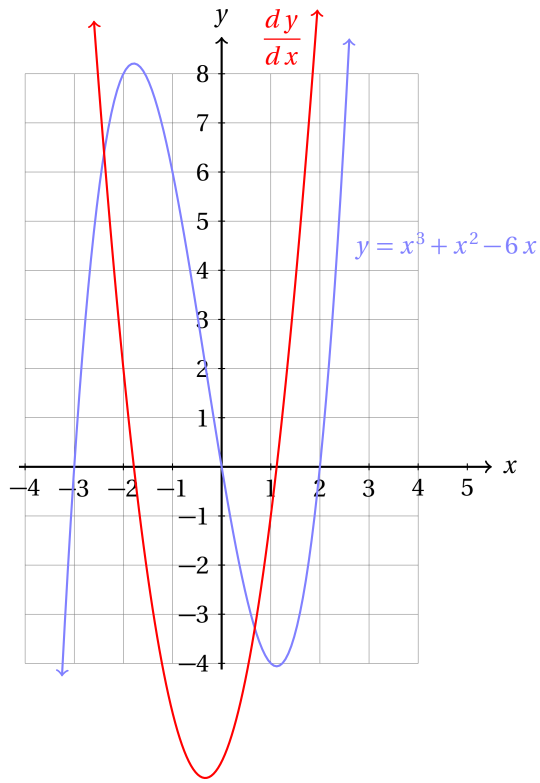
es creciente y en los cuales es decreciente.

- La derivada de la función es:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 6$$

- En la página 887 calculamos los máximos y mínimos de esta función y la graficamos.

- Ahora vamos a graficar la derivada para determinar los intervalos donde es positiva y donde es negativa.



- Los puntos críticos de la función son:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{19}}{3}$$

- Antes de x_1 la derivada es positiva y un poco después es negativa.
- Por eso concluimos que la función tiene un máximo en x_1.
- Entonces, en el intervalo $(-\infty, x_1)$ la función es creciente.
- En el intervalo (x_1, x_2) la derivada de la función es negativa.
- Esto nos dice que la función es decreciente en ese intervalo.
- Para el último intervalo: (x_2, ∞), la derivada es positiva, lo cual nos indica que la función es creciente ahí.

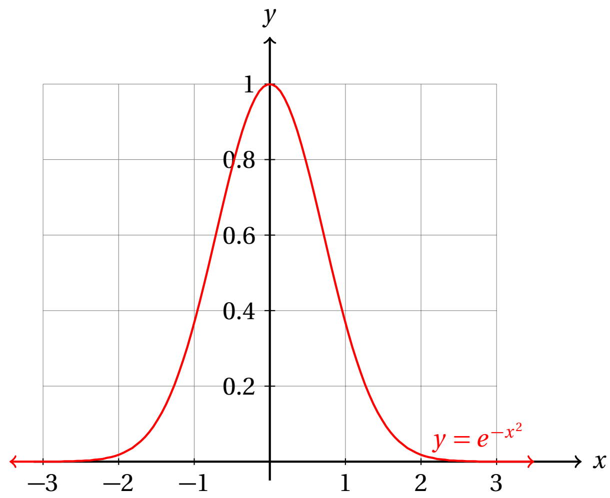
Ejemplo 2

Calcula los intervalos donde la función:

$$y = e^{-x^2}$$

es creciente y donde es decreciente.

- Ya estudiamos esta función en la página 897.



- Su derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = -2\,x\,e^{-x^2}$$

- Dado que la función exponencial es positiva para cualquier valor de su argumento, el signo de la derivada depende exclusivamente del factor $-2\,x$.

- Cuando x es negativa, la derivada es positiva.

- Es decir, para $x < 0$, la función es creciente.

- Cuando x es positiva la derivada es negativa.

- En otras palabras, para $x > 0$, la función es decreciente.

Los intervalos donde la función es creciente nos dirán información acerca del fenómeno que modela la función.

En cada caso particular, la interpretación de la gráfica de la función está relacionada con el contexto en el cual se le aplica.

Ejemplo 3

Una partícula móvil tiene posición $x(t)$ para cada valor de t de acuerdo a:

$$x(t) = t^3 - 6\,t^2 + 9\,t$$

Calcula los intervalos donde su velocidad es positiva y donde es negativa.

- La velocidad de la partícula se calcula como la derivada de la posición:

$$\frac{dx}{dt} = 3\,t^2 - 12\,t + 9$$

- Ahora necesitamos calcular los puntos donde la velocidad se hace cero.

- Eso nos ayudará a conocer dónde la posición tiene un máximo o un mínimo.

- Esto lo entenderemos como los puntos en los que la partícula se encuentra más alejada (máximo) o cercana (mínimo) al origen.

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t + 9 = 3\cdot(t^2 - 4t + 3) = 3\cdot(t-1)\cdot(t-3)$$

- Entonces, los puntos críticos de la función están en $t = 1$, y en $t = 3$.

- Poco antes de $t = 1$, la derivada es positiva:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0.5} = 3(0.5)^2 - 12(0.5) + 9 = 3.75 > 0$$

- Esto nos indica que la velocidad es positiva en el intervalo $(0,1)$.

- Poco después de $t = 1$, la derivada es negativa:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 < 0$$

- Entonces, en el intervalo $(1,3)$ la velocidad es negativa.

- Poco antes de $t = 3$ la derivada es negativa, pues corresponde al intervalo que acabamos de calcular.

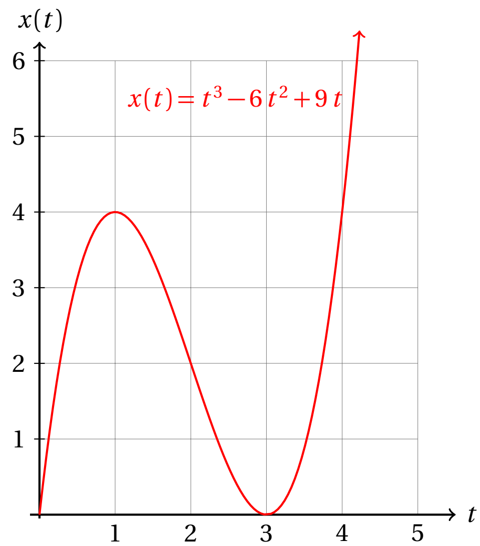
- Poco después es positiva:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=4} = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 > 0$$

- Ahora podemos hacer una tabla donde incluyamos información acerca de t, $x(t)$ y $x'(t)$:

t	$x(t)$	$x'(t)$	t	$x(t)$	$x'(t)$
0.0	0.0	9.0	0.25	1.8906	6.1875
0.5	3.125	3.75	0.75	3.7969	1.6875
1.0	4.0	0.0	1.25	3.8281	−1.3125
1.5	3.375	−2.25	1.75	2.7344	−2.8125
2.0	2.0	−3.0	2.25	1.2656	−2.8125
2.5	0.625	−2.25	2.75	0.1719	−1.3125
3.0	0.0	0.0	3.25	0.2031	1.6875
3.5	0.875	3.75	3.75	2.1094	6.1875
4.0	4.0	9.0	4.25	6.6406	12.1875

- La gráfica de la función es la siguiente:



La población $P(t)$ (en millones de habitantes) de una ciudad crece de acuerdo a:

$$P(t) = \frac{55}{5.5 + 4.5 \cdot e^{-0.0344t}}$$

donde t está medido en años. Encuentra los intervalos donde el tamaño de esa población decrece con el tiempo.

Ejemplo 4

- Primero calculamos la derivada de la función que modela el crecimiento de la población:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{8.514\, e^{-0.0344t}}{(5.5 + 4.5\, e^{-0.0344t})^2}$$

- Ahora vemos que la derivada siempre es positiva.
- Esto nos indica que la población siempre es creciente.
- Una buena pregunta consiste en el límite de la población cuando t tiende a infinito.
- Este valor representa al tamaño de la población límite para esa ciudad.

t	$x(t)$	$x'(t)$	t	$x(t)$	$x'(t)$
0.0	5.5	0.0851	10.0	6.329	0.0799
20.0	7.0862	0.071	30.0	7.7429	0.0601
40.0	8.2873	0.0488	50.0	8.7221	0.0383
60.0	9.0591	0.0293	70.0	9.3142	0.022
80.0	9.5039	0.0162	90.0	9.6431	0.0118
100.0	9.7444	0.0086	110.0	9.8174	0.0062
120.0	9.8699	0.0044	130.0	9.9074	0.0032
140.0	9.9342	0.0022	150.0	9.9532	0.0016
160.0	9.9668	0.0011	170.0	9.9764	0.0008
180.0	9.9833	0.0006	190.0	9.9881	0.0004
200.0	9.9916	0.0003	210.0	9.994	0.0002
220.0	9.9958	0.0001	230.0	9.997	0.0001
240.0	9.9979	0.0001	250.0	9.9985	0.0001

- Observa que conforme t crece, los valores de la población tienden a 10, mientras que la derivada de la función que modela la población tiende a cero.
- Esto nos sugiere que la gráfica de la función tiene por asíntota la recta horizontal $y = 10$.
- Para verificarlo, tendremos que graficar la función.
- Lo cual se te queda como ejercicio.

Ejemplo 5

El número de palabras n que puede memorizar un niño en Ruso y su significado en Español en t minutos está dado por:

$$n(t) = 25 \cdot (1 - e^{-0.35t})$$

¿Cuál es el número máximo de palabras que puede aprender por minuto?

- Tenemos que calcular la velocidad a la que puede memorizar el niño.
- Esa velocidad es la derivada de $n(t)$.
- Después tenemos que calcular los máximos y mínimos de esa velocidad.
- Empezamos calculando la primera derivada de $n(t)$:

$$\frac{dn}{dt} = 8.75\, e^{-0.35t}$$

- Dado que la primera derivada siempre es positiva, conforme avanza más tiempo el niño puede memorizar más palabras.
- Pero, ¿qué pasa con el número de palabras por minuto que memoriza?
- Esa información nos la da la segunda derivada:

$$\frac{d^2n}{dt^2} = -3.0625\, e^{-0.35t}$$

- La segunda derivada es negativa.
- Esto nos dice que conforme avanza el tiempo, el niño puede memorizar menos palabras por minuto.
- En otras palabras, al principio, el niño puede memorizar más rápido que en cualquier otro momento.

t	$x(t)$	$x'(t)$	t	$x(t)$	$x'(t)$
0.0	0.0	0.875	1.0	5.53	0.6166
2.0	9.8367	0.4345	3.0	13.1908	0.3062
4.0	15.803	0.2158	5.0	17.8374	0.1521
6.0	19.4217	0.1071	7.0	20.6557	0.0755
8.0	21.6166	0.0532	9.0	22.365	0.0375
10.0	22.9479	0.0264	11.0	23.4018	0.0186
12.0	23.7553	0.0131	13.0	24.0306	0.0092
14.0	24.2451	0.0065	15.0	24.4121	0.0046

- La primera derivada evaluada en cero nos dice que, en promedio el niño puede memorizar $0.875 = 7/8$ palabras por minuto.
- En otras palabras, en 8 minutos puede memorizar 7 palabras, suponiendo que memorizara a la velocidad máxima durante esos 8 minutos.

21.2 Concavidad

La concavidad es un concepto que nos ayudará a describir el comportamiento de la primera derivada de una función.

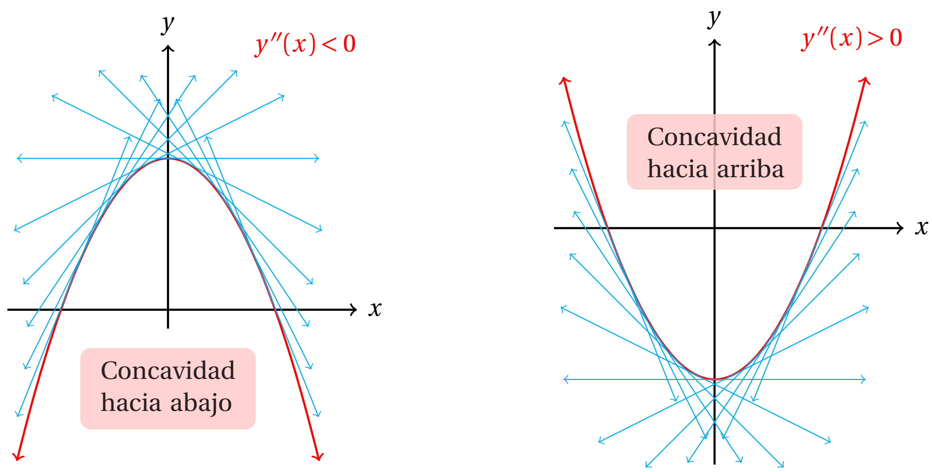
Dado que la derivada nos da información sobre la función, la segunda derivada nos debe dar información sobre la primera derivada.

Esto nos sugiere que la segunda derivada es útil para conocer la concavidad de una curva.

Ejemplo 6

Determina cómo queda dibujada una recta tangente a la curva para un valor x_0 tal que $y''(x_0) < 0$ respecto de la gráfica de la función. Asimismo, para un x_0 tal que $y''(x_0) > 0$.

- Cuando $y''(x_0) < 0$, la derivada de la función, $y'(x)$ en ese punto x_0 está decreciendo.
- Esto significa que la curva va cambiando dirección haciéndose cada vez *más inclinada hacia abajo*.
- Entonces, una recta tangente en x_0 debe quedar por encima de la gráfica de la función.
- Por otra parte, cuando $y''(x_0) > 0$, la derivada de la función, $y'(x)$ en ese punto x_0 está creciendo.
- Esto indica que la curva ahora va haciendose *más inclinada hacia arriba*.
- Ahora la recta tangente a la curva en x_0 debe quedar por debajo de la gráfica de la función.



Definición 1

Concavidad

Se dice que una función $y = f(x)$ tiene concavidad hacia arriba en el intervalo (a, b) si una recta tangente dibujada a la gráfica de la función en un punto x_0 de ese intervalo $(a < x_0 < b)$ queda por debajo de la función.
Si la tangente dibujada queda por arriba de la función decimos que la función presenta concavidad hacia abajo en ese intervalo.

Ejemplo 7

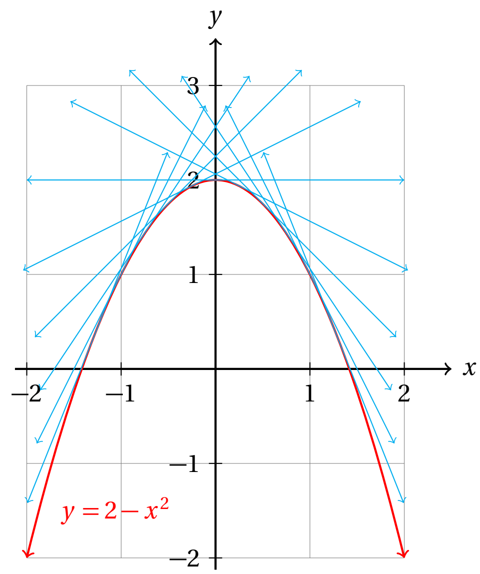
Verifica si las rectas tangentes dibujadas a la función:

$$y = 2 - x^2$$

quedan por encima o por debajo de su gráfica.

- Volvemos a retomar el ejemplo de la página 886.

- Ya sabemos que la primera derivada de esta función es: $y'(x) = -2\,x$
- Mientras que la segunda derivada es: $y''(x) = -2$.
- Observa que la segunda derivada es negativa siempre.
- Esto nos dice que la pendiente de las rectas tangentes van decreciendo conforme x crece.
- Es decir, la gráfica de la función tiene concavidad hacia abajo, dado que las rectas tangentes van quedando por encima de la gráfica de la función:



Ejemplo 8

Indica la concavidad en cada uno de los puntos críticos de la siguiente función:

$$y = 3\,x^4 - 20\,x^3 + 12\,x^2 + 96\,x - 10$$

- Tenemos que calcular todos los puntos críticos de esta función.
- Empezamos calculando su derivada:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 12\,x^3 - 60\,x^2 + 24\,x + 96\\ &= 12\cdot\left(x^3 - 5\,x^2 + 2\,x + 8\right)\end{aligned}$$

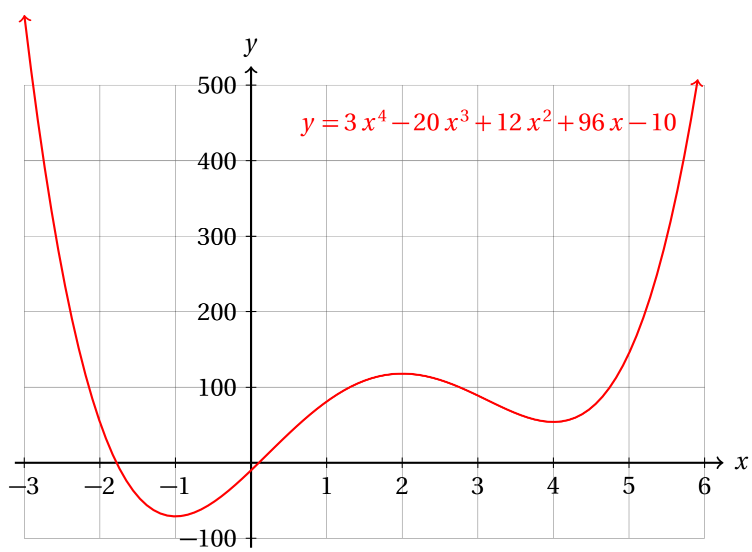
- Observa que la derivada se hace cero para $x = -1$.
- Entonces, podemos dividir entre $x + 1$ la derivada para factorizarla:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & 2 & 8 & -1\\ & -1 & 6 & -8 & \\ \hline 1 & -6 & 8 & 0 & \end{array}$$

- Esto nos permite reescribir la derivada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 12\cdot(x+1)\left(x^2 - 6\,x + 8\right)\\ &= 12\cdot(x+1)(x-4)(x-2)\end{aligned}$$

- Ahora fácilmente podemos calcular los puntos críticos de la función igualando a cero cada factor.
- Es decir, los puntos críticos de la función son: $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, y $x_3 = 2$.
- Para conocer la concavidad en cada uno de ellos, vamos a calcular la segunda derivada y a evaluarla en cada punto crítico:
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36\,x^2 - 120\,x + 24$$
- Al evaluarla en $x = x_1 = -1$, obtenemos:
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-1} = 36(-1)^2 - 120(-1) + 24 = 180 > 0$$
- Entonces, en este punto tiene un mínimo, y por tanto, tiene concavidad hacia arriba.
- Para el siguiente punto crítico tenemos:
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=2} = 36(2)^2 - 120(2) + 24 = -72 < 0$$
que nos indica que la función tiene un máximo ahí y concavidad hacia abajo.
- Para $x = x_3 = 4$, obtenemos:
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=4} = 36(4)^2 - 120(4) + 24 = 120 > 0$$
por lo que la función tiene un mínimo en ese punto crítico y concavidad hacia arriba.
- La siguiente gráfica muestra toda esta información:



En el ejemplo anterior hemos visto que la concavidad cambió, empezando la función con concavidad hacia arriba, luego hacia abajo y termina con concavidad hacia arriba de nuevo.

Una buena pregunta que debemos hacer ahora es cómo reconocer en qué punto deja de tener concavidad hacia arriba y empieza a tener concavidad hacia abajo.

Eso debe ocurrir en el punto en que la derivada deja de crecer y empieza a decrecer. Es decir, debe ocurrir en el punto x_c en el cual la segunda derivada se hace cero.

Ejemplo 9

Calcula los intervalos donde la función:

$$y = 3x^4 - 20x^3 + 12x^2 + 96x - 10$$

tiene concavidad hacia arriba y donde tiene concavidad hacia abajo.

- Para calcular los intervalos debemos conocer exactamente dónde cambia la concavidad de la función.
- Es decir, en qué punto cambia de signo su segunda derivada.
- En el ejemplo anterior calculamos los puntos críticos de la función, como su concavidad en cada uno de ellos.
- Entonces, calculamos su segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 - 120x + 24$$

- Ahora vamos a igualarla a cero y vamos a resolver para x:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-120) \pm \sqrt{(-120)^2 - 4(36)(24)}}{2(36)} \\ &= \frac{120 \pm \sqrt{14400 - (3456)}}{72} \\ &= \frac{120 \pm \sqrt{10944}}{72} \end{aligned}$$

- Lo que puede reescribirse como:

$$x = \frac{120 \pm 24\sqrt{19}}{72} = \frac{5 \pm \sqrt{19}}{3}$$

- Esto es,

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{19}}{3} \approx 3.1196 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{5 - \sqrt{19}}{3} \approx 0.2137$$

- Estos dos puntos son los límites donde la función cambia de concavidad.
- Entonces, los intervalos donde la función presenta concavidad hacia arriba son: $(-\infty, 0.2137)$, y $(3.1196, \infty)$.
- Y el intervalo donde la función tiene concavidad hacia abajo es: $(0.2137, 0.31186)$.
- Este resultado se verifica visualmente en la gráfica de la función.

PUNTO DE INFLEXIÓN

Sea $y = f(x)$ una función con segunda derivada definida en x_0. El punto x_0 es un punto de inflexión si $f''(x_0) = 0$.

Definición 2

En otras palabras, un punto de inflexión es aquel punto donde la concavidad de la función cambia.

Calcula todos los puntos de inflexión de la función:

$$y = e^{-x^2}$$

Ejemplo 10

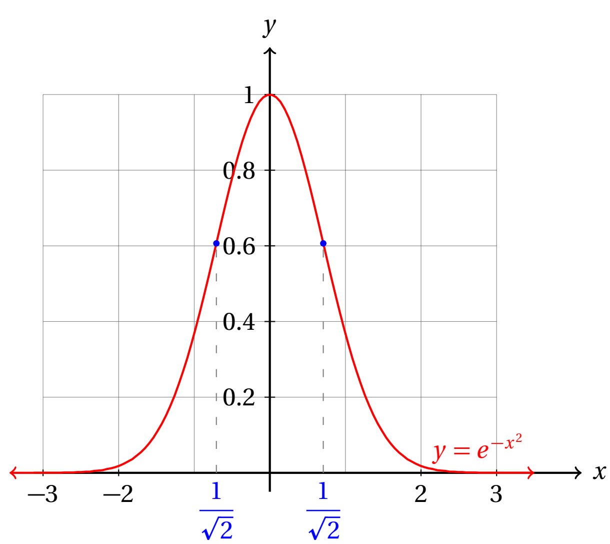
- Empezamos calculando la segunda derivada de la función:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -2\,x\,e^{-x^2} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \left(4\,x^2 - 2\right)\cdot e^{-x^2} \end{aligned}$$

- Para que la segunda derivada se haga cero, es necesario que $4\,x^2 - 2 = 0$ luego:

$$\begin{aligned} 4\,x^2 &= 2 \quad \Rightarrow \\ x^2 &= \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071 \end{aligned}$$

- Ahora es fácil localizar en la gráfica los puntos de inflexión de esta función:



- Los intervalos con diferente concavidad son: $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, \infty)$ con concavidad hacia arriba y $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ con concavidad hacia abajo.

Ejercicios 21.2 Calcula los intervalos de la función dada tiene concavidad hacia arriba y donde tiene concavidad hacia abajo.

1) $y = 308 - 93\,x + 0\,x^2 - x^3$. $(-\infty, 0.0)$ Arriba, $(0.0, \infty)$ Abajo,
2) $y = 175 - 45\,x - 3\,x^2 - x^3$. $(-\infty, -1.0)$ Arriba, $(-1.0, \infty)$ Abajo,
3) $y = 64 - 40\,x + 2\,x^2 - x^3$. $(-\infty, 0.667)$ Arriba, $(0.667, \infty)$ Abajo,
4) $y = -770 + 103\,x + 8\,x^2 + x^3$. $(-\infty, -2.667)$ Abajo, $(-2.667, \infty)$ Arriba.
5) $y = -50 + 35\,x + 14\,x^2 - x^3$. $(-\infty, 4.667)$ Arriba, $(4.667, \infty)$ Abajo,
6) $y = -8 - 2\,x + 5\,x^2 + x^3$. $(-\infty, -1.667)$ Abajo, $(-1.667, \infty)$ Arriba.
7) $y = 180 - 88\,x - 3\,x^2 - x^3$. $(-\infty, -1.0)$ Arriba, $(-1.0, \infty)$ Abajo,
8) $y = 539 + 49\,x - 11\,x^2 + x^3$. $(-\infty, 3.667)$ Abajo, $(3.667, \infty)$ Arriba.
9) $y = -49 - 49\,x + 1\,x^2 - x^3$. $(-\infty, 0.333)$ Arriba, $(0.333, \infty)$ Abajo,
10) $y = 216 - 21\,x - 14\,x^2 + x^3$. $(-\infty, 4.667)$ Abajo, $(4.667, \infty)$ Arriba.
11) $y = 1089 + 77\,x - 13\,x^2 + x^3$. $(-\infty, 4.333)$ Abajo, $(4.333, \infty)$ Arriba.
12) $y = -360 - 94\,x + 3\,x^2 - x^3$. $(-\infty, 1.0)$ Arriba, $(1.0, \infty)$ Abajo,
13) $y = 132 + 89\,x + 18\,x^2 - x^3$. $(-\infty, 6.0)$ Arriba, $(6.0, \infty)$ Abajo,
14) $y = 567 - 207\,x + 25\,x^2 + x^3$. $(-\infty, -8.333)$ Abajo, $(-8.333, \infty)$ Arriba.
15) $y = 147 + 7\,x - 11\,x^2 - x^3$. $(-\infty, -3.667)$ Arriba, $(-3.667, \infty)$ Abajo,
16) $y = 294 + 49\,x - 6\,x^2 + x^3$. $(-\infty, 2.0)$ Abajo, $(2.0, \infty)$ Arriba.
17) $y = -324 + 36\,x + 9\,x^2 + x^3$. $(-\infty, -3.0)$ Abajo, $(-3.0, \infty)$ Arriba.
18) $y = 48 - 34\,x - 13\,x^2 + x^3$. $(-\infty, 4.333)$ Abajo, $(4.333, \infty)$ Arriba.
19) $y = 275 + 25\,x - 11\,x^2 + x^3$. $(-\infty, 3.667)$ Abajo, $(3.667, \infty)$ Arriba.
20) $y = 240 + 22\,x - 9\,x^2 + x^3$. $(-\infty, 3.0)$ Abajo, $(3.0, \infty)$ Arriba.
21) $y = 28 + 39\,x + 12\,x^2 - x^3$. $(-\infty, 4.0)$ Arriba, $(4.0, \infty)$ Abajo,
22) $y = -90 - 53\,x - 2\,x^2 - x^3$. $(-\infty, -0.667)$ Arriba, $(-0.667, \infty)$ Abajo,
23) $y = -162 - 45\,x + 16\,x^2 + x^3$. $(-\infty, -5.333)$ Abajo, $(-5.333, \infty)$ Arriba.
24) $y = -567 - 207\,x - 25\,x^2 + x^3$. $(-\infty, 8.333)$ Abajo, $(8.333, \infty)$ Arriba.
25) $y = 486 - 27\,x - 12\,x^2 - x^3$. $(-\infty, -4.0)$ Arriba, $(-4.0, \infty)$ Abajo,
26) $y = 1000\,x - 100\,x^2 - 10\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, -2.287)$ Arriba, $(-2.287, 7.287)$ Abajo, $(7.287, \infty)$ Arriba.
27) $y = 144\,x - 70\,x^2 - 3\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, -2.747)$ Arriba, $(-2.747, 4.247)$ Abajo, $(4.247, \infty)$ Arriba.
28) $y = 512\,x + 64\,x^2 - 8\,x^3 - x^4$.
$(-\infty, -5.83)$ Abajo, $(-5.83, 1.83)$ Arriba, $(1.83, \infty)$ Abajo.

29) $y = 192\,x - 8\,x^2 - 10\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, -0.254)$ Arriba, $(-0.254, 5.254)$ Abajo, $(5.254, \infty)$ Arriba.

30) $y = 36\,x - 4\,x^2 - 9\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, -0.144)$ Arriba, $(-0.144, 4.644)$ Abajo, $(4.644, \infty)$ Arriba.

31) $y = 200\,x + 105\,x^2 - 18\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, 2.842)$ Arriba, $(2.842, 6.158)$ Abajo, $(6.158, \infty)$ Arriba.

32) $y = 84\,x + 5\,x^2 - 8\,x^3 - x^4$.
$(-\infty, -4.198)$ Abajo, $(-4.198, 0.198)$ Arriba, $(0.198, \infty)$ Abajo.

33) $y = 50\,x - 45\,x^2 + 12\,x^3 - x^4$.
$(-\infty, 1.775)$ Abajo, $(1.775, 4.225)$ Arriba, $(4.225, \infty)$ Abajo.

34) $y = 441\,x - 49\,x^2 + 9\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, -5.887)$ Arriba, $(-5.887, 1.387)$ Abajo, $(1.387, \infty)$ Arriba.

35) $y = 324\,x + 144\,x^2 - 21\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, 3.363)$ Arriba, $(3.363, 7.137)$ Abajo, $(7.137, \infty)$ Arriba.

36) $y = 1000\,x + 100\,x^2 + 10\,x^3 - x^4$.
$(-\infty, -2.287)$ Abajo, $(-2.287, 7.287)$ Arriba, $(7.287, \infty)$ Abajo.

37) $y = 27\,x - 9\,x^2 - 3\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, -0.686)$ Arriba, $(-0.686, 2.186)$ Abajo, $(2.186, \infty)$ Arriba.

38) $y = 180\,x - 88\,x^2 - 3\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, -3.152)$ Arriba, $(-3.152, 4.652)$ Abajo, $(4.652, \infty)$ Arriba.

39) $y = 270\,x + 87\,x^2 - 4\,x^3 - x^4$.
$(-\infty, -4.937)$ Abajo, $(-4.937, 2.937)$ Arriba, $(2.937, \infty)$ Abajo.

40) $y = 49\,x - 49\,x^2 + 1\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, -3.119)$ Arriba, $(-3.119, 2.619)$ Abajo, $(2.619, \infty)$ Arriba.

41) $y = 990\,x + 299\,x^2 - 30\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, 4.967)$ Arriba, $(4.967, 10.033)$ Abajo, $(10.033, \infty)$ Arriba.

42) $y = 150\,x + 85\,x^2 - 16\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, 2.646)$ Arriba, $(2.646, 5.354)$ Abajo, $(5.354, \infty)$ Arriba.

43) $y = 36\,x - 49\,x^2 - 14\,x^3 - x^4$.
$(-\infty, -5.521)$ Abajo, $(-5.521, -1.479)$ Arriba, $(-1.479, \infty)$ Abajo.

44) $y = 40\,x - 4\,x^2 + 10\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, -5.13)$ Arriba, $(-5.13, 0.13)$ Abajo, $(0.13, \infty)$ Arriba.

45) $y = 210\,x + 107\,x^2 - 18\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, 2.945)$ Arriba, $(2.945, 6.055)$ Abajo, $(6.055, \infty)$ Arriba.

46) $y = 324\,x - 36\,x^2 - 9\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, -1.076)$ Arriba, $(-1.076, 5.576)$ Abajo, $(5.576, \infty)$ Arriba.

47) $y = 400\,x - 90\,x^2 + 3\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, -4.695)$ Arriba, $(-4.695, 3.195)$ Abajo, $(3.195, \infty)$ Arriba.

48) $y = 180\,x - 48\,x^2 + 7\,x^3 + x^4$.
$(-\infty, -5.076)$ Arriba, $(-5.076, 1.576)$ Abajo, $(1.576, \infty)$ Arriba.

49) $y = 84\,x + 44\,x^2 + 1\,x^3 - x^4$.
$(-\infty, -2.47)$ Abajo, $(-2.47, 2.97)$ Arriba, $(2.97, \infty)$ Abajo.

50) $y = 640\,x + 64\,x^2 - 10\,x^3 - x^4$.
$(-\infty, -6.613)$ Abajo, $(-6.613, 1.613)$ Arriba, $(1.613, \infty)$ Abajo.

21.2.1 Puntos de inflexión

En esta sección vamos a resolver algunos problemas donde se requiere el cálculo de los puntos de inflexión de una función.

Ejemplo 1

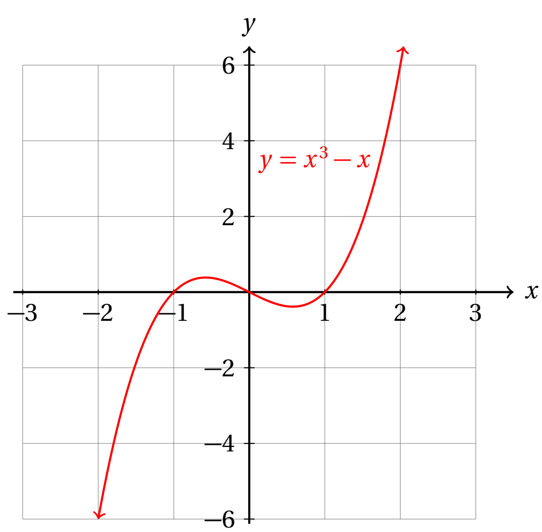
Calcula los puntos de inflexión de la función:

$$y = x^3 - x$$

- Por definición, los puntos de inflexión están donde la segunda derivada se hace cero:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6\,x$$

- Y $6\,x = 0$ solo si $x = 0$.
- Entonces, esta función tiene solamente un punto de inflexión.
- Enseguida se muestra su gráfica.



- En palabras, esto nos dice que la primera derivada de la función deja de decrecer en $x = 0$ y empieza a crecer.

Podemos mostrar una aplicación de este problema en un problema de ecología.

Por ejemplo, los biólogos están interesados en cómo crece la población de una especie en peligro de extinción.

Se ha determinado que la población p de un animal en peligro de extinción está dado por:

$$p(t) = 0.125\,t^3 - 0.025\,t^2 - 0.1\,t + 5$$

donde t está medido en meses y $p(t)$ es individuos. ¿En qué momento la razón de cambio instantánea de la población deja de decrecer y empieza a crecer?

Ejemplo 2

- Este problema es esencialmente igual al ejemplo anterior.
- Debemos determinar los puntos de inflexión de la función.
- Para ese fin, calculamos su segunda derivada y la igualamos a cero y resolvemos para t:

$$\frac{d^2 p}{d\,t^2} = 0.75\,t - 0.05 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{0.05}{0.75} = 0.06667$$

- Entonces, la velocidad razón de cambio instantánea de la población empieza a crecer a partir de $t \approx 0.067$ meses.
- Esto es equivalente a decir que crece a partir de terminar el segundo día.

Una partícula se mueve sobre el eje x de manera que su posición en el instante t está dada por:

$$x(t) = t^4 - t^2 + 1$$

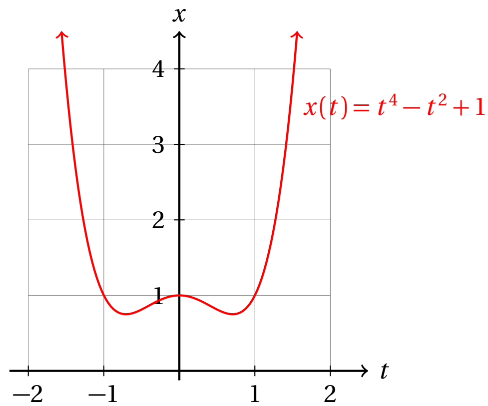
donde x está medido en centímetros y t está medido en segundos. Calcula el instante en que su aceleración cambia de signo.

Ejemplo 3

- El problema pide que calculemos el instante en que la aceleración de la partícula cambia de signo.
- Es decir, debemos calcular el instante en que deja de desacelerarse y empieza a acelerar y viceversa.
- En otras palabras, debemos calcular los puntos de inflexión de la función.

$$\frac{d^2 x}{d\,t^2} = 12\,t^2 - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \approx \pm 0.4082$$

- Dado que la función es polinomial es contínua para todo el conjunto de los números reales.
- Dado que es par, y el coeficiente principal es positivo, la función tiende a ∞ cuando t tiende a ∞ y también cuando tiende a $-\infty$.
- Entonces, cuando t es negativo y grande, la función es decreciente.
- Su primera derivada en ese intervalo es creciente.
- Llega al punto $t \approx -0.4082$ y la primera derivada se hace decreciente.
- Cuando $t = 0.4082$, la primera derivada de nuevo empieza a crecer.
- La gráfica de la función se encuentra enseguida:



Ejemplo 4

La población de una especie de rata que vive en los mercados se calcula con la siguiente fórmula:

$$P(t) = \frac{840\,000}{700 + 500 \cdot e^{-1.02(t-5)}}$$

donde la población inicial es de 700 ratas ($t = 0$), y t es el tiempo medido en días. Calcula el punto de inflexión de esta función y da su interpretación de acuerdo al contexto.

- Primero calculamos las primeras dos derivadas de la función:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{840\,000 \cdot (1.02\, e^{-1.02(t-5)})}{(700 + 500\, e^{-1.02(t-5)})^2}$$

- Ahora la segunda derivada:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{43696.8 \cdot \left[5 \cdot e^{-2.04(t-5)} - 7 \cdot e^{-1.02(t-5)}\right]}{(7 + 5 \cdot e^{-1.02(t-5)})^3}$$

- Ahora debemos igualar a cero la segunda derivada y resolver para t:

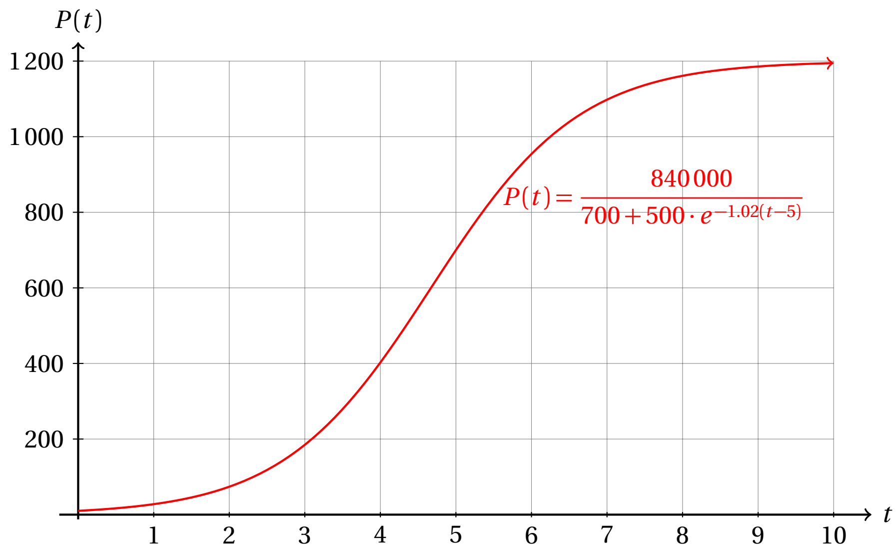
$$\begin{aligned} 43696.8 \cdot \left[5 \cdot e^{-2.04(t-5)} - 7 \cdot e^{-1.02(t-5)}\right] &= 0 \qquad \Rightarrow \\ 5 \cdot e^{-2.04(t-5)} - 7 \cdot e^{-1.02(t-5)} &= 0 \\ 5 \cdot e^{-2.04(t-5)} &= 7 \cdot e^{-1.02(t-5)} \end{aligned}$$

- Ahora vamos a despejar t:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-2.04(t-5)}}{e^{-2.04(t-5)}} &= \frac{7}{5} \\ e^{-1.02(t-5)} &= \frac{7}{5} \\ -1.02(t-5) &= \ln\left(\frac{7}{5}\right) \\ t &= 5 - \frac{\ln(7/5)}{1.02} \approx 4.6701 \end{aligned}$$

- Es decir, después de 4.67 días, la velocidad instantánea del crecimiento de la población empieza a decrecer.

- Esto nos indica que la población sigue creciendo, pero cada vez en menor proporción.
- Las causas de esto pueden ser límite de espacio, de comida, agua, etc.
- La gráfica de la función nos muestra estos resultados:



- El punto donde la población crece con mayor rapidez es $t \approx 4.6701$, que es donde está el punto de inflexión.
- Porque la pendiente de la recta tangente en ese punto es máxima cuando la segunda derivada es cero.
- Es decir, en el punto de inflexión, la primera derivada tiene un máximo.

El siguiente ejemplo está relacionado con la siguiente sección.

Ejemplo 5

Calcula todos los puntos críticos y de inflexión de la siguiente función:

$$y = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24$$

- Empezamos calculando la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 12x^2 - 14x - 22$$

- Para calcular todos los puntos críticos, debemos igualar a cero y resolver.
- Observa que si sustituimos $x = -1$ obtenemos cero:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 4(-1)^3 + 12(-1)^2 - 14(-1) - 22 = 0$$

- Esto significa que $x = -1$ es una raíz del polinomio.

- Podemos dividir entre $x+1$ la primera derivada y obtenemos una forma factorizada:

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(4x^2+8x-22)$$

- Usando la fórmula general podemos calcular los otros dos puntos críticos de la función:

$$x_2 = -1+\frac{\sqrt{26}}{2} \qquad x_3 = -1-\frac{\sqrt{26}}{2}$$

- Ahora calculamos la segunda derivada de la función:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2-24x-14$$

- Calculamos los puntos de inflexión de la función igualando a cero la segunda derivada y resolviendo para x:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(24)\pm\sqrt{(24)^2-4(12)(-14)}}{2(12)} \\ &= \frac{-24\pm\sqrt{576-(-672)}}{24} \\ &= \frac{-24\pm\sqrt{1248}}{24} \end{aligned}$$

- Lo cual puede simplificarse para obtener los puntos de inflexión:

$$x_a = -1+\frac{\sqrt{78}}{6} \qquad x_b = -1-\frac{\sqrt{78}}{6}$$

Ejercicios 21.2.1 Para cada una de las siguientes funciones calcula sus puntos de inflexión.

1) $y=-1-7x-8x^2+9x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{8}{27} \approx 0.296$

2) $y=-5+11x-3x^2+8x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{1}{8} = 0.125$

3) $y=6-3x+6x^2+7x^3$. $x_{\text{inf}} = -\frac{2}{7} \approx -0.286$

4) $y=-5-8x+8x^2-7x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{8}{21} \approx 0.381$

5) $y=8+4x+4x^2+6x^3$. $x_{\text{inf}} = -\frac{2}{9} \approx -0.222$

6) $y=-7+2x-11x^2-4x^3$. $x_{\text{inf}} = -\frac{11}{12} \approx -0.917$

7) $y=2+9x+2x^2-7x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{2}{21} \approx 0.095$

8) $y=1+8x-5x^2-4x^3$. $x_{\text{inf}} = -\frac{5}{12} \approx -0.417$

9) $y = 4 - 5\,x + 6\,x^2 + 7\,x^3$. $x_{\text{inf}} = -\frac{2}{7} \approx -0.286$

10) $y = -8 - 8\,x + 1\,x^2 - 2\,x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{1}{6} \approx 0.167$

11) $y = -9 - 6\,x + 8\,x^2 - 10\,x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{4}{15} \approx 0.267$

12) $y = -3 + 6\,x + 5\,x^2 + 1\,x^3$. $x_{\text{inf}} = -\frac{5}{3} \approx -1.667$

13) $y = -9 + 2\,x - 3\,x^2 + 7\,x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{1}{7} \approx 0.143$

14) $y = 8 - 8\,x + 7\,x^2 - 11\,x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{7}{33} \approx 0.212$

15) $y = -2 - 6\,x + 10\,x^2 + 11\,x^3$. $x_{\text{inf}} = -\frac{10}{33} \approx -0.303$

16) $y = -5 + 9\,x - 5\,x^2 + 2\,x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{5}{6} \approx 0.833$

17) $y = 8 - 10\,x - 7\,x^2 - 2\,x^3$. $x_{\text{inf}} = -\frac{7}{6} \approx -1.167$

18) $y = -9 + 5\,x - 7\,x^2 + 8\,x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{7}{24} \approx 0.292$

19) $y = 10 - 5\,x + 8\,x^2 - 7\,x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{8}{21} \approx 0.381$

20) $y = 2 - 10\,x - 2\,x^2 - 4\,x^3$. $x_{\text{inf}} = -\frac{1}{6} \approx -0.167$

21) $y = -8 + 4\,x + 6\,x^2 - 10\,x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{1}{5} = 0.2$

22) $y = -8 + 9\,x + 2\,x^2 - 7\,x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{2}{21} \approx 0.095$

23) $y = 10 - 2\,x - 10\,x^2 - 3\,x^3$. $x_{\text{inf}} = -\frac{10}{9} \approx -1.111$

24) $y = -2 + 9\,x + 3\,x^2 - 3\,x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{1}{3} \approx 0.333$

25) $y = -11 - 4\,x + 5\,x^2 - 3\,x^3$. $x_{\text{inf}} = \frac{5}{9} \approx 0.556$

26) $y = 168\,x - 46\,x^2 + 3\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -3.619,\; x_{\text{inf},2} \approx 2.119$

27) $y = 54\,x - 39\,x^2 - 4\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -1.739,\; x_{\text{inf},2} \approx 3.739$

28) $y = 100\,x - 60\,x^2 + 3\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -4.0,\; x_{\text{inf},2} \approx 2.5$

29) $y = 128\,x - 16\,x^2 + 8\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -4.582,\; x_{\text{inf},2} \approx 0.582$

30) $y = 63\,x - 33\,x^2 + 1\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -2.608,\; x_{\text{inf},2} \approx 2.108$

31) $y = 729\,x - 81\,x^2 - 9\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -2.058,\; x_{\text{inf},2} \approx 6.558$

32) $y = 192\,x + 104\,x^2 + 18\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -6.208,\; x_{\text{inf},2} \approx -2.792$

33) $y = 320\,x + 144\,x^2 + 21\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -7.137$, $x_{\text{inf},2} \approx -3.363$

34) $y = 98\,x - 49\,x^2 - 2\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -2.401$, $x_{\text{inf},2} \approx 3.401$

35) $y = 216\,x - 66\,x^2 - 1\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -3.076$, $x_{\text{inf},2} \approx 3.576$

36) $y = 600\,x - 100\,x^2 - 6\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -2.849$, $x_{\text{inf},2} \approx 5.849$

37) $y = 150\,x - 65\,x^2 - 2\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -2.829$, $x_{\text{inf},2} \approx 3.829$

38) $y = 80\,x + 66\,x^2 - 15\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx 2.0$, $x_{\text{inf},2} \approx 5.5$

39) $y = 64\,x - 16\,x^2 - 4\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -0.915$, $x_{\text{inf},2} \approx 2.915$

40) $y = 108\,x - 3\,x^2 - 10\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -0.098$, $x_{\text{inf},2} \approx 5.098$

41) $y = 576\,x + 208\,x^2 + 25\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -8.347$, $x_{\text{inf},2} \approx -4.153$

42) $y = 392\,x + 161\,x^2 + 22\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -7.348$, $x_{\text{inf},2} \approx -3.652$

43) $y = 528\,x + 202\,x^2 + 25\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -8.573$, $x_{\text{inf},2} \approx -3.927$

44) $y = 84\,x - 37\,x^2 + 0\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -2.483$, $x_{\text{inf},2} \approx 2.483$

45) $y = 112\,x + 26\,x^2 - 13\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx 0.754$, $x_{\text{inf},2} \approx 5.746$

46) $y = 990\,x - 119\,x^2 + 8\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -6.882$, $x_{\text{inf},2} \approx 2.882$

47) $y = 300\,x - 100\,x^2 + 3\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -4.901$, $x_{\text{inf},2} \approx 3.401$

48) $y = 63\,x - 33\,x^2 - 1\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -2.108$, $x_{\text{inf},2} \approx 2.608$

49) $y = 648\,x - 81\,x^2 + 8\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -6.183$, $x_{\text{inf},2} \approx 2.183$

50) $y = 132\,x - 1\,x^2 - 12\,x^3 + x^4$. $x_{\text{inf},1} \approx -0.028$, $x_{\text{inf},2} \approx 6.028$

21.2.2 Trazado de curvas

Con la primera derivada de una función sabemos dónde es creciente o decreciente y dónde tiene puntos críticos, es decir, dónde deja de ser creciente y empieza a ser decreciente o viceversa.

Con la segunda derivada conocemos la concavidad de la función y sus puntos de inflexión, es decir, dónde cambia su concavidad.

Toda esta información nos ayuda a hacer bosquejos de la gráfica de una función rápidmente.

Ejemplo 1

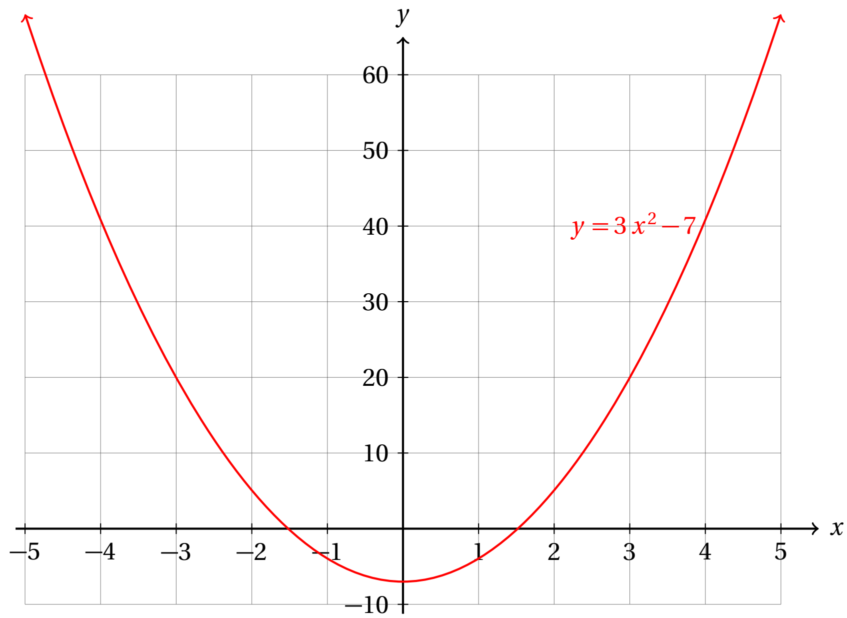
Realiza un bosquejo de la gráfica de la función:

$$y = x^3 - 7\,x + 6$$

- Empezamos calculando la primera derivada para conocer dónde es creciente y dónde es decreciente:

$$\frac{dy}{dx} = 3\,x^2 - 7$$

- Ahora graficamos la primera derivada de la función:



- Observa que la derivada tiene dos raíces, es decir, la función tiene dos puntos críticos.
- Calcularlos es sencillo: igualamos a cero la primera derivada y resolvemos para x:

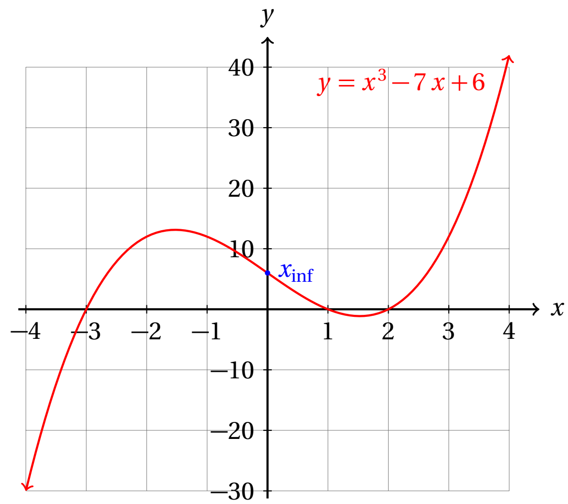
$$3x^2 - 7 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$$

- Antes de $-\sqrt{7/3}$, la primera derivada es positiva. Es decir, en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{7/3})$ la función es creciente.
- Igualmente, después de $\sqrt{7/3}$, la primera derivada es positiva también. Es decir, en el intervalo $(\sqrt{7/3}, \infty)$ la función es creciente.
- Por otra parte, en el intervalo $(-\sqrt{7/3}, \sqrt{7/3})$ la primera derivada es negativa. Esto es, la función es decreciente en el intervalo: $(-\sqrt{7/3}, \sqrt{7/3})$.
- La función tiene dos puntos críticos: $x_1 = -\sqrt{7/3}$ y $x_2 = \sqrt{7/3}$.
- Dado que antes de $-\sqrt{7/3}$ es creciente y después decreciente, el punto crítico es un máximo.
- Por otra parte, antes de $\sqrt{7/3}$ la función es decreciente y después es creciente, por lo que es un mínimo.
- Ahora vamos a calcular la segunda derivada de la función:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

- Cuando x es positiva, la segunda derivada es positiva. Esto nos indica que función tiene concavidad hacia arriba para $x > 0$.
- Y para $x < 0$ la función tiene concavidad hacia abajo.
- El único punto de inflexión de la función es $x = 0$. Es decir, la concavidad de la función solamente cambia una vez.

- Con esta información podemos hacer un bosquejo de la grafica de la función:



Ejemplo 2

Haz un bosquejo de la gráfica de la función:

$$y = x^3 - 13x - 12$$

utilizando la información obtenida con la primera y segunda derivadas.

- La primera derivada de la función es la siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 13$$

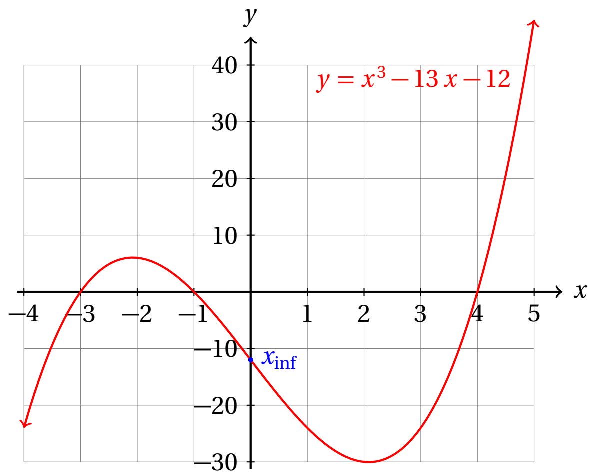
- La primera derivada es positiva (y por tanto, la función creciente) para:

$$3x^2 - 13 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 > \frac{13}{3} \qquad \Rightarrow \qquad x < -\sqrt{\frac{13}{3}},\ \text{y para } x > \sqrt{\frac{13}{3}}$$

- La primera derivada es negativa (y la función decreciente) para el intervalo $(-\sqrt{13/3}, \sqrt{13/3})$.
- Los puntos críticos de la función están en $x_1 = -\sqrt{13/3}$ y $x_2 = \sqrt{13/3}$.
- El primer punto crítico corresponde a un máximo, porque antes la función es creciente y después es decreciente.
- El segundo punto crítico es un mínimo, porque antes la función es decreciente y después es creciente.
- Ahora vamos a ver dónde cambia la concavidad de la función:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

- Al igual que en el ejemplo anterior, la función cambia de concavidad en $x = 0$.
- La gráfica de la función es la siguiente:



Realiza un bosquejo de la gráfica de la función:

$$y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27$$

utilizando la información obtenida de la primera y segunda derivadas.

Ejemplo 3

- La primera derivada de la función es:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x \cdot \left(x^2 - 6x + 9\right) = 4x(x-3)^2$$

- De donde, inmediatamente podemos calcular los puntos críticos de la función:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 3$$

- Nos vamos a dar cuenta con la segunda derivada si se tratan de máximos o mínimos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 48x + 36$$

- Vamos a evaluar los puntos críticos en la segunda derivada de la función:

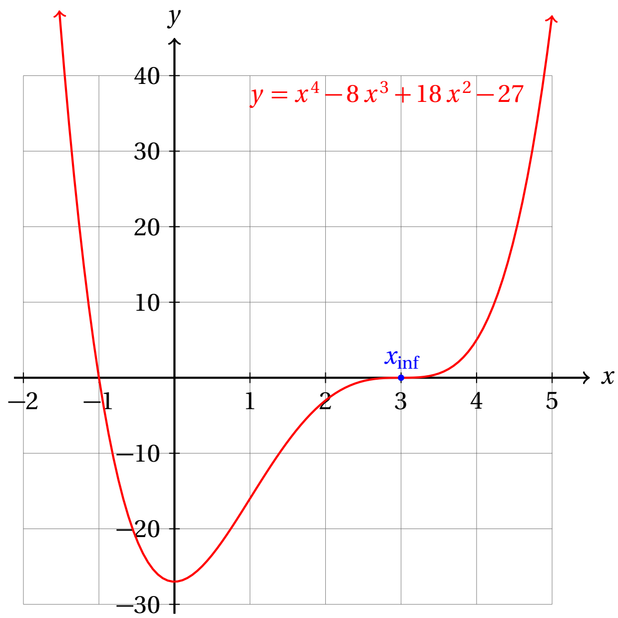
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 36 > 0$$

- Esto nos indica que el punto crítico $x_1 = 0$ es un mínimo.
- Entonces, antes de $x = 0$ la función es decreciente y después es creciente.
- Observa que $y(0) = -27$. Es decir, la ordenada al origen de la función es: $B(0, -27)$.
- Los siguientes dos puntos críticos son repetidos: $x_2 = x_3 = 3$.

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=3} = 0$$

Entonces, se trata de un punto de inflexión.

- Recuerda que después de $x = 0$ la función es creciente.
- Dado que $x = 3$ es un punto de inflexión, éste no es ni máximo ni mínimo.
- En otras palabras, la función es creciente tanto antes como después de $x = 3$.
- En este punto $(x = 3)$ solamente hay un cambio en la concavidad de la gráfica de la función.
- La gráfica de la función se da enseguida:



- De la gráfica se hace evidente que falta por calcular otro punto de inflexión que está entre $x = 0$ y $x = 3$.
- Para eso, vamos a igualar la segunda derivada a cero y a resolver:

$$\begin{aligned} x_{\text{inf}} &= \frac{-(-48) \pm \sqrt{(-48)^2 - 4(12)(36)}}{2(12)} \\ &= \frac{48 \pm \sqrt{2304 - (1728)}}{24} \\ &= \frac{48 \pm \sqrt{576}}{24} \end{aligned}$$

- Ya sabemos que $x = 3$ es un punto de inflexión, el otro es;

$$x_{\text{inf}} = \frac{48 - \sqrt{576}}{24} = \frac{48 - 24}{24} = 1$$

- Y hemos terminado.

Debes observar que la primera derivada y la segunda derivada nos dan información acerca del comportamiento de la función.

Por una parte, la primera derivada nos dice cómo crece o decrece la función, y dónde podría tener máximos, mínimos o puntos de inflexión.

La segunda derivada nos indica cómo cambia la primera derivada. Es decir, nos dice cómo se comporta la razón de cambio instantánea de la función.

Geométricamente, la segunda derivada nos dice cómo se comportan las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

Cuando la segunda derivada es positiva, las pendientes van creciendo. Cuando es negativa, las pendientes van decreciendo.

Ejemplo 4

Describe cómo se comporta la razón de crecimiento de la función:

$$y = x^3$$

- Empezamos calculando la primera derivada de la función:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

- Dado que x^2 siempre es positivo, independientemente del valor de x, la función siempre es creciente.

- Ahora vamos a ver qué tan rápido crece en diferentes intervalos.

- Para eso utilizaremos la segunda derivada de la función:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

- Cuando $x > 0$, la razón de crecimiento de la función es positiva.

- En otras palabras, la pendiente de la recta tangente va creciendo cada vez más cuando $x > 0$.

- Por otra parte, cuando $x < 0$ ocurre lo contrario: la pendiente de la recta tangente va decreciendo cada vez más.

- ¿Cómo es posible que la pendiente de la recta tangente vaya decreciendo siendo la función creciente siempre?

- La gráfica de la función $y = x^3$ nos lo explica de una manera visual.

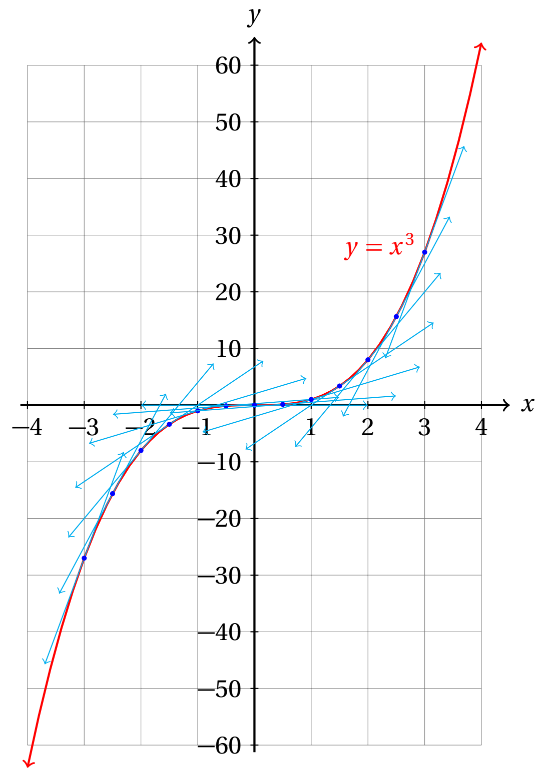
- La pendiente de la recta tangente a la función va decreciendo conforme nos acercamos a $x = 0$ y a partir de ese mismo punto la pendiente empieza a crecer.

- La concavidad de la función cambia en ese punto, porque es un punto de inflexión ($y''(0) = 0$).

- Además, las pendientes son siempre no negativas, debido a que la primera derivada de la función ($y' = 3x^2$) siempre es no negativa.

- En el único punto donde la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función es cero ocurre en el punto de inflexión, porque entonces, $y'' = 6x = 0$.

- Enseguida se muestra la gráfica de la función:



Ejemplo 5	Una partícula recorre $x(t) = t^3 - t^2 + t + 1$ metros en t segundos. i. Calcula la velocidad y aceleración de la partícula. ii. ¿En qué instantes (valores de t) la velocidad se hace cero? iii. ¿En qué instantes (valores de t) la aceleración se hace cero?

- Recuerda que la velocidad de la partícula se calcula con la primera derivada, mientras que la velocidad se calcula con la segunda derivada de la función.

- La velocidad $v(t)$, entonces, de la partícula es:

$$v(t) = \frac{dy}{dx} = 3t^2 - 2t + 1$$

- Y su aceleración $a(t)$, es:

$$a(t) = \frac{d^2y}{dx^2} = 6t - 2$$

- Para concer los valores de t para los cuales la velocidad se hace cero, se requiere igualar a cero la primera derivada y resolver para t:

$$v(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3t^2 - 2t + 1 = 0$$

- Para resolverla usamos la fórmula general:

$$\begin{aligned} v &= \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(3)(1)}}{2(3)} \\ &= \frac{2\pm\sqrt{4-(12)}}{6} \\ &= \frac{2\pm i\sqrt{8}}{6} \end{aligned}$$

- Entonces, dado que las dos raíces de la ecuación son complejas, la velocidad nunca se hace cero.
- Ahora vamos a calcular los valores de t cuando $a(t)=0$.

$$6t-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad t=\frac{1}{3}\approx 0.333$$

- Entonces, para $t=0.333$ segundos, la aceleración de la partícula es cero.
- Se te queda como ejercicio graficar la función de posición de la partícula con respecto al tiempo.

Grafica cada una de las siguientes funciones. **Ejercicios 21.2.2**

1) $y=-10+8x-9x^2+1x^3$.
2) $y=-10+11x+2x^2+7x^3$.
3) $y=-10+6x-8x^2-4x^3$.
4) $y=11-8x-2x^2+11x^3$.
5) $y=7+10x+2x^2-8x^3$.
6) $y=4+2x+1x^2+5x^3$.
7) $y=-9-1x-8x^2+10x^3$.
8) $y=-10-11x-4x^2+6x^3$.
9) $y=3+6x+2x^2-4x^3$.
10) $y=2-8x+6x^2-9x^3$.
11) $y=-10+7x+3x^2+11x^3$.
12) $y=-10-9x+10x^2-2x^3$.
13) $y=-8+7x-10x^2-3x^3$.
14) $y=-2+5x+1x^2-2x^3$.
15) $y=-4-6x+2x^2-5x^3$.
16) $y=2+7x-6x^2-3x^3$.
17) $y=-3-4x+4x^2+2x^3$.
18) $y=10-8x-5x^2+4x^3$.
19) $y=3-9x-7x^2+11x^3$.
20) $y=-8-10x-4x^2+3x^3$.
21) $y=-9+9x-11x^2-9x^3+3x^4$.
22) $y=-4+10x+7x^2-6x^3-11x^4$.
23) $y=-11-10x+8x^2+7x^3+10x^4$.
24) $y=6-5x-4x^2-8x^3-7x^4$.
25) $y=5-8x+3x^2+4x^3+2x^4$.
26) $y=-10+6x+4x^2+8x^3-11x^4$.
27) $y=-3+9x+9x^2+9x^3-9x^4$.
28) $y=3-7x+10x^2+5x^3+7x^4$.
29) $y=10-2x+11x^2-4x^3-1x^4$.
30) $y=6-5x+10x^2-3x^3+3x^4$.
31) $y=-3+9x-4x^2+2x^3-7x^4$.
32) $y=-1+5x-4x^2+5x^3-6x^4$.
33) $y=-8-4x-2x^2+10x^3+10x^4$.
34) $y=6+10x+10x^2+10x^3-1x^4$.
35) $y=10+9x+3x^2+4x^3-10x^4$.
36) $y=2-7x+4x^2-4x^3-2x^4$.

37) $y = -3 - 1\,x + 10\,x^2 + 10\,x^3 - 9\,x^4$.

38) $y = 8 - 7\,x + 10\,x^2 + 6\,x^3 - 9\,x^4$.

39) $y = -4 + 10\,x + 8\,x^2 - 2\,x^3 - 9\,x^4$.

40) $y = 7 + 8\,x + 2\,x^2 + 4\,x^3 + 9\,x^4$.

41) $y = 5 + 5\,x - 5\,x^2 - 6\,x^3 - 11\,x^4$.

42) $y = -9 + 2\,x + 10\,x^2 + 7\,x^3 - 11\,x^4$.

43) $y = 5 + 1\,x + 1\,x^2 + 2\,x^3 - 2\,x^4$.

44) $y = -9 + 10\,x + 10\,x^2 - 4\,x^3 - 7\,x^4$.

45) $y = 9 - 4\,x - 7\,x^2 + 7\,x^3 - 3\,x^4$.

46) $y = 3\,e^{6x}$.

47) $y = 3\,\ln(5x)$.

48) $y = 3\,\ln(9x)$.

49) $y = 6\,e^{3x}$.

50) $y = 10\,\ln(8x)$.

51) $y = 5\tan(10x)$.

52) $y = 3\,\ln(7x)$.

53) $y = 4\cos(8x)$.

54) $y = 3\,e^{8x}$.

55) $y = 8\,e^{4x}$.

56) $y = 6\cos(6x)$.

57) $y = 7\,\ln(7x)$.

58) $y = 4\,\ln(3x)$.

59) $y = 3\,e^{2x}$.

60) $y = 3\,e^{7x}$.

61) $y = 5\sin(7x)$.

62) $y = 6\,\ln(9x)$.

63) $y = 5\,e^{9x}$.

64) $y = 3\tan(9x)$.

65) $y = 4\,e^{8x}$.

66) $y = 9\,\ln(4x)$.

67) $y = \dfrac{4\sin(5x)}{10\,\ln(3x)}$.

68) $y = 2\tan(4x)$.

69) $y = \dfrac{2\tan(3x)}{3\,\ln(4x)}$.

70) $y = \dfrac{3\,e^{4x}}{2\sin(4x)}$.

71) $y = \dfrac{9\cos(9x)}{4\,\ln(7x)}$.

72) $y = \dfrac{8\,e^{7x}}{4\sin(5x)}$.

73) $y = \dfrac{10\,e^{7x}}{9\tan(3x)}$.

21.3 Aplicaciones de la derivada

En esta sección vamos a dedicarnos a calcular los máximos y mínimos de funciones con diferentes propósitos.

En muchas situaciones de la vida real se requiere de la optimización de una cantidad. Otras veces, la naturaleza opera de manera que minimiza algo, por ejemplo, la electricidad siempre pasa a través del medio que ofrece mínima resistencia, la luz, al pasar de un medio a otro, siempre sigue una trayectoria que hace mínimo el tiempo de trayecto de un punto a otro, etc.

En este tipo de problemas siempre es recomendable primero identificar la variable que se desea minimizar (o maximizar), luego hacer un modelo matemático del problema relacionando las variables que están involucradas en el problema. Después optimizar (minimizar o maximizar) la cantidad que deseamos.

21.3.1 Problemas prácticos de máximos y mínimos

Encuentra dos números que su suma sea 10 y su producto sea máximo. **Ejemplo 1**

- Sean x e y los dos números buscados.
- Dado que su suma es 10, se cumple: $x + y = 10$.
- De esta ecuación podemos despejar y y obtener: $y = 10 - x$.
- En palabras esto nos dice que si un número es x el otro debe ser $10 - x$.
- Eso es obvio, pues los dos números suman 10.
- Queremos que el producto $p = x \cdot y$ sea máximo. Entonces,

$$p = x \cdot y = x \cdot (10 - x) = 10\,x - x^2$$

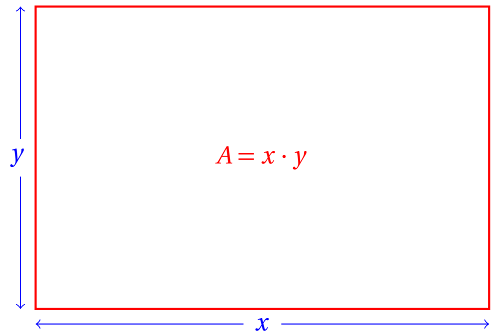
- Para maximizar la función derivamos, igualamos a cero y resolvemos para x:

$$\frac{dp}{dx} = 10 - 2\,x \qquad \Rightarrow \qquad x = 5$$

- Si la suma de dos números es diez y uno de ellos es 5, pues el otro también debe ser cinco.
- Verifica este resultado calculando los productos de los números enteros positivos que sumados dan diez.

Un granjero tiene 250 metros de malla para cercar un corral para caballos. Él desea que el corral sea rectangular y que tenga la mayor superficie posible. ¿Cuáles son las dimensiones de ese corral? **Ejemplo 2**

- Empezamos haciendo un dibujo para ilustrar la situación:



- Ya sabemos que tiene 250 metros de malla.
- Entonces, el perímetro del corral será esa distancia.
- Matemáticamente y de acuerdo a la figura tenemos:

$$2x + 2y = 250 \qquad \Rightarrow \qquad x + y = 125$$

- De esta ecuación podemos despejar y y obtener:

$$y = 125 - x$$

- Esto nos permite reescribir el área del corral como:

$$A = x \cdot y = x \cdot (125 - x) = 125x - x^2$$

- Nosotros queremos maximizar el área del corral, así que:

$$\frac{dA}{dx} = 125 - 2x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{125}{2} = 62.5 \text{ metros.}$$

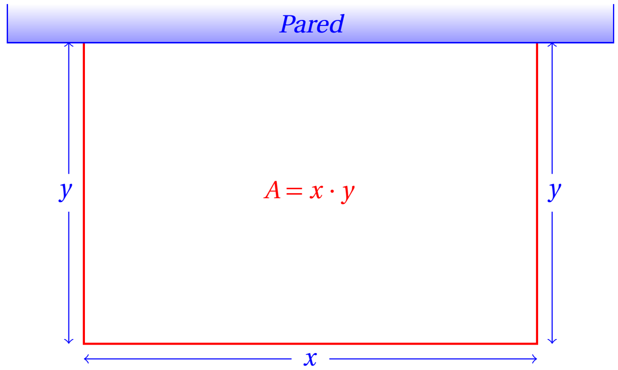
- La base del rectángulo, es decir, el largo del corral será de 62.5 metros.
- La altura del rectángulo, es decir, el ancho del corral será de:

$$y = 125 - x = 125 - 62.5 = 62.5 \text{ metros.}$$

- En otras palabras, el corral que tiene la mayor superficie es un cuadrado donde cada lado mide 62.5 metros.
- El perímetro del corral es: $(4)(62.5) = 250$ metros.
- El área del corral es: $(62.5)(62.5) = 3906.25$ metros cuadrados.

Ejemplo 3 Considerando el problema del ejemplo anterior, ahora el granjero decide colocar el corral de manera que una pared que tiene de un granero sirva como una de las paredes para aumentar el área para los caballos en el corral. ¿Qué dimensiones tendrá ahora el corral?

- Ahora tenemos la siguiente situación geométrica:



- Ahora los 250 metros de malla que tiene para cercar tendrán que cubrir los 3 lados indicados en la figura.
- Entonces, la ecuación del perímetro será ahora:

$$x + 2\,y = 250 \qquad \Rightarrow \qquad y = 125 - \frac{x}{2}$$

- Y la fórmula para el área del corral será:

$$A = x \cdot y = x \cdot (125 - \frac{x}{2}) = 125\,x - \frac{x^2}{2}$$

- Para calcular el máximo de esta función, derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{d\,A}{d\,x} = 125 - x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 125 \text{ metros.}$$

- Ahora podemos calcular el valor de y:

$$y = 125 - \frac{x}{2} = 125 - \frac{125}{2} = 62.5 \text{ metros.}$$

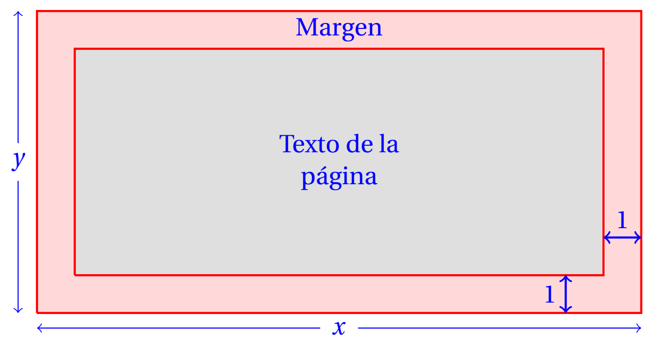
- Y el área del nuevo corral será:

$$A = x \cdot y = (125)(62.5) = 7\,812.5 \text{ metros cuadrados.}$$

- Con lo que terminamos.
- Verifica que el punto crítico que hemos encontrado se trata de un máximo.

El diseño de la página de un libro contempla un margen alrededor del texto de una pulgada de ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que el área de texto sea la mayor posible si el área total de la página será de 120 pulgadas cuadradas? **Ejemplo 4**

- Este problema involucra ahora dos áreas.
- El área que deseamos maximizar es el área donde estará el texto del libro.
- La siguiente figura muestra gráficamente la situación:



- El área de toda la página es: $A_h = x \cdot y = 120$.
- De aquí podemos despejar y para obtener: $y = 120/x$.
- Por otra parte, el área de texto que contendrá el libro es: $A_t = (x-1)(y-1)$.
- Ahora sustituimos $y = 120/x$ en la fórmula para el área de texto:

$$A_t = (x-1)(y-1) = (x-1)\left(\frac{120}{x} - 1\right) = \frac{-x^2 + 121\,x - 120}{x} = -x + 121 - \frac{120}{x}$$

- Para calcular las dimensiones de la hoja, debemos derivar la función, igualar a cero y resolver para x:

$$\frac{dA_t}{dt} = -1 + \frac{120}{x^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{120} \approx 10.95445$$

- La otra variable a encontramos con la fórmula: $y = 120/x$:

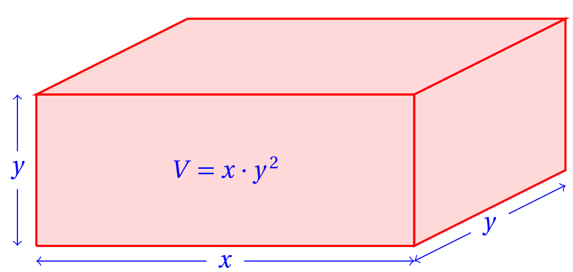
$$y = 120/\sqrt{120} = \sqrt{120} \approx 10.95445$$

- Entonces, la hoja debe ser cuadrada.

Ejemplo 5

Se requiere del envío de unos paquetes de esponja para la fabricación de mochilas especiales. Para su envío se deben diseñar y construir cajas con 20 metros cuadrados de material en su construcción y debe tener al menos una cara cuadrada. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que tenga el máximo volumen?

- Tenemos la siguiente situación geométrica:



- Necesitamos maximizar el volumen de la caja usando 20 m^2 de superficie de material en su construcción.

- Primero encontramos la superficie que se utiliza en su construcción:

$$A = 2\,y^2 + 4\,x\,y = 20 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 + 2\,x\,y = 10$$

- Ahora que conocemos cómo están relacionadas las variables x e y podemos despejar x y obtenemos:

$$x = \frac{10 - y^2}{2\,y}$$

- Este resultado nos será útil, porque si sustituimos este valor en lugar de x en la fórmula del volumen de la caja obtenemos una función de una sola variable:

$$V = x \cdot y^2 = \left(\frac{10 - y^2}{2\,y}\right) \cdot y^2 = 5\,y - \frac{y^3}{2}$$

- Ahora podemos calcular la derivada de esta función y calcular su máximo:

$$\frac{d\,V}{d\,y} = 5 - \frac{3}{2}\,y^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$$

- Como no podemos asignar un valor negativo a una de las dimensiones, tenemos que $y \approx 1.8257$ metros.
- La otra dimensión es:

$$x = \frac{10 - \frac{10}{3}}{2\sqrt{\frac{10}{3}}} = \frac{10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)}{2\sqrt{\frac{10}{3}}} = \frac{5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{10}{3}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{10}{3}}}{\sqrt{\frac{10}{3}}} = \sqrt{\frac{10}{3}} \approx 1.8257$$

- Es decir, $x = y = \sqrt{10/3} \approx 1.8257$.
- En otras palabras, la caja debe ser un cubo perfecto para que tenga el máximo volumen.
- Para verificar que en realidad se trata de un máximo, calculamos la segunda derivada y evaluamos en $x = 1.8257$:

$$\frac{d^2\,V}{d\,y^2} = -3\,y$$

Como $y > 0$, tenemos que $-3\,y < 0$: se trata de un máximo.

Un profesor de física lanza una moneda al aire de forma que su altura h medida en metros desde el suelo t segundos después de haber sido lanzada, está dada por: $$h(t) = 1.85 + 12\,t - 4.905\,t^2$$ ¿En qué momento la moneda alcanza la máxima altura?	**Ejemplo 6**

- El problema pide que calculemos el instante en que la moneda alcanza la máxima altura.
- Para eso tenemos que derivar la función e igualar a cero:

$$\frac{d\,h}{d\,t} = 12 - 9.81\,t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{12}{9.81} \approx 1.223 \text{ segundos.}$$

- Observa que la máxima altura que alcanza la piedra es:

$$h(t) = 1.85 + 12(1.223) - 4.905(1.223)^2 = 23.947 \text{ metros.}$$

- Eso debe ocurrir cuando la piedra deje de subir y empiece a bajar.
- Es decir, cuando la velocidad de la piedra sea cero.
- Y ya sabemos que la velocidad de la piedra se calcula con la derivada de la posición.
- Entonces, el problema físico se apega al problema geométrico.
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función se hace cero cuando tiene un máximo.
- Que corresponde a la velocidad de la piedra igual a cero.
- Para verificar que se trata de un máximo podemos utilizar el criterio de la segunda derivada:

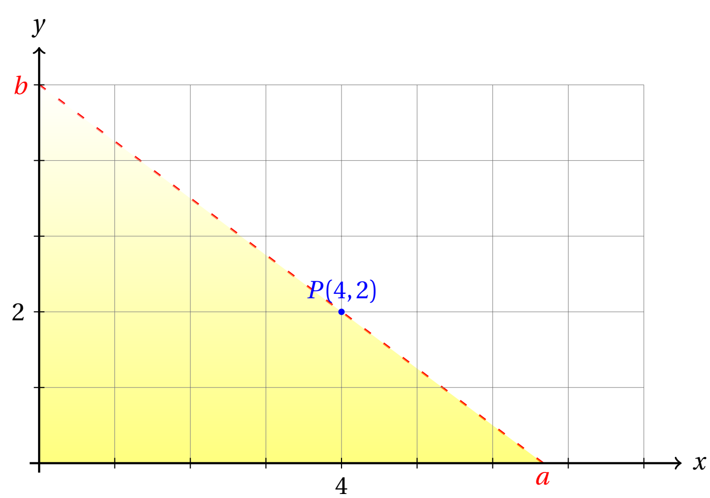
$$\frac{d^2h}{dt^2} = -9.81 < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{es un máximo.}$$

- Y hemos terminado.
- Se te queda como ejercicio graficar $h(t) = 1.85 + 12\,t - 4.905\,t^2$.

Ejemplo 7

Una recta pasa por el punto $P(6,2)$ y forma un triángulo en el primer cuadrante con sus vértices en las intersecciones de la recta con los ejes coordinados en los puntos: $M(a,0)$ y $N(0,b)$. Calcula la ecuación de la recta que hace que el área del triángulo sea mínima.

- Empezamos dibujando la situación en un plano cartesiano:



- Sabemos que las intersecciones de la recta con los ejes son los puntos: $M(a,0)$ y $N(0,b)$.
- Con ellos podemos calcular la pendiente de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b}{a}$$

- Ahora podemos calcular la ecuación de la recta, dado que ya conocemos su pendiente y su ordenada al origen:

$$\begin{aligned} y &= m\cdot x + b\\ y &= -\frac{b}{a}\cdot x + b\\ y &= b\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right) = b\cdot\left(\frac{a-x}{a}\right) \end{aligned}$$

- Como pasa por el punto $P(4,2)$, se cumple:

$$\begin{aligned} 2 &= b\cdot\left(\frac{a-4}{a}\right)\\ \frac{2\,a}{a-4} &= b \end{aligned}$$

- El área del triángulo es $A = a\cdot b$, porque la base es a y su altura b. Entonces,

$$A = a\cdot b = a\cdot\left(\frac{2\,a}{a-4}\right) = \frac{2\,a^2}{a-4}$$

- Para encontrar la mínima área derivamos y resolvemos para a.

- Definimos: $u = 2\,a^2$, y $v = a-4$. Entonces, $d\,u = 4\,a$ y $d\,v = 1$.

- Sustituyendo estos resultados en la regla para derivar un cociente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\,A}{d\,b} &= \frac{(a-4)\cdot(4a)-(2\,a^2)\cdot(1)}{(a-4)^2}\\ &= \frac{4\,a^2-16\,a-2\,a^2}{(a-4)^2}\\ &= \frac{2\,a^2-16\,a}{(a-4)^2} = 0 \qquad \Rightarrow\\ 2\,a^2 &= 16\,a \qquad \Rightarrow \qquad a = 8 \end{aligned}$$

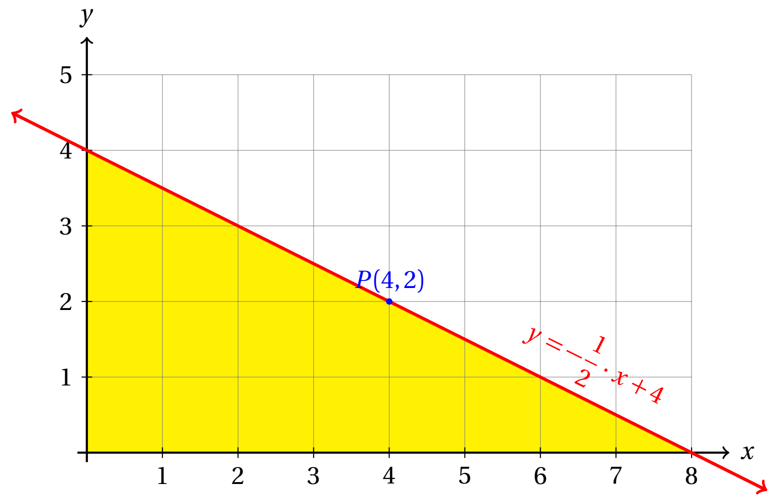
- Ahora que conocemos el valor de a podemos calcular el de b:

$$b = \frac{2\,a}{a-4} = \frac{2(8)}{8-4} = 4$$

- Entonces, la ecuación de la recta es que pasa por el punto $P(4,2)$ y que forma un triángulo en el primer cuadrante con mínima área es:

$$y = -\frac{4}{8}\cdot x + 4 = -\frac{1}{2}\cdot x + 4$$

- La gráfica de esta recta es la siguiente:



Ejemplo 8 ¿Qué número excede a su cuadrado en la mayor cantidad?

- Si observas, para $x > 1$, $x^2 > x$, por lo que no esperamos que el resultado de este problema sea un número mayo a 1.
- Por otra parte, si x está entre cero y uno, entonces, $x^2 < x$.
- La función que calcula el excedente de un número con su cuadrado es:

$$y = x - x^2$$

- Necesitamos calcular su máximo:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 2x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{2}$$

- Entonces, $x = 0.5$ es el número que excede a su cuadrado en la mayor cantidad.
- Verifica este resultado realizando los cálculos con unos cuantos valores diferentes entre cero y uno.

Ejemplo 9 Encuentra los dos números x, y tales que $x + y = 10$, y además la suma de sus cuadrados: $M = x^2 + y^2$ es mínima.

- Como los dos números suman 10, si uno de ellos es x, el otro es: $10 - x$.
- Queremos minimizar la suma:

$$\begin{aligned} M &= x^2 + y^2 \\ &= x^2 + (10 - x)^2 \\ &= x^2 + 100 - 20x + x^2 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 \end{aligned}$$

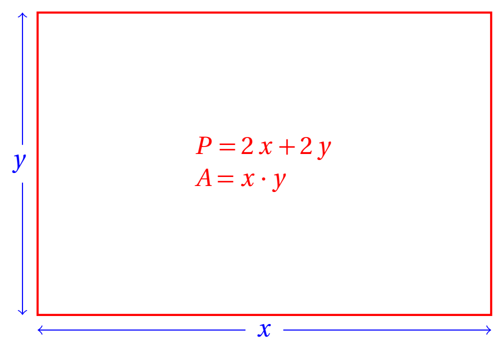
- Para calcular el mínimo de esta suma, derivamos respecto a x, igualamos a cero y resolvemos:

$$\frac{dM}{dx} = 4x - 20 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 5$$

- Entonces, $y = 5$, y el mínimo valor que toma M es: $M = 5^2 + 5^2 = 50$.

Se desea dibujar un rectángulo con perímetro P con mayor área posible. Demuestra que dicho rectángulo es un cuadrado. **Ejemplo 10**

- Sean x el largo y y el ancho del rectángulo:



- Su perímetro $P = 2x + 2y$. De donde:

$$y = \frac{P}{2} - x$$

- El área del rectángulo es:

$$A = x \cdot y = x \cdot \left(\frac{P}{2} - x\right) = \frac{Px}{2} - x^2$$

- Para calcular el largo del rectángulo con máxima área, derivamos $A(x)$ respecto de x, igualamos a cero y resolvemos:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{P}{2} - 2x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{P}{4}$$

- Es decir, el largo es igual a la cuarta parte del perímetro.
- El ancho del rectángulo es:

$$y = \frac{P}{2} - x = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4}$$

- Entonces, el largo y el ancho miden exactamente igual.
- En otras palabras, el rectángulo tiene sus cuatro lados iguales y es un cuadrado.

Ejercicios 21.3.1 Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

1) Encuentra dos números cuya suma sea 30 y cuyo producto sea máximo
2) ¿Qué número excede a su cubo en la mayor cantidad?
3) Encuentra dos números positivos cuyo producto sea 20 y la suma de sus cuadrados sea mínima.
4) Sea x un número positivo. Demuestra que $x + 1/x$ nunca será menor a 2.
5) Un granjero dispone de 1 200 metros de cerca para limitar un terreno rectangular contiguo a un río de curso rectilíneo. No se requiere cercar en la orilla del río. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno con área máxima?
6) Un pedazo de estambre de 50 centímetros de largo se corta en dos partes; una parte se dobla para formar un cuadrado, y la otra para formar una circunferencia. ¿A qué distancia de una de las orillas se debe hacer el corte para que la suma de las áreas del cuadrado y de la circunferencia sea el máximo?
7) ¿Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de área $A = 2\,400$ m^2 que requiere la menor cantidad de cercado?
8) Demuestra que de todos los rectángulos con un área fija A, el de menor perímetro es el cuadrado.
9) Una página impresa debe contener 432 cm^2 de material impreso. Debe tener margenes de 3 cm a los lados y de 2 cm arriba y abajo. ¿Cuáles han de ser las dimensiones de la página para que la cantidad del papel usado sea mínima?
10) Una hoja de volante debe contener 50 pulgadas cuadradas de material escrito, con un margen superior e inferior de 2 cm y otro a cada lado de 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja que requiere la menor cantidad de papel.
11) Calcula las dimensiones de la caja con mayor volumen que se puede construir de una pieza cuadrada de cartón de 100 centímetros de lado cortando cuadrados iguales de cada esquina y doblando hacia arriba para obtener las otras caras de la caja.
12) Calcula las dimensiones de la caja con mayor volumen que se puede construir de una pieza rectangular de cartón de 120 cm $\times$ 150 cm cortando cuadrados iguales de cada esquina y doblando hacia arriba para obtener las otras caras de la caja.
13) Se requiere fabricar una lata cilíndrica para almacenar 20 L de aceite. Encontrar las dimensiones que minimizan el costo del metal requerido para hacer el envase. **Nota:** 1 L = 1 000 cm^3 = 1 dm^3.
14) Encuentra el volumen máximo que puede tener un cilindro circular recto para que ocupe 10 m^2 de lámina en su construcción.
15) Se hace una caja abierta de una hoja metálica rectangular de 32×60 centímetros cuadrados, cortando de cada esquina cuadrados iguales y pegando hacia arriba para obtener las otras caras de la caja. Calcula las dimensiones de la caja con mayor volumen que se puede construir.
16) Se va a construir una ventana en forma de rectángulo coronado por un semicírculo cuyo diámetro es igual al ancho del rectángulo. Si el perímetro de la ventana es 6 metros, ¿qué dimensiones admitirán la mayor iluminación?
17) Se necesita una caja sin tapa con una capacidad de 2 500 cm^3. El largo de la caja debe ser el triple del ancho. Calcula las dimensiones de la caja que requieren la menor cantidad de material.
18) Encuentra el punto de la parábola $4\,y = x^2$ que está más próximo al punto $P(0,4)$.

19) Encuentra los puntos de la elipse $5x^2 + 9y^2 = 45$ que están más cerca del punto $P(3,0)$.

20) Encuentra el área máxima de un rectángulo inscrito en un semicírculo de radio $r = 10$ cm.

21) Se va a construir un embalaje con tapa para naranjas para contener 12 m^3. Se va a dividir en dos partes mediante una separación paralela a sus extremos cuadrados. Encuentra las dimensiones del embalaje que requiere la menor cantidad de material.

22) Se va a construir un calentador para agua en forma de un cilindro circular recto con eje vertical, usando para ello una base de cobre y lados de hojalata. Si el cobre cuesta 5 veces lo que vale la hojalata, calcule la razón de la altura h al radio r que hará que el costo sea mínimo cuando el volumen V es constante.

23) Un triángulo tiene dos de sus lados de longitudes a y b y un ángulo γ comprendido entre ellos. Determine el valor de γ para que el área del triángulo sea máxima.

24) Demuestra que el mayor posible valor de $\sin\theta - \cos\theta$ es $\sqrt{2}$.
Sugerencia: Los valores de $|\sin\theta|$ y $|\cos\theta|$ se hacen iguales cuando $\theta = 45, 135, 225$ y 315 grados.

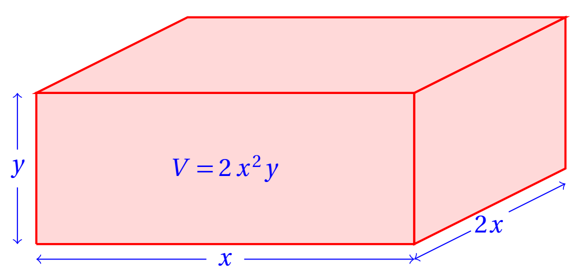
21.3.2 Aplicaciones en ciencias naturales, económico-administrativas y sociales

Ya hemos resuelto algunos problemas aplicados a las ciencias naturales, así que aquí nos enfocaremos más a problemas de economía, administración y ciencias sociales.

Ejemplo 1

Se va a construir una caja rectangular que tenga un volumen de 256 cm^3. Su base debe ser doble de largo que de ancho. El material de la tapa cuesta \$0.10 por centímetro cuadrado y el de los lados, \$0.05 por centímetro cuadrado. Encuentra las dimensiones que hagan el costo mínimo.

- Empezamos con un diagrama para representar la situación:



- El área de la base y la tapa juntas es:

$$A_b = 2x^2 + 2x^2 = 4x^2$$

- El costo de este material es: $0.4x^2$ pesos, porque cada centímetro cuadrado cuesta 0.1 pesos.

- El área de las 4 caras laterales de la caja es:

$$A_c = 2xy + 4xy = 6xy$$

- Y tienen un costo de: $0.3\,x\,y$ pesos.

- El volumen total de la caja es de 256 cm^3, así que:

$$V = 2\,x^2 y = 256 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{256}{2\,x^2} = \frac{128}{x^2}$$

- Así que el costo total del material requerido para construir la caja es:

$$\begin{aligned} C = Ab + A_c &= 0.4\,x^2 + 0.3\,x\,y \\ &= 0.4\,x^2 + 0.3\,x \cdot \left(\frac{128}{x^2}\right) \\ &= 0.4\,x^2 + \frac{38.4}{x} \end{aligned}$$

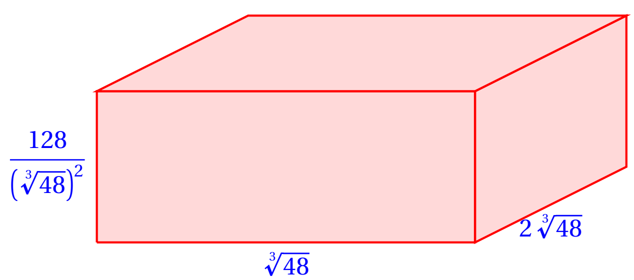
- Ahora podemos calcular el mínimo:

$$\frac{dC}{dx} = 0.8\,x - \frac{38.4}{x^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt[3]{48} \approx 3.6342$$

- Entonces, las dimensiones de la caja son: $\sqrt[3]{48}$, $2\sqrt[3]{48}$ y

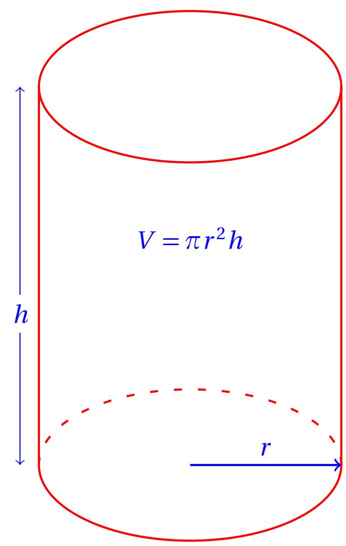
$$y = \frac{128}{x^2} = \frac{128}{\left(\sqrt[3]{48}\right)^2} \approx 9.6913$$

- Entoces, la caja con mínimo costo en materiales es:



Ejemplo 2	Un tanque de forma cilindrica circular recta, sin tapa y con base horizontal ha de contener 400 litros. El materia de la base cuesta el doble por metro cuadrado que el de los lados. Calcule las dimensiones del tanque más económico. **Nota:** 1 litro equivale a 1 dm^3.

- Empezamos con el diagrama que ilustra la situación:



- Definimos como c el costo por unidad de superficie al material para las paredes del cilindro y $2\,c$ al del fondo.
- Utilizaremos r y h medido en decímetros, para simplificar los cálculos.
- Así, el volumen del cilindro estará en decímetros cúbicos, es decir, en litros.
- El área de material utilizado en la base es:

$$A_b = \pi r^2$$

- El material para la base costará: $C_b = 2\,c\,\pi r^2$.
- El área de material requerido para las paredes del cilindro es:

$$A_p = 2\pi r h$$

- Y su costo es $C_p = 2\,c\,\pi r h$.
- Pero el volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h = 400 \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{400}{\pi r^2}$$

- Entonces, el costo del material requerido para la construcción de ese cilindro es:

$$\begin{aligned} C = C_b + C_p &= 2\,c\,\pi r^2 + 2\,c\,\pi r h \\ &= 2\,c\,\pi r^2 + 2\,c\,\pi r \cdot \left(\frac{400}{\pi r^2}\right) \\ C(r) &= 2\,c\,\pi r^2 + \frac{800\,c}{r} \end{aligned}$$

- Ahora podemos calcular el costo mínimo:

$$\frac{dC}{dr} = 4\,c\,\pi r - \frac{800\,c}{r^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 3.9929$$

- Y la altura del cilindro debe ser:

$$h = \frac{400}{\pi r^2} = \frac{400}{\pi\left(\sqrt[3]{200/\pi}\right)^2} \approx 7.98589$$

- Verifica que el volumen del cilindro con estas dimensiones es 400 dm^3.

Ejemplo 3

El costo de un inventario x en una cadena de comidas está dado por:

$$I(x) = \frac{70\,000}{x} + 0.25 \cdot x$$

¿Cuál debe ser su inventario mensual para minimizar el costo?

- Para conocer el mínimo costo de inventario derivamos, igualamos a cero y resolvemos para x:

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{70\,000}{x^2} + 0.25 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{28\,000} \approx 167.33$$

- Se sugiere que tenga un inventario de 167 productos.

Definición 1

FUNCIÓN DE COSTO
La función de costo $C = f(x)$ indica el costo total de producción al producir x artículos.

Definición 2

FUNCIÓN DE INGRESO
La función de ingreso $I = f(x)$ indica el ingreso total de vender x artículos.

Definición 3

FUNCIÓN DE UTILIDAD
La función de utilidad se define como la diferencia entre las funciones de ingreso y de costo:

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

Para algunos problemas de economía y administración se utiliz muy frecuentemente la palabra «*marginal*».

Esta palabra se refiere a: «*para el siguiente producto*». Por ejemplo, la utilidad marginal se refiere a la utilidad que obtendrán si venden un producto más; el costo marginal es el costo de producir un producto más, etc.

En sí, la palabra *marginal* se refiere a una razón de cambio promedio medida en un punto dado, que puede aproximarse a través de la derivada evaluada en ese punto.

Definición 4

INGRESO MARGINAL
Es la razón de cambio instantánea del ingreso con respecto a la cantidad de unidades vendidas.

Definición 5

UTILIDAD MARGINAL
Es la razón de cambio instantánea de la utilidad con respecto a la cantidad de unidades vendidas.

Una compañía fabricante de vestidos ha encontrado que la utilidad de producir x vestidos está dada por: $$U(x)=\frac{1\,200}{\sqrt{x^2+25}}-150$$ Calcula la utilidad marginal.	**Ejemplo 4**

- La utilidad marginal es la utilidad que obtedrán al vender un producto más.
- Es decir, si al vender 200 vestidos obtengo en promedio una utilidad de \$12 pesos por vestido, ¿qué utilidad obtendré por vender un vestido más?
- Esto se calcula con la derivada, pues se trata de la razón de cambio unitaria en un punto dado:

$$\frac{dU}{dx}=-\frac{1\,200\,x}{(x^2+25)^{3/2}}$$

La función de ingreso por la venta de x calculadoras científicas en total es: $$I(x)=50+250\,x-0.25\,x^2$$ Calcula el ingreso marginal con $x=100$. Compara este resultado con $I(101)-I(100)$.	**Ejemplo 5**

- Primero calculamos el ingreso marginal:

$$\frac{dI}{dx}=250-0.5\,x$$

- El ingreso marginal de vender la calculadora 101 es:

$$\left.\frac{dI}{dx}\right|_{x=100}=250-0.5(100)=200$$

- Por otra parte,

$$\begin{aligned}
I(101) &= 50+250(101)-0.25(101)^2=22794.75\\
I(100) &= 50+250(100)-0.25(100)^2=22\,550\\
I(101)-I(100) &= 22\,794.75-22\,550=199.75
\end{aligned}$$

- ¿Qué concluyes?

Una compañía ha encontrado que las funciones de ingreso $I(x)$ y de costo $C(x)$ para un ventilador de pedestal doméstico son: $$\begin{aligned} I(x) &= 250\,x-0.5\,x^2\\ C(x) &= 1\,200+125\,x+0.05\,x^2 \end{aligned}$$ Calcula la cantidad x de ventiladores que deben producir para obtener la máxima utilidad.	**Ejemplo 6**

- Por definición, la utilidad $U(x)$ es igual a la diferencia del ingreso y el costo:

$$\begin{aligned} U(x) &= I(x) - C(x) \\ &= 250\,x - 0.5\,x^2 - 1\,200 + 129\,x + 0.05\,x^2 \\ &= -1\,200 + 121\,x - 0.55\,x^2 \end{aligned}$$

- Evidentemente, esta función tiene un máximo, pues es una parábola que abre hacia abajo.
- Ahora calculamos el máximo:

$$\frac{dU}{dx} = 121 - 1.1\,x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 110$$

- Se recomienda que produzcan 110 ventiladores para obtener la mayor utilidad.

Obviamente, lo mejor sería conocer la utilidad de vender un producto en función de su precio.

Esto se puede lograr algunas veces, y el siguiente ejemplo muestra cómo determinar el precio que maximiza la utilidad.

Ejemplo 7

La utilidad U que obtiene una compañía al vender evaluaciones por Internet, cada una a p pesos, está dada por:

$$U(p) = -1.25\,p^2 + 635\,p - 120$$

¿A qué precio deben ofertar las evaluaciones para obtener la mayor utilidad?

- Debemos calcular el máximo de U en función de p.

$$\frac{dU}{dp} = 635 - 2.5\,p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{635}{2.5} = 254$$

- Al vender a \$254.00 pesos cada evaluación, la compañía obtendrá la mayor utilidad.

Ejemplo 8

La utilidad $U(x)$ de producir x reguladores de voltaje se puede calcular con:

$$U(x) = \frac{50\,000}{x} + 5\,x$$

Calcula:

i. la utilidad marginal

ii. el número de reguladores de voltaje que deben producir para maximizar la utilidad.

- Empezamos calculando la utilidad marginal:

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{50\,000}{x^2} + 5$$

- Para calcular el número de reguladores de voltaje que deben producir para maximizar la utilidad, igualamos a cero el resultado anterior y resolvemos para x:

$$-\frac{50\,000}{x^2} + 5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = \frac{50\,000}{5} = 10\,000$$

- Esto significa que deben producir $x=\sqrt{10\,000}=100$ reguladores de voltaje para obtener la mayor utilidad posible.

Un fabricante de altavoces para computadora ha encontrado que el precio p y el número x de altavoces del modelo $SR-71$ que logra vender a ese precio están relacionados por la expresión:

$$p=500-\frac{x}{2}$$

Por otra parte, saben que el costo C de producir x de esos altavoces viene dado por:

$$C(x)=12\,000+125\,x-0.001\,x^2$$

i. Determina x como una función de p

ii. Expresa $C(x)$ como una función de p

iii. Calcula el valor de p que minimiza el costo de producción.

Ejemplo 9

- Para escribir x en términos de p, debemos despejar:

$$\begin{aligned} p &= 500-\frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} &= 500-p \\ x &= 1\,000-2\,p \end{aligned}$$

- Ahora vamos a sustituir este resultado en la expresión para $C(x)$:

$$\begin{aligned} C(x) &= 12\,000+125\,x+0.001\,x^2 \\ &= 12\,000+12\left(1\,000-2\,p\right)+0.001(1\,000-2\,p)^2 \\ &= 24\,000-24\,p+0.001\,(10^6-4\,000\,p+4\,p^2) \\ &= 24\,000-24\,p+1\,000-4\,p+0.004\,p^2 \\ &= 25\,000-28\,p+0.004\,p^2 \end{aligned}$$

- Para minimizar el costo, derivamos $C(p)$ respecto de p, igualamos a cero y resolvemos:

$$\frac{dC}{dp}=-28+0.008\,p=0 \qquad \Rightarrow \qquad p=3\,500$$

- Esto significa que debe venderlos a \$3 500.00 pesos para obtener la mayor utilidad posible.
- Observando la función de demanda que relaciona a x y a p, ¿crees que esto es posible?

La utilidad U de producir x artículos diariamente en una planta de fabricación de neumáticos en Apodaca, N.L., es:

$$U(x)=500-250\,x+32\,x^2-0.35\,x^3$$

¿Qué producción diaria les trae la mayor utilidad?

Ejemplo 10

- Para calcular el máximo de la función de utilidad usaremos el criterio de la segunda derivada.
- Empezamos calculando la derivada:

$$\frac{dU}{dx} = -250 + 64\,x - 1.05\,x^2$$

- Para conocer los puntos críticos igualamos a cero y resolvemos la ecuación cuadrática: $-250 + 64\,x - 1.05\,x^2 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-64 \pm \sqrt{4096 - 4(1.05)(250)}}{-2.1} \\ &= \frac{-64 \pm \sqrt{4096 - 1050}}{-2.1} \\ &= \frac{-64 \pm \sqrt{3046}}{-2.1} \\ &\approx \frac{-64 \pm 55.1906}{-2.1} \end{aligned}$$

- Nosotros solamente consideramos el valor positivo:

$$x \approx \frac{-64 - 55.1906}{-2.1} = 56.7574$$

- Entonces, si la producción diaria se fija en 57 obtendrán una utilidad muy cercana a la máxima posible de acuerdo al modelo.

Ejercicios 21.3.2 Resuelve los siguientes problemas.

1) Se va a construir una caja rectangular que tenga un volumen de 20 m^3. Su base debe ser el triple de largo que de ancho. El material de la tapa cuesta \$0.25 por centímetro cuadrado y el de los lados, \$0.20 por centímetro cuadrado. Encuentra las dimensiones que hagan el costo mínimo. **Sugerencia:** Ten cuidado con las unidades.

2) Un tanque de forma cilindrica circular recta, sin tapa y con base horizontal ha de contener 200 litros. El materia de la base cuesta la mitad por metro cuadrado que el de los lados. Calcule las dimensiones del tanque más económico.

3) El costo de un inventario x en una cadena de comidas está dado por:

$$I(x) = \frac{25\,000}{x} + 0.5 \cdot x$$

¿Cuál debe ser su inventario mensual para minimizar el costo?

4) Una compañía fabricante de anteojos ha encontrado que la utilidad de producir x productos está dada por:

$$U(x) = \frac{700}{\sqrt{x^2 + 12}} - 2\,x$$

Calcula la utilidad marginal.

5) La función de ingreso por la venta de x computadoras de bolsillo es:

$$I(x) = 3\,500\,x - 0.15\,x^2$$

Calcula el ingreso marginal con $x = 50$. Compara este resultado con $I(51) - I(50)$.

6) Una compañía ha encontrado que las funciones de ingreso $I(x)$ y de costo $C(x)$ para una mesa de campo son:

$$\begin{aligned} I(x) &= 125\,x - 0.35\,x^2 \\ C(x) &= 1\,500 + 95\,x + 0.15\,x^2 \end{aligned}$$

Calcula la cantidad x de esas mesas que deben producir para obtener la máxima utilidad.

7) La utilidad U que obtiene una compañía al vender ventanas de aluminio, cada una a p pesos, está dada por:

$$U(p) = -p^2 + 150\,p - 75$$

¿A qué precio deben ofertar las ventanas para obtener la mayor utilidad?

8) Daniel Valadéz, pintor Quintanarroense, ha encontrado que el costo $C(x)$ de producir x cuadros de pintura al óleo mensualmente se puede calcular con:

$$C(x) = \frac{12\,000}{x} + 120\,x$$

Calcula:

i. el costo marginal
ii. el número de obras que debe producir para minimizar el costo.

9) Un fabricante de tenis para soccer ha encontrado que el precio p y el número x de zapatos modelo FEIYO que logra vender a ese precio están relacionados por la expresión:

$$p = \frac{\sqrt{x}}{100} - \frac{x}{10\,000}$$

¿Qué precio le permite vender la mayor cantidad de pares de tenis para soccer?

10) Un fabricante de camisas *guayaberas* ha encontrado que el precio p y el número x de camisas modelo MÉRIDA que logra vender a ese precio están relacionados por la expresión:

$$p = \frac{\sqrt{7\,x}}{10} - \frac{x}{100}$$

Por otra parte, saben que el costo C de producir x de esas camisas viene dado por:

$$C(x) = 19\,000 + 115\,x - 0.001\,x^2$$

i. Determina x como una función de p. **Sugerencia:** Utiliza el cambio de variable: $\sqrt{7\,x} = u$.
ii. Expresa $C(x)$ como una función de p.
iii. Calcula el valor de p que minimiza el costo de producción.
iv. El precio p al que debe ofertar las camisas para obtener la mayor demanda.

11) La utilidad U de producir x artículos diariamente en una planta de fabricación de empaques es:

$$U(x) = 750 - 125\,x + 12\,x^2 - 0.75\,x^3$$

¿Qué producción diaria les trae la mayor utilidad?

Parte VI

Cálculo Integral

Capítulo 22

Diferenciales e integral indefinida

Por aprender...

Por qué es importante...

La integración es el proceso inverso de la derivación. En este capítulo estudiaremos cómo se relacionan ambos procesos.

22.1 La Diferencial

En el curso de cálculo diferencial aprendimos a calcular la derivada de una función.

La diferencial es el concepto que nos ayudará a justificar el procedimiento que utilizaremos para el cálculo integral.

Diferencial

Sea $y = f(x)$ una función con su primera derivada contínua y Δx un incremento en la variable x. La diferencial de y se denota por dy y se define como:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

En palabras, la diferencial de y es igual al producto de la derivada de la función multiplicada por el incremento en x.

Definición 6

Calcula la diferencial para la función:

$$y = x^2 + x + \frac{1}{x}$$

Ejemplo 11

- Por definición,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = \left(2x + 1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \Delta x = 2x\Delta x + \Delta x - \frac{\Delta x}{x^2}$$

Calcula la diferencial para la función: $y = \cos(\sin x)$.

Ejemplo 12

- Primero calculamos la primera derivada de la función:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$$

- Para calcular la diferencial multiplicamos esta derivada por el incremento en x:

$$dy = -\sin(\sin x) \cdot \cos(x) \cdot \Delta x$$

Como puedes ver, el cálculo de la diferencial de una función es muy sencillo: solamente multiplicamos su derivada por Δx.

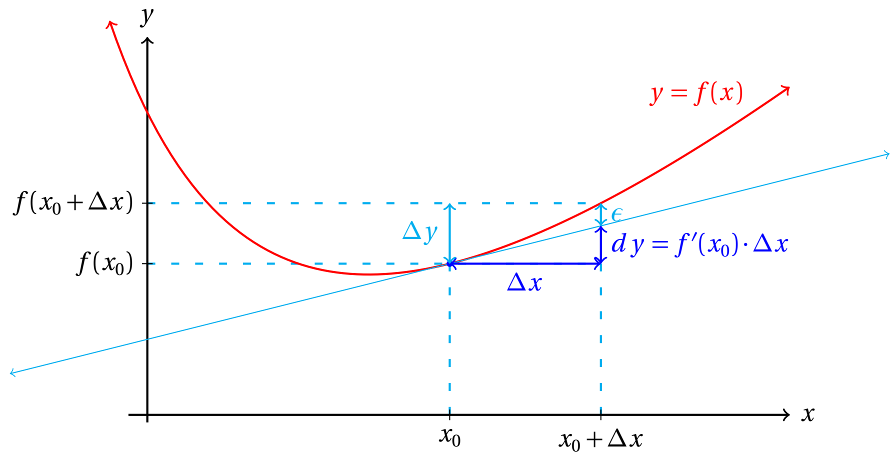
Ahora vamos a dar una interpretación geométrica de este concepto.

11. Interpretación geométrica

Ya sabemos que la derivada de una función es la mejor aproximación lineal a la función en un punto.

En particular, la derivada evaluada en un punto de la función es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

Al multiplicar $f'(x_0)$ (la pendiente de la recta tangente a la función en el punto x_0) por Δx (el incremento en x) obtenemos el incremento en y al movernos sobre la recta tangente.



Observa que $\epsilon + dy = \Delta y$. Es decir, $dy = \Delta y - \epsilon$.

En palabras, dy es una aproximación a Δy. Cuando el valor de ϵ se hace muy pequeño, la aproximación se hace cada vez mejor.

ϵ se hará cada vez más pequeño cuando la segunda derivada sea casi cero. Esto es así porque la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función se mantienen casi constantes en la cercanía de x_0.

En realidad estamos calculando una aproximación a Δy (el incremento de y), suponiendo que la función es lineal en el intervalo $(x_0, x_0 + \Delta x)$.

Este argumento se hace evidente al suponer que la función $y = f(x)$ es una línea recta, pues su primer derivada es igual a la pendiente de la recta y su segunda derivada es cero.

La segunda derivada nos está diciendo que la pendiente de la recta nunca cambia, por lo que la concavidad de la función no está definida, dado que la segunda derivada es cero en todos sus puntos.

La diferencia $f(x_0 + \Delta x) - dy$ es el error que cometemos al hacer la aproximación de $f(x_0 + \Delta x)$ suponiendo que se comporta la función exactamente igual que una recta.

22.1.1 Reglas de diferenciación

Todo el semestre pasado nos la pasamos calculando las derivadas de funciones.

Para calcular la derivada de una función, siempre identificábamos el tipo de función, y aplicábamos la(s) regla(s) correspondiente(s).

Las reglas de diferenciación generalmente se dan en un formulario que se muestra enseguida:

i. $\dfrac{dc}{dx} = 0$

ii. $\dfrac{dx}{dx} = 1$

iii. $\dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

iv. $\dfrac{d(c \cdot v)}{dx} = c\,\dfrac{dv}{dx}$

v. $\dfrac{d(u \cdot v)}{dx} = u\,\dfrac{dv}{dx} + v\,\dfrac{du}{dx}$

vi. $\dfrac{d(v^n)}{dx} = n\,v^{n-1}\,\dfrac{dv}{dx}$

vii. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\dfrac{du}{dx} - u\,\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

viii. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dx}$

ix. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

Las siguientes son las reglas de derivación de funciones trascendentes.

i. $\dfrac{d(\sin v)}{dx} = \cos v \, \dfrac{dv}{dx}$

ii. $\dfrac{d(\cos v)}{dx} = -\sin v \, \dfrac{dv}{dx}$

iii. $\dfrac{d(\tan v)}{dx} = \sec^2 v \, \dfrac{dv}{dx}$

iv. $\dfrac{d(\cot v)}{dx} = -\csc^2 v \, \dfrac{dv}{dx}$

v. $\dfrac{d(\sec v)}{dx} = \sec v \tan v \, \dfrac{dv}{dx}$

vi. $\dfrac{d(\csc v)}{dx} = -\csc v \cot v \, \dfrac{dv}{dx}$

vii. $\dfrac{d(\arcsin v)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}} \, \dfrac{dv}{dx}$

viii. $\dfrac{d(\arccos v)}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-v^2}} \, \dfrac{dv}{dx}$

ix. $\dfrac{d(\arctan v)}{dx} = \dfrac{1}{1+v^2} \, \dfrac{dv}{dx}$

x. $\dfrac{d(\text{arccot } v)}{dx} = \dfrac{-1}{1+v^2} \, \dfrac{dv}{dx}$

xi. $\dfrac{d(\text{arcsec } v)}{dx} = \dfrac{1}{v\sqrt{v^2-1}} \, \dfrac{dv}{dx}$

xii. $\dfrac{d(\text{arccsc } v)}{dx} = \dfrac{-1}{v\sqrt{v^2-1}} \, \dfrac{dv}{dx}$

xiii. $\dfrac{d(\ln v)}{dx} = \dfrac{1}{v} \, \dfrac{dv}{dx}$

xiv. $\dfrac{d(\log_a v)}{dx} = \dfrac{\log_a e}{v} \, \dfrac{dv}{dx}$

xv. $\dfrac{d(a^v)}{dx} = a^v \ln a \, \dfrac{dv}{dx}$

xvi. $\dfrac{d(e^v)}{dx} = e^v \, \dfrac{dv}{dx}$

xvii. $\dfrac{d(u^v)}{dx} = \left(v \cdot u^{v-1} + \ln u \cdot u^v\right) \dfrac{dv}{dx}$

Este mismo formulario, junto con otros más básicos se encuentra en los apéndices (capítulo final) de este libro.

22.1.2 La diferencial como aproximación al incremento

Ahora vamos a utilizar la diferencial para hacer aproximaciones. Esta aproximación está basada en la interpretación geométrica que acabamos de dar de la diferencial.

Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt{402}$.	**Ejemplo 1**

- Consideremos la función: $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$.
- Sabemos que la raíz cuadrada de 400 es 20.
- Podemos utilizar este valor para aproximar el valor de la raíz cuadrada de 402.
- Primero encontramos la diferencial de la función:

$$dy = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$$

- Para este caso hacemos $\Delta x = 2$, y $x = 400$.
- Esto es así porque $x + \Delta x = 400 + 2 = 402$.
- Entonces, sustituyendo los valores en la diferencial obtenemos:

$$dy = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{2\sqrt{400}} = \frac{1}{20} = 0.05$$

- Ahora, $y + dy = 20 + 0.05 = 20.05$
- El valor exacto a 7 decimales es: $\sqrt{402} = 20.0499377$.
- Nos resultó una buena aproximación.

Ejemplo 2 Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt{25.2}$.

- De nuevo, consideramos la función $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$.
- Ya sabemos que la diferencial correspondiente es:

$$dy = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$$

- Al sustituir $\Delta x = 0.2$, y $x = 25$ en esta fórmula, obtenemos:

$$dy = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} = \frac{0.2}{2\sqrt{25}} = \frac{0.2}{10} = 0.02$$

- De manera que $\sqrt{25.2} \approx \sqrt{25} + dy = 5 + 0.02 = 5.002$.
- El valor arrojado por la calculadora científica es de: 5.019960159.

Ejemplo 3 Aproxime con diferenciales la raíz cúbica de 28.

- Ahora consideramos la función: $y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$
- Sabemos de antemano que la raíz cúbica de 27 es 3. Esto sugiere que utilicemos $\Delta x = 1$ y $x = 27$. Ahora encontramos la diferencial de la función:

$$dy = \frac{\Delta x}{3\,x^{2/3}}$$

- Sustituyendo los valores de las incógnitas encontramos el valor buscado:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\Delta x}{3\,x^{2/3}} = \frac{1}{3(27)^{2/3}} \\ &= \frac{1}{3(3)^2} = \frac{1}{3(9)} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

- Entonces, de acuerdo a lo sugerido, tenemos que:

$$\sqrt[3]{28} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27} = 3 + \frac{1}{27} = \frac{81}{27} + \frac{1}{27} = \frac{82}{27}$$

- Podemos verificar la exactitud del resultado elevándolo al cubo:

$$\left(\frac{82}{27}\right)^3 = \frac{551\,368}{19\,683} = 28.01239648\cdots$$

- Buena aproximación.

Aproxime la raíz cúbica de 0.009 **Ejemplo 4**

- Consideramos la función raiz cúbica:
$$y = \sqrt[3]{x}$$
- Ahora hacemos $x = 0.008$ (porque la raíz cúbica de 0.008 es 0.2) y $\Delta x = 0.001$
- Ya sabemos que la diferencial de la función es:
$$dy = \frac{\Delta x}{3\,x^{2/3}}$$
- Utilizando los valores conocidos obtenemos:
$$dy = \frac{\Delta x}{3\,x^{2/3}} = \frac{0.001}{3(0.008)^{2/3}} = \frac{0.001}{3(0.02)^2} = \frac{0.001}{3(0.04)} = \frac{1}{120}$$
- Entonces,
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{0.009} &\approx \sqrt[3]{0.008} + \frac{1}{120} = 0.2 + \frac{1}{120} = \frac{2}{10} + \frac{1}{120}\\ &= \frac{24}{120} + \frac{1}{120} = \frac{25}{120} = \frac{5}{24}\end{aligned}$$
- Elevando al cubo este resultado, encontramos que:
$$\left(\frac{5}{24}\right)^3 = \frac{125}{13\,824} = 0.0090422453\cdots$$

Aproxime con diferenciales la raíz cuarta de 15. **Ejemplo 5**

- Considere la función: $y = \sqrt[4]{x}$.
- Encontramos la diferencial correspondiente:
$$dy = \frac{\Delta x}{4\,x^{3/4}}$$
- Sabemos que 2^4 es igual a 16. Esto sugiere que hagamos $x = 2$ y $\Delta x = -1$.
- Sustituyendo estos valores en la diferencial obtenemos:
$$dy = \frac{\Delta x}{4\,x^{3/4}} = \frac{-1}{4(16)^{3/4}} = \frac{-1}{4(2)^3} = \frac{-1}{32}$$
- Por tanto, la aproximación buscada es:
$$\sqrt[4]{15} = \sqrt[4]{16} - \frac{1}{32} = 2 - \frac{1}{32} = \frac{63}{32}$$

- Elevando a la cuarta potencia, tenemos:

$$\left(\frac{63}{32}\right)^4 = \frac{15\,752\,961}{1\,048\,576} = 15.02319431$$

Ejemplo 6 Use diferenciales para estimar $(0.98)^4$.

- Sea $y = x^4$. Es claro que $dy = 4x^3\Delta x$.
- Podemos hacer $x = 1$ y $\Delta x = -0.02$. Sustituyendo estos valores encontramos:

$$dy = 4(1)^3(-0.02) = -0.08$$

entonces, $(0.98)^4$ es aproximadamente igual a $1^4 - 0.08 = 1 - 0.08 = 0.92$.

- El valor arrojado por una calculadora científica es: 0.92236816

Ejemplo 7 Use diferenciales para aproximar:

$$N = (2.01)^4 - 3(2.01)^3 + 4(2.01)^2 - 5(2.01) + 7.$$

- Sea $M = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7$
- Fácilmente podemos encontrar:

$$dM = (4x^3 - 9x^2 + 8x - 5)\cdot\Delta x$$

- Ahora hacemos $x = 2$, y $\Delta x = 0.01$ y sustituimos estos valores en dM.

$$\begin{array}{rcl} dM & = & (4(2)^3 - 9(2)^2 + 8(2) - 5)(0.01) \\ & = & (4(8) - 9(4) + 8(2) - 5)(0.01) \\ & = & (32 - 36 + 16 - 5)(0.01) = (7)(0.01) = 0.07 \end{array}$$

- Entonces, $M(x + \Delta x) = M(2.01)$ es aproximadamente igual a $M(2) + dM$.

$$M(2) = (2)4 - 3(2)3 + 4(2)2 - 5(2) + 7 = 16 - 24 + 16 - 10 + 7 = 5$$

- Luego, $M(2.01) = M(2) + dM = 5 + 0.07 = 5.07$
- Para comparar este resultado con el valor exacto, evalúa $M(2.01)$.

El concepto de diferencial se puede utilizar para aproximar el valor de una cantidad relacionada a otras en diferentes situaciones.

La arista de un cubo variable crece a razón de 3 cm/s. ¿Con qué rapidez está creciendo el volumen cuando la arista tiene 10 cm de longitud? **Ejemplo 8**

- Sabemos que el volumen de un cubo se calcula por medio de la fórmula: $V = L^3$. De aquí podemos encontrar $dV = 3L^2 dL$.

- Nosotros conocemos la rapidez con la que crece la arista, dL/dt, y queremos encontrar la rapidez con la que crece el volumen, esto es, dV/dt.
- Entonces, requerimos encontrar dV/dt, conocidos dL/dt y L. Sustituyendo los valores conocidos obtenemos:
$$\frac{dV}{dt} = 3L^2\frac{dL}{dt} = 3(10)^2(3) = 900\text{cm}^3/\text{seg.}$$

Si se mide el radio de una esfera, se encuentra que es 20 cm., con un error máximo de 0.05 cm. Aproxime el error máximo que puede cometerse al calcular el área de la esfera con estos datos.

Ejemplo 9

- Sabemos que la superficie de una esfera se calcula por medio de la fórmula: $A = 4\pi r^2$.
- Para encontrar el error máximo cometido al calcular la superficie de la esfera podemos utilizar diferenciales.
- Encontramos la diferencial del área como función del radio de la esfera:
$$dA = 8\pi r(dr)$$
- Ahora sustituimos los valores conocidos:
$$dA = 8\pi(20)(0.05) = 8\pi\text{ cm}^2 \approx 25.13274123\text{ cm}^2$$

Las 6 caras de una caja cúbica metálica tienen 0.25 cm de espesor, y el volumen interior de la caja es de 40 cm^3. Encuentre una aproximación del volumen del metal usado al hacer la caja.

Ejemplo 10

- Sabemos que la caja es cúbica, luego, el volumen está dado por: $V = L^3$.
- La diferencial de volumen se encuentra por medio de la fórmula:
$$dV = 3L^2(dL)$$
- El texto indica que el volumen de la caja es 40 cm^3, luego, el lado debe ser igual a la raíz cúbica de 40, esto es: $L = \sqrt[3]{40}$, y $dL = 0.25$ cm.
- Pero cuando consideramos un incremento del volumen de la caja, suponemos que crece en una sola dirección, por lo que estaríamos considerando tres de las 6 caras de la caja metálica utilizadas en su construcción.
- Así que realmente queremos calcular $2\,dV = 6L^2(dL)$
- Sustituyendo los valores de las incógnitas en la fórmula obtenemos:
$$\begin{aligned}
2\,dV &= 6\left(\sqrt[3]{40}\right)^2(0.25) = 3\left(2\sqrt[3]{5}\right)^2\frac{1}{4}\\
&= 6(\cancel{4})\left(5^{2/3}\right)\left(\frac{1}{\cancel{4}}\right) = 3\cdot 5^{2/3}\\
&= 6\cdot\sqrt[3]{25}
\end{aligned}$$

Ejemplo 11 Encontrar el crecimiento aproximado de la superficie de una burbuja de jabón, si su radio crece de 3 a 3.025 cm.

- Sabemos que el área de una esfera está dado por: $A = 4\pi r^2$.
- Para este caso tenemos $r = 3$ cm y $dr = 0.025$ cm. La diferencial del área es:

$$\frac{dA}{dr} = 8\pi r \qquad \Rightarrow dA = 8\pi r(dr)$$

- Sustituimos los valores de las variables:

$$dA = 8\pi r(dr) = 8\pi(3)(0.025) = 0.6 \text{ cm}^2$$

- Esto también puede expresarse de la siguiente manera:

$$dA = 8\pi r(dr) = 8\pi(3)\left(\frac{25}{1\,000}\right) = \frac{24\pi}{40} = \frac{6\pi}{10} \text{ cm}^2$$

Ejemplo 12 Aceptando que una burbuja de jabón conserva su forma esférica cuando se expande, ¿con qué rapidez está creciendo su radio cuando éste mide 2 plg., si el aire que penetra la infla a rapidez de 4 plg^3/s?

- Conocemos la fórmula para encontrar el volumen V de una esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Como necesitamos encontrar la rapidez con la que crece el radio, derivamos la fórmula respecto del tiempo de manera implícita:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

- Ahora despejamos dr/dt, que es nuestra incógnita:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\left(\frac{dV}{dt}\right)}{4\pi r^2}$$

- Sustituyendo los valores conocidos obtenemos:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\left(\frac{dV}{dt}\right)}{4\pi r^2} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\pi(2)^2} = \frac{1}{4\pi} \text{ plg/s}$$

Ejemplo 13 Se estima que el radio de un balón de soccer es de 12 plg., con un máximo error en la medición de 0.05 plg. Haga una estimación del máximo error que se puede cometer al calcular el volumen del balón en estas condiciones.

- Sabemos que el volumen V de una esfera está dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- La diferencial que le corresponde a esta función es:

$$dV = 4\pi r^2 (dr)$$

- Para este problema, conocemos que $r = 12$ y $dr = 0.05$. Entonces

$$dV = 4\pi (12)^2 (0.05)$$

esto es igual a: $dV = \dfrac{144\pi}{5}$ plg^3.

Suponga que a lo largo del ecuador y por todo alrededor de la tierra se coloca una cerca que tiene una altura de 1 m. Suponga que la tierra es esférica y que su radio es de 40,000 Km. ¿Cuánto debe medir el área de la cerca? **Ejemplo 14**

- Sabemos que el área de una circunferencia se encuentra por medio de la fórmula: $A = \pi r^2$. De aquí que la diferencial de área sea:

$$dA = 2\pi r (dr)$$

- Sustituyendo los valores conocidos encontramos que:

$$dA = 2\pi (40\,000\,000)(1) = 80\,000\,000\pi = 8 \times 10^7 \pi \text{ m}^2$$

El diámetro exterior de una concha esférica delgada es de 2 m. Si el espesor de la concha es de 3 cm., aproxime el volumen requerido de material para fabricar esa concha esférica. **Ejemplo 15**

- El volumen de una esfera está dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Podemos imaginar el espesor de la concha como una pequeña variación de volumen de una esfera infinitamente delgada de radio 2 m. Entonces tendremos: $r = 1$ y $dr = 0.03$.
- Ahora encontramos la diferencial de volumen como función del radio:

$$dV = 4\pi r^2 (dr)$$

- Al sustituir los valores podemos encontrar la aproximación del volumen del material utilizado al fabricar la esfera:

$$dV = 4\pi (1)^2 (0.03) = 4\pi (0.03) = 4\pi \left(\frac{3}{100}\right) = \frac{3\pi}{25}$$

Se mide el diámetro de una esfera y con el resultado se calcula el valor de su volumen. Si el máximo error posible al medir el diámetro es 0.02 cm y el error máximo aceptable al medir el volumen es de 3 cm^3, ¿cuál es el diámetro aproximado de la esfera en estas condiciones? **Ejemplo 16**

- Sabemos que el volumen de la esfera se encuentra por medio de la fórmula:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- De aquí podemos fácilmente obtener la diferencial del volumen como una función del radio:

$$dV = 4\pi r^2 (dr)$$

- Esta igualdad es equivalente a la siguiente:

$$r^2 = \frac{(dV)}{4\pi(dr)}$$

- Sabemos que el error máximo permisible en el volumen es de 3 cm^3, esto corresponde a dV, mientras que el error máximo en la medición del radio es de 0.02 cm, que corresponde al valor de dr.

- Sustituimos estos valores, y encontramos r^2.

$$r^2 = \frac{(dV)}{4\pi(dr)} = \frac{3}{4\pi(0.02)} = \frac{300}{8\pi} = \frac{75}{2\pi}$$

- Esto implica que:

$$r = \sqrt{\frac{75}{2\pi}}$$

- El diámetro es el doble del radio, entonces:

$$D = 2\sqrt{\frac{75}{2\pi}} = \sqrt{\frac{150}{\pi}}$$

Ejemplo 17 La altura de un cilindro circular recto es de 10 cm. Si el radio de la base cambia de 2 a 2.06 cm, calcule el cambio de volumen aproximado del cilindro.

- El volumen del cilindro está dado por:

$$V = \pi r^2 h$$

donde V es el volumen (en cm^3), r es el radio del cilindro (en cm) y h es la altura (en cm) del mismo.

- Como haremos una pequeña variación en el radio, debemos encontrar la diferencial del volumen como una función del radio, esto resulta en:

$$dV = 2\pi r h (dr)$$

- Ahora sustituimos los valores de las variables: de acuerdo al texto $h = 10$ cm, $r = 2$ cm, $dr = 0.06$ cm.

$$dV = 2\pi r h(dr) = 2\pi(2)(10)(0.06) = 2.4\pi \text{ cm}^3$$

Ejemplo 18 De un contenedor cae arena formando un cono circular cuya altura es siempre igual al radio. Si en cierto instante, el radio es 10 cm., utilice diferenciales para encontrar qué cambio en el radio ocasionará un aumento en el volumen de arena en 2 cm^3.

- El volumen del cono de radio r y altura h está dado por:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

- Pero para este caso particular, la altura siempre es igual al radio, entonces el volumen de este cono debe ser:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^3$$

- La diferencial del volumen como función del radio es:

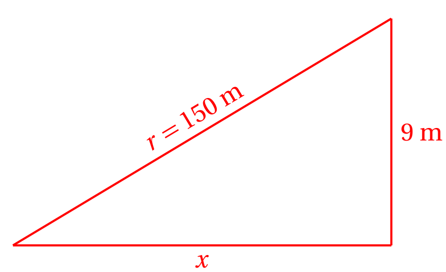
$$dV = \pi r^2 (dr)$$

- Sabemos que $r = 10$ cm., y que $dV = 2$ cm^3.
- Nuestro problema consiste en encontrar el incremento en el radio que hará que el volumen crezca en $dV = 2$ cm^3.
- Primero despejamos dr de la expresión que nos da la diferencial del volumen, y después sustituimos estos valores en la nueva expresión, con lo que obtenemos:

$$dr = \frac{(dV)}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi (10)^2} = \frac{1}{50\pi} \text{ cm.}$$

Un niño está elevando un papalote (una cometa). Si el papalote está a 9 metros de altura y el viento está soplando a razón de 5 m/s., ¿con qué rapidez está soltando el niño la cuerda en el momento que ha soltado 150 metros? **Ejemplo 19**

- Para resolver este problema supondremos que la cometa es arrastrada por el viento a la velocidad del mismo (5 m/s).
- Entonces, la cometa viaja de manera horizontal a razón de 5 m/s, a una altura constante de 9 metros.
- Sea r la longitud de la cuerda que el niño ha soltado, x la distancia medida desde el pie del niño hasta el punto donde toca el suelo la proyección vertical de la cometa.



- De acuerdo al teorema de Pitágoras: $x^2 + (9)^2 = r^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + 81 = r^2$.
- Encontramos la derivada implícita de esta expresión respecto al tiempo:

$$2x\frac{dx}{dt} = 2r\frac{dr}{dt}$$

- Ahora despejamos la incógnita:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{x \cdot \dfrac{dx}{dt}}{r}$$

- Para encontrar el valor de la incógnita, debemos conocer primero r (150 m), dx/dt (5 m/s) y el valor de x.
- Para esto utilizamos el teorema de Pitágoras:

$$x = \sqrt{150^2 - 9^2} = \sqrt{22\,500 - 81} = \sqrt{22\,419}$$

- Ahora, lo que falta es sustituir los valores conocidos para encontrar el valor de la incógnita:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{x\,\dfrac{dx}{dt}}{r} = \frac{\sqrt{22\,419}\cdot(5)}{150} = \frac{\sqrt{22\,419}}{30} \approx 4.99 \text{ metros por segundo.}$$

Ejercicios 22.1 Resuelve completa y correctamente cada uno de los siguientes ejercicios.

1) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt{229}$ — $\sqrt{229} \approx 15.1333$
2) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt{127}$ — $\sqrt{127} \approx 11.2727$
3) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt{291}$ — $\sqrt{291} \approx 17.0588$
4) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt{730}$ — $\sqrt{730} \approx 27.0185$
5) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt{581}$ — $\sqrt{581} \approx 24.1042$
6) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt[3]{1005}$ — $\sqrt[3]{1005} \approx 10.3591$
7) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt[3]{515}$ — $\sqrt[3]{515} \approx 8.25$
8) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt[3]{517}$ — $\sqrt[3]{517} \approx 8.4167$
9) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt[3]{67}$ — $\sqrt[3]{67} \approx 4.3969$
10) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt[3]{1005}$ — $\sqrt[3]{1005} \approx 10.3591$
11) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt[4]{627}$ — $\sqrt[4]{627} \approx 5.1495$
12) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt[4]{83}$ — $\sqrt[4]{83} \approx 3.2193$
13) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt[4]{14642}$ — $\sqrt[4]{14642} \approx 11.0414$
14) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt[4]{2404}$ — $\sqrt[4]{2404} \approx 7.1743$
15) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt[4]{85}$ — $\sqrt[4]{85} \approx 3.4387$
16) Aproxime con diferenciales el valor de $(8.04)^3$ — $(8.04)^3 \approx 519.68$
17) Aproxime con diferenciales el valor de $(7.02)^3$ — $(7.02)^3 \approx 345.94$
18) Aproxime con diferenciales el valor de $(11.03)^3$ — $(11.03)^3 \approx 1341.89$
19) Aproxime con diferenciales el valor de $(5.04)^3$ — $(5.04)^3 \approx 128.0$
20) Aproxime con diferenciales el valor de $(7.05)^3$ — $(7.05)^3 \approx 350.35$

21) Aproxime con diferenciales el valor de $(10.04)^3$ $(10.04)^3 \approx 1012.0$

22) Aproxime con diferenciales el valor de $(13.03)^3$ $(13.03)^3 \approx 2212.21$

23) Aproxime con diferenciales el valor de $(15.05)^4$ $(15.05)^4 \approx 51300.0$

24) Aproxime con diferenciales el valor de $(10.03)^4$ $(10.03)^4 \approx 10120.0$

25) Aproxime con diferenciales el valor de $(5.06)^4$ $(5.06)^4 \approx 655.0$

26) Aproxime con diferenciales el valor de $(14.05)^4$ $(14.05)^4 \approx 38964.8$

27) Aproxime con diferenciales el valor de $(9.04)^4$ $(9.04)^4 \approx 6677.64$

28) Aproxime con diferenciales el valor de $(12.01)^4$ $(12.01)^4 \approx 20805.12$

29) Aproxime con diferenciales el valor de $(10.01)^4$ $(10.01)^4 \approx 10040.0$

30) Aproxime con diferenciales el valor de $(15.04)^4$ $(15.04)^4 \approx 51165.0$

31) La arista de un cubo variable crece a razón de 0.5 cm/s. ¿Con qué rapidez está creciendo el volumen cuando la arista tiene 15 cm de longitud? $dL/dt = 337.5$ cm/s.

32) Si el radio de una esfera se mide, se encuentra que es 12 cm., con un error máximo de 0.01 cm. Aproxime el error máximo que puede cometerse al calcular el área de la esfera con estos datos. $dA = 0.96\pi$

33) Las 6 caras de una caja cúbica metálica tienen 0.5 cm de espesor, y el volumen interior de la caja es de 1 000 cm^3. Encuentre una aproximación del volumen del metal usado al hacer la caja. $dV = 150$ cm^3

34) Encontrar el crecimiento aproximado de la superficie de un globo de plástico, si su radio crece de 10 a 10.25 cm. $dA = 20\pi$ cm^2

35) Aceptando que una burbuja de jabón conserva su forma esférica cuando se expande, ¿con qué rapidez está creciendo su radio cuando éste mide 20 cm., si el aire que penetra la infla a rapidez de 7 cm^3/s? $dr/dt = 7/80\pi$ cm/s

36) Si la utilidad r que tiene una empresa está dado por: $r = 325q + 50q^2 - 0.005q^3$, donde q es el número de unidades producidas, aproximadamente, ¿qué cambio en su utilidad le acarrea aumentar su producción de $q = 200$ a $q = 201$ unidades? $dr = 19\,725$

22.2 La integral indefinida

El semestre pasado estudiamos el proceso de derivación, que consiste en calcular la derivada de una función.

Ahora nos vamos a ocupar del proceso inverso.

Ejemplo 20

Pensé una función... Calculé su derivada y obtuve:

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

¿Qué función pensé?

- Aquí tenemos que encontrar la función que al derivar da como resultado e^x.
- Pero la derivada de e^x es ella misma.
- Entonces, debió pensar la función:

$$y = e^x$$

Observa que conocemos $f'(x)$ y queremos encontrar o calcular $f(x)$. Este proceso es exactamente el inverso de la derivación.

Definición 1

Antiderivada

Sea $y = F(x)$ una función derivable, y su derivada $y' = F'(x) = f(x)$. Entonces, decimos que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$. A la antiderivada también se le conoce como función primitiva.

En palabras, la antiderivada de una función $f(x)$ es otra función $F(x)$, con la propiedad: $F'(x) = f(x)$.

Al procedimiento de calcular la antiderivada de una función se le llama integración indefinida.

Ejemplo 21

Calcula la antiderivada de $f(x) = 2x + 1$.

- La antiderivada de esta función es otra función tal que al derivarla, obtenemos: $2x + 1$.
- Una función que cumple ese requisito es:

$$F(x) = x^2 + x$$

- Pero no es la única.
- La función: $y = x^2 + x + 1$ también es una antiderivada.
- Al igual que la función: $y = x^2 + x - 1$.
- Y en general, la familia de funciones: $y = x^2 + x + k$, siendo k cualquier número real, es una antiderivada de la función: $f(x) = 2x + 1$.

Observa que la antiderivada de una función no es solamente una función, sino una familia de funciones.

22.2.1 Constante de integración

Cuando impongamos una condición que deba satisfacer la antiderivada de la función dada, por ejemplo, que pase por un punto dado, tendremos la posibilidad de reducir toda una familia de funciones a una sola función.

Ejemplo 1

Calcula la antiderivada de la función:

$$f(x) = 2x + 1$$

que pasa por el punto $A(0,1)$.

- Primero calculamos la antiderivada y después nos preocuparemos por que pase por el punto dado.
- la antiderivada de la función es:

$$F(x) = x^2 + x + C$$

- Puedes verificar que esta es la antiderivada viendo que: $F'(x) = f(x)$.
- Si la antiderivada debe pasar por el punto $A(0,1)$, entonces ésta debe satisfacer las coordenadas de ese punto.
- Matemáticamente, tenemos: $F(0) = 1$

$$F(0) = (0)^2 + 0 + C = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C = 1$$

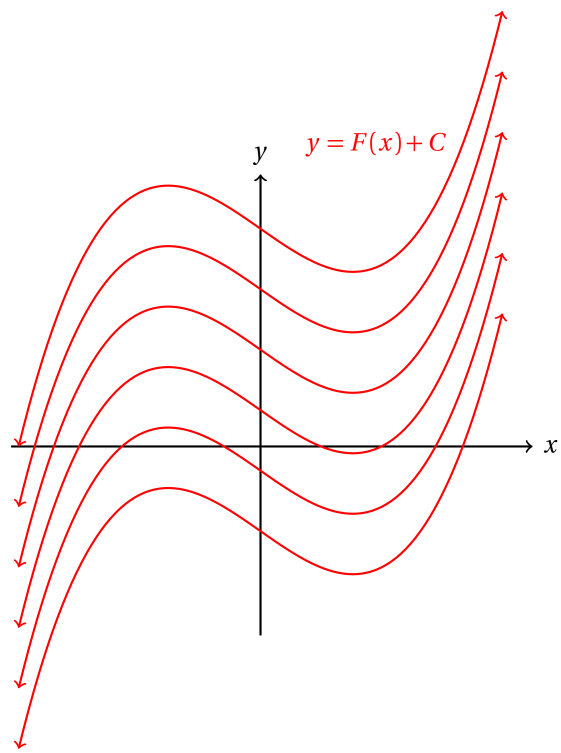
- Entonces, la constante de integración es $C = 1$, y la antiderivada *particular* que satisface la condición de pasar por el punto $A(0,1)$ es:

$$F(x) = x^2 + x + 1$$

Ahora el resultado no fue una familia de funciones, dado que debían satisfacer la condición de pasar por el punto dado.

El hecho de satisfacer la condición ocasionó que la constante de integración se convirtiera en una constante particular (en este caso, $C = 1$).

Cuando no imponemos la condición de que pase por un punto, nos quedamos con una familia de funciones, debido a que la constante ocasiona una traslación vertical a la gráfica de la antiderivada $y = F(x)$.



Al obligar a $y = F(x) + C$ que pase por un punto particular $A(x_0, y_0)$, estamos reduciendo la familia de funciones a una sola.

Nosotros calculamos el valor de la constante C a partir de la condición: $F(x_0) = y_0$. Al imponer esta condición sobre la antiderivada obtenemos:

$$C = y_0 - F(x_0)$$

Y la función que pertenece a la familia de funciones $y = F(x) + C$ que cumple con esa condición es:

$$y = F(x) + \left[y_0 - F(x_0)\right]$$

Entonces, desde el punto de vista geométrico, la constante C es la que *genera* toda la familia de funciones, pues para cada valor de C distinto, obtenemos una nueva función.

Ejemplo 2

Calcula la antiderivada de la función:

$$f(x) = 2\,e^{2x-1}$$

que pasa por el punto $A(0, 0)$.

- La antiderivada de la función es:
$$F(x) = e^{2x-1} + C$$
que puedes verificar fácilmente.

- Para que pase por el punto $A(0, 3)$, se requiere que: $F(0) = 0$. Entonces,
$$F(0) = e^{-1} + C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = -e^{-1}$$

- La función que cumple con la condición es:

$$y = e^{2x-1} - e^{-1}$$

- Fácilmente se verifica que esta función pasa por el origen:

$$F(0) = e^{2(0)-1} - e^{-1} = e^{-1} - e^{-1} = 0$$

También podemos dar una interpretación física de la constante de integración.

Ejemplo 3

Una piedra se dejó caer desde una altura h metros y su velocidad (en metros por segundo) está dada por:

$$v(t) = -9.81\,t$$

donde t está medido en segundos. Calcula la altura de la partícula (en metros) para cada valor de t.

- La derivada de la posición es la velocidad de la partícula.
- Entonces, la antiderivada de la velocidad nos da la posición de la partícula.
- Esto quiere decir que necesitamos calcular la antiderivada de la función:

$$v(t) = -9.81\,t$$

- ¿Qué función, cuando la derivamos, nos da una función lineal?
- La respuesta a esta pregunta es: «*una función cuadrática.*»

$$\text{Si} \quad y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = 2\,a\,x + b$$

- Debes observar que la antiderivada de una lineal es una cuadrática con el coeficiente principal igual a la mitad de la pendiente de la lineal.
- Esto nos sugiere que hagamos:

$$s(t) = -\frac{9.81}{2}\,t^2 + C = -4.905\,t^2 + C$$

- Ahora nos falta determinar el valor de la constante.
- Del texto del problema sabemos que la piedra se dejó caer desde una altura h.
- Esto nos está diciendo que en $t = 0$ la posición de la partícula es: $s(0) = h$.
- Vamos a utilizar esta información para calcular el valor de la constante:

$$s(0) = -4.905(0)^2 + C = h \qquad \Rightarrow \qquad C = h$$

- Luego, la función que nos da la posición de la piedra para cada t es:

$$s(t) = -4.905\,t^2 + h$$

donde h es la posición desde la cual se dejó caer la piedra.

- Observa que si derivamos la función respecto del tiempo, obtenemos la función que nos dieron para la velocidad:

$$\frac{ds}{dt} = -(2)(4.905)\,t = -9.81\,t = v(t)$$

La constante C de la familia de funciones $y = F(x) + C$ (desde el punto de vista físico) representa la condición inicial a la que se realiza el experimento que está modelado por el integrando.

En el ejemplo anterior, inicialmente la posición de la piedra era de h metros sobre el suelo, por eso la condición inicial impuesta para calcular la función que modela el fenómeno fue que pasara por el punto $P(0, h)$.

Por eso dijimos que $s(0) = h$. Es decir, cuando $t = 0$ (el reloj está en el punto de arranque), la posición de la piedra es h metros sobre el nivel del suelo.

A este proceso de calcular la antiderivada se le llama integrar la función, y al resultado se le llama la integral indefinida.

Definición 1

INTEGRAL INDEFINIDA

Sean $y = F(x)$, $y = f(x)$ funciones tales que $F'(x) = f(x)$. Entonces, la integral indefinida de $f(x)$ respecto de x es $F(x) + C$, y esto se denota por:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

El símbolo $\int$ se conoce como el signo de integración, $f(x)$ como el integrando y la constante C como la constante de integración.

Dado que calcular la derivada y la antiderivada de funciones son procesos inversos uno del otro, el cálculo de las antiderivadas se puede hacer fácilmente cambiando el formulario de las reglas de derivación como reglas de integración indefinida.

El siguiente formulario incluye las reglas de integración indefinida inmediata que podemos obtener intercambiando los argumentos en las reglas de derivación:

i. $\displaystyle\int (dv + dw) = \int dv + \int dw$

ii. $\displaystyle\int a\,dv = a\int dv$

iii. $\displaystyle\int dx = x + C$

iv. $\displaystyle\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$

v. $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$

vi. $\displaystyle\int a^v\,dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$

vii. $\displaystyle\int e^v\,dv = e^v + C$

viii. $\displaystyle\int \sin v\,dv = -\cos v + C$

ix. $\displaystyle\int \cos v\,dv = \sin v + C$

x. $\displaystyle\int \sec^2 v\,dv = \tan v + C$

xi. $\displaystyle\int \csc^2 v\,dv = -\cot v + C$

xii. $\displaystyle\int \sec v \tan v\,dv = \sec v + C$

Ejercicios 22.2.1

Calcula la constante de integración para que cada una de las antiderivadas pasen por el punto P dado.

1) $\displaystyle\int 6\,x^2\,\mathrm{d}x, \qquad P(1,5)$ $\qquad C=3$

2) $\displaystyle\int 6\,x^3\,\mathrm{d}x, \qquad P(1,2)$ $\qquad C=1/2$

3) $\displaystyle\int \left(4\,x^3-2\,x\right)\mathrm{d}x, \qquad P(-1,3)$ $\qquad C=3$

4) $\displaystyle\int (2\,x-1)\,\mathrm{d}x, \qquad P(0,0).$ $\qquad C=0$

5) $\displaystyle\int \left(x-x^2\right)\mathrm{d}x, \qquad P(1,1/6).$ $\qquad C=1$

6) $\displaystyle\int \left(3\,x^2+\cos(x)\right)\mathrm{d}x, \qquad P(0,\pi).$ $\qquad C=\pi$

7) $\displaystyle\int \left(x^2+\sin(x)\right)\mathrm{d}x, \qquad P(0,0)$ $\qquad C=1$

22.2.2 Integral indefinida de funciones algebraicas

En esta sección vamos a empezar a practicar el cálculo de integrales indefinidas de funciones.

Funciones algebraicas

Ejemplo 1

Calcula la integral indefinida:

$$\int (x^2-1)\,d\,x$$

- Empezamos aplicando la regla (i) para separar el integrando y así formar dos integrales:

$$\int (x^2-1)\,d\,x=\int x^2\,d\,x-\int d\,x$$

- Ahora aplicamos las reglas (iii) y (iv) para calcular las integrales.
- Para la primera integral, tenemos $n=2$, con lo que $n+1=3$:

$$\int x^2\,d\,x-\int d\,x=\frac{x^3}{3}-x+C$$

Observa que en el ejemplo anterior teníamos que sumar dos constantes. Pero el resultado de sumar dos constantes es igual a otra constante, por eso solamente se incluye una al final.

Ejemplo 2

Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int \left(2\,x+\frac{x^2}{2}+4\,x^3\right)d\,x$$

- Empezamos aplicando la regla (i) de integración:

$$\int \left(2x + \frac{x^2}{2} + 4x^3\right) dx = \int 2x\,dx + \int \frac{x^2}{2}\,dx + \int 4x^3\,dx$$

- Ahora aplicamos la regla (ii) en cada integral:

$$\int 2x\,dx + \int \frac{x^2}{2}\,dx + \int 4x^3\,dx = 2\int x\,dx + \frac{1}{2}\int x^2\,dx + 4\int x^3\,dx$$

- Aplicamos la regla de integración (iv) y después simplificamos:

$$\begin{aligned} 2\int x\,dx + \frac{1}{2}\int x^2\,dx + 4\int x^3\,dx &= 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + 4\left(\frac{x^4}{4}\right) + C \\ &= x^2 + \frac{x^3}{6} + x^4 + C \end{aligned}$$

- Entonces,

$$\int \left(2x + \frac{x^2}{2} + 4x^3\right) dx = x^2 + \frac{x^3}{6} + x^4 + C$$

Calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{x^4 + x^2 - 1}{x}\,dx$$

Ejemplo 3

- Para calcular esta integral indefinida empezamos aplicando la regla (i):

$$\int \frac{x^4}{x}\,dx + \int \frac{x^2}{x}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$$

- Al simlificar los integrandos obtenemos:

$$\int x^3\,dx + \int x\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$$

- Ahora podemos aplicar la regla (iv):

$$\int x^3\,dx + \int x\,dx - \int \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \ln x + C$$

- Entonces,

$$\int \frac{x^4 + x^2 - 1}{x}\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \ln x + C$$

Calcula la integral indefinida:

$$\int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$$

Ejemplo 4

- Empezamos aplicando la regla (i):

$$\int\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\int dx+\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{1}{x^2}\,dx-\int\frac{1}{x^3}\,dx$$

- Ahora vamos a expresar cada integral con un exponente negativo, salvo la segunda, que ya sabemos cómo integrar:

$$\int dx+\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{1}{x^2}\,dx-\int\frac{1}{x^3}\,dx=\int dx+\int\frac{dx}{x}+\int x^{-2}\,dx-\int x^{-3}\,dx$$

- Ahora podemos aplicar las reglas de integración (iii), (iv) y (v):

$$\begin{aligned}\int dx+\int\frac{dx}{x}+\int x^{-2}\,dx-\int x^{-3}\,dx &= x+\ln x+\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{x^{-2}}{-2}+C\\ &= x+\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{-2\,x^2}+C\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\int\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx=x+\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{-2\,x^2}+C$$

Ejemplo 5

Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int(2\,x-7)^{21}\,dx$$

- No es una buena idea empezar este problema desarrollando el binomio a la potencia 21.
- Mejor observa que si definimos: $v=2\,x-7$, entonces, $dv=2\,dx$.
- Entonces, hace falta completar la diferencial para poder integrar.
- Para eso multiplicamos por $2/2$ y factorizamos fuera de la integral al 2 del denominador:

$$\int(2\,x-7)^{21}\left(\frac{2}{2}dx\right)=\frac{1}{2}\int(2\,x-7)^{21}\,(2\,dx)$$

- Ahora podemos aplicar la regla (iv):

$$\begin{aligned}\int(2\,x-7)^{21}\,dx &= \frac{1}{2}\int(2\,x-7)^{21}\,(2\,dx)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2\,x-7)^{22}}{22}+C\\ &= \frac{(2\,x-7)^{22}}{44}+C\end{aligned}$$

Ejemplo 6

Calcula la integral indefinida:

$$\int x^3\sqrt{x^4-1}\,dx$$

- El integrando no aparece en alguna de las reglas conocidas por nosotros aún.
- Pero podemos hacer la siguiente transformación:
- Definimos: $v = x^4 - 1$.
- Entonces, $dv = 4x^3\,dx \qquad \Rightarrow \qquad x^3\,dx = \dfrac{dv}{4}$.
- Esto nos permite reescribir la integral indefinida como:

$$\int x^3\sqrt{x^4-1}\,dx = \int \sqrt{x^4-1}\,(x^3\,dx) = \int \sqrt{v}\left(\frac{dv}{4}\right) = \frac{1}{4}\int \sqrt{v}\,dv = \frac{1}{4}\int v^{1/2}\,dv$$

- Ahora podemos aplicar la regla (iv):

$$\frac{1}{4}\int v^{1/2}\,dv = \frac{1}{4}\frac{v^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\,v^{3/2}}{3} + C = \frac{v^{3/2}}{6} + C$$

- Regresando todo en términos de x, obtenemos:

$$\int x^3\sqrt{x^4-1}\,dx = \frac{(x^4-1)^{3/2}}{6} + C$$

Calcula la integral indefinida:

$$\int\left(8x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

Ejemplo 7

- Aplicando la regla (i) y las leyes de los exponentes, podemos transformar la integral a la siguiente forma:

$$\int\left(8x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 8\int x^3\,dx - \int (x)^{-1/2}\,dx$$

- Ahora podemos integrar cada una de las integrales que quedaron indicadas aplicando la regla (iv):

$$8\int x^3\,dx - \int (x)^{-1/2}\,dx = 8\left(\frac{x^4}{4}\right) - \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2x^4 - 2\sqrt{x} + C$$

- Entonces,

$$\int\left(8x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 2x^4 - 2\sqrt{x} + C$$

Calcula la integral indefinida:

$$\int\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}}\right)dx$$

Ejemplo 8

- Podemos transformar la integral a la siguiente forma:

$$\int\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}}\right)dx = \int\frac{dx}{\sqrt{x}} + \int\frac{2\,dx}{x\sqrt{x}} = \int\frac{dx}{x^{1/2}} + \int\frac{2\,dx}{x^{3/2}}$$

- Cada una de estas integrales es inmediata:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^{1/2}} + \int \frac{2\,dx}{x^{3/2}} &= \int x^{-1/2}\,dx + \int 2\,x^{-3/2}\,dx\\ &= \frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{2\,x^{-1/2}}{-1/2} + C\\ &= 2\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\int \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}}\right) dx = 2\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C$$

Ejemplo 9

Calcula la integral indefinida:

$$\int \left(\frac{x^3}{x^4-1}\right) dx$$

- Para calcular esta integral observa que si definimos:

$$v = x^4 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad dv = 4\,x^3\,dx \qquad \Rightarrow \qquad x^3\,dx = \frac{dv}{4}$$

- Entonces, haciendo la sustitución $v = x^4 - 1$, transformamos la integral a:

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^4-1} = \int \frac{dv}{4\,v} = \frac{1}{4}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{4}\ln v + C = \frac{1}{4}\ln\left(x^4-1\right) + C$$

Para el cálculo de las integrales de funciones algebraicas, el truco consiste en transformar el integrando para obtener integrales inmediatas. Es decir, escribirla en forma que se puedan integrar utilizando las fórmulas conocidas.

Algunas veces una manipulación algebraica bastará. En otros casos se va a requerir una sustitución.

Ejercicios 22.2.2 Calcula cada una de las siguientes integrales indefinidas.

1) $\displaystyle\int \left(x^3 - x^2 + 1\right) dx$ $\displaystyle = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x + C$

2) $\displaystyle\int \left(3\,x^3 - 2\,x^2 + x - 1\right) dx$ $\displaystyle = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$

3) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 2\,x - 4\right) dx$ $\displaystyle = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^3 + x^2 - 4\,x + C$

4) $\displaystyle\int \left(x^{-1} + 1 + x + x^2\right) dx$ $\displaystyle = \ln(x) + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C$

5) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x} + 9\,x^2\right) dx$ $\displaystyle = 3\left(\ln(x) + x^3\right) + C$

6) $$\int \frac{2\,x^2+9\,x-5}{1-2\,x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,x^2-5\,x+C$$

7) $$\int \frac{3\,x^2-4\,x-7}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\,x^2-7\,x+C$$

8) $$\int \frac{5\,x^2-11\,x+2}{x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\,x^2-x+C$$

9) $$\int \frac{6\,x^2-25\,x+14}{3\,x-2}\,\mathrm{d}x = x^2-7\,x+C$$

10) $$\int \frac{4\,x^2+19\,x-5}{x+5}\,\mathrm{d}x = 2\,x^2-x+C$$

11) $$\int (3\,x+2)^{12}\,\mathrm{d}x = \frac{(3\,x+2)^{13}}{39}+C$$

12) $$\int x\left(x^2-1\right)^{21}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(x^2-1\right)^{22}}{44}+C$$

13) $$\int \left(3\,x^4-5\right)^{15}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(3\,x^4-5\right)^{16}}{192}+C$$

14) $$\int 14x^3\left(7\,x^4+1\right)^{12}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(7\,x^4+1\right)}{40}+C$$

15) $$\int x^5\left(x^6+7\right)^{42}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(x^6+7\right)^{43}}{252}+C$$

16) $$\int \frac{2\,x-1}{x\,\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2(1+2\,x)}{\sqrt{x}}+C$$

17) $$\int \frac{5\,x-3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,\sqrt{x}\,(5\,x-9)+C$$

18) $$\int \frac{7\,x+5}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2(7\,x-5)}{\sqrt{x}}+C$$

19) $$\int \frac{x+3\,\sqrt{x}}{x\,\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 3\,\ln(x)+2\,\sqrt{x}+C$$

20) $$\int \frac{3\,x-5\,\sqrt{x}}{7\,x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{7}\,\ln(x)+\frac{6}{7}\,\sqrt{x}+C$$

21) $$\int \frac{3\,x^{11}}{x^{12}-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\ln\left(x^{12}-3\right)+C$$

22) $$\int \frac{3\,\sqrt[4]{x}}{x^{5/4}-3}\,\mathrm{d}x = \frac{12}{5}\,\ln\left(x^{5/4}-3\right)+C$$

23) $$\int \frac{3\,x^{7/4}}{x^{11/4}+11}\,\mathrm{d}x = \frac{12}{11}\,\ln\left(x^{11/4}+11\right)+C$$

24) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^{4/3}+1}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle = \frac{3}{4}\ln\left(x^{4/3}+1\right)+C$

25) $\displaystyle\int x^{3/7}\left(x^{\frac{10}{7}}+k\right)^{-1}\mathrm{d}x$ $\displaystyle = \frac{7}{10}\ln\left(x^{\frac{10}{7}}+k\right)+C$

Int. indefinida de funciones exponenciales

Ahora vamos a calcular integrales indefinidas de funciones exponenciales de la forma:

$$y = e^{v} \qquad \text{y} \qquad y = a^{v}$$

Para este fin, vamos a estar utilizando las reglas de integración (vi) y (vii).

Ejemplo 10

Calcula la integral indefinida:

$$\int e^{2x}\,dx$$

- Debemos usar la regla de integración (vii).
- Para eso definimos: $v = 2x$.
- Entonces, la diferencial $dv = 2\,dx$
- Pero en el integrando falta un 2 para que esté completa la diferencial y podamos aplicar la regla.
- Para completarla vamos a aplicar el siguiente truco:
- Dado que la regla (ii) nos permite sacar de la integral una constante, vamos a multiplicar en el integrando por $2/2$, vamos a dejar dentro del integrando al 2 del numerador y vamos a sacar de la integral al 2 del denominador:

$$\int e^{2x}\,dx = \int e^{2x}\left(\frac{2}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,(2\,dx) = \frac{1}{2}\,e^{2x}+C$$

Ejemplo 11

Calcula la integral indefinida:

$$\int \left(1-e^{-x}\right)dx$$

- Primero aplicamos la regla (i) de integración:

$$\int \left(1-e^{-x}\right)dx = \int dx - \int e^{-x}\,dx$$

- Ahora aplicamos las reglas (iii) y (vii) para terminar.
- Observa que si en la segunda integral definimos $v = -x$, entonces, $dv = -dx$, por lo que tenemos que completar la diferencial:

$$\int dx - \int e^{-x}\,dx = x + e^{-x} + C$$

Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int 24\,x^3\,e^{2x^4}\,dx$$

Ejemplo 12

- Tenemos el producto de dos funciones, pero posiblemente una de ellas sea la diferencial del argumento de la otra.
- Si definimos $v = 2\,x^4$, tenemos que: $d\,v = 8\,x^3$.
- Entonces, podemos reescribir la integral como:

$$\int 24\,x^3\,e^{2x^4}\,dx = 3\int e^{2x^4}\left(8\,x^3\,dx\right) = 3\int e^{v}(d\,v)$$

- Ahora la integral es inmediata:

$$3\int e^{2x^4}\left(8\,x^3\,dx\right) = 3\,e^{2\,x^4} + C$$

- Observa que ahora la integral estaba completa, multiplicada, además por 3.

Calcula la integral indefinida:

$$\int x\,e^{x^2}\,dx$$

Ejemplo 13

- Si hacemos $v = x^2$, vemos que $d\,v = 2\,x\,d\,x$.
- Entonces, la integral realmente es:

$$\int e^{x^2}\left(\frac{2}{2}\,x\,dx\right) = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,(2\,x\,dx) = \frac{1}{2}\int e^{v}(d\,v)$$

- Ahora integramos aplicando al regla (vii):

$$\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2\,x\,dx) = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + C$$

Calcula la integral indefinida:

$$\int 2^x\,dx$$

Ejemplo 14

- Aplicamos directamente la regla (vi) de integración:

$$\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

Ejemplo 15

Calcula la integral indefinida:

$$\int 2^x e^{2^x}\,dx$$

- Primero verificamos que la diferencial esté completa.
- Para eso vamos a utilizar la regla de derivación (xv).
- Si $v = 2^x$, entonces
$$dv = 2^x \ln 2\,dx$$
- Observa que la diferencial está incompleta.
- Falta multiplicarla por la constante $\ln 2$.
- Ahora reescribimos la integral de la forma:
$$\int e^{2^x}\left(\frac{2^x \ln 2\,dx}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\int e^{2^x}\,(2^x \ln 2\,dx) = \frac{1}{\ln 2}\int e^v\,dv = \frac{e^v}{\ln 2} + C = \frac{e^{2^x}}{\ln 2} + C$$

Ejemplo 16

Calcula la integral indefinida:

$$\int e^x\,(e^x + 17)^{19}\,dx$$

- No es buena idea desarrollar el binomio a la potencia 19.
- Mejor definimos: $v = e^x + 17$ y vemos que $dv = e^x\,dx$.
- Esto significa que la diferencial está completa.
- Entonces,
$$\int e^x\,(e^x + 17)^{19}\,dx = \int (e^x + 17)^{19}\,(e^x\,dx) = \frac{(e^x + 17)^{20}}{20} + C$$

Ejemplo 17

Calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{e^x + 1}$$

- Empezamos observando que no hay alguna regla de integración inmediata que nos permita calcular esta integral.
- Así que tendremos que transformarla algebraicamente hasta obtener una integral inmediata.
- Empezamos factorizando e^x en el denominador:
$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{dx}{e^x(1 + e^{-x})} = \int \frac{e^{-x}\,dx}{1 + e^{-x}}$$
- Ahora podemos definir: $v = 1 + e^{-x}$, y tenemos que $dv = -e^{-x}$.

- Completamos la diferencial multiplicando por -1 tanto dentro como fuera de la integral:

$$\int \frac{e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{-e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{dv}{v} = -\ln\left(1+e^{-x}\right)+C$$

- Todavía podemos simplificar este resultado utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{e^x+1} &= -\ln\left(1+e^{-x}\right)+C\\ &= -\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)+C\\ &= -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)+C\\ &= -\ln(1+e^x)+\ln(e^x)+C\\ &= x-\ln(1+e^x)+C\end{aligned}$$

- Y terminamos.

En caso de que la diferencial requiera de multiplicarse por una variable para completarla, será imposible, dado que en la regla (ii) de integración se supone que a es una constante.

Por ejemplo, en la integral:

$$\int e^{x^2}\,dx$$

Si definimos $v = x^2$, tenemos que $dv = 2x\,dx$. Así que la diferencial está incompleta.

Pero en este caso debemos multiplicar por $2x$, que no es constante. Así que no podemos completar la diferencial.

De hecho, esta integral no se puede calcular con los métodos que hemos visto hasta aquí. Pero sí hay métodos para calcularla de manera aproximada.

Calcula cada una de las siguientes integrales indefinidas. **Ejercicios 22.2.2**

1) $\displaystyle\int (2x+1)\,e^{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad = e^{x^2+x}+C$

2) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x$ $\qquad = \dfrac{1}{3}e^{x^3}+C$

3) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{3}\,\mathrm{d}x$ $\qquad = \dfrac{e^{2x}}{6}+C$

4) $\displaystyle\int \frac{5}{7}e^{4x-1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad = \dfrac{5}{28}e^{4x-1}+C$

5) $\displaystyle\int (1+e^x)\,e^{x+e^x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad = e^{x+e^x}+C$

6) $\displaystyle\int \left(3x^2-1\right)e^{x^3-x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad = e^{x^3-x}+C$

7) $\displaystyle\int x^2 5^{x^3}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle = \frac{1}{3}\frac{5^{x^3}}{\ln(5)} + C$

8) $\displaystyle\int x^3 3^{1-x^4}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle = -\frac{1}{4}\frac{3^{1-x^4}}{\ln(3)} + C$

9) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ $= e^{\sqrt{x}} + C$

10) $\displaystyle\int \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) e^{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ $= e^{x+\sqrt{x}} + C$

Int. indefinida de funciones trigonométricas

Ahora vamos a calcular integrales indefinidas de funciones trigonométricas aplicando las reglas (viii), (ix), (x), (xi) y (xii) del formulario de integrales indefinidas inmediatas.

Siempre es importante verificar que la diferencial está completa para poder integrar de manera inmediata.

Ejemplo 18

Calcula la integral indefinida:

$$\int \cos(2\,x)\,d\,x$$

- Para calcular esta integral vamos a aplicar la regla (ix).
- Definimos $v = 2\,x$, entonces: $d\,v = 2\,d\,x$.
- Así que tenemos que completar la diferencial multiplicando por 2:

$$\int \cos(2\,x)\,d\,x = \frac{1}{2}\int \cos(2\,x)(2\,d\,x) = \frac{1}{2}\sin(2\,x) + C$$

- Verifica que la integral indefinida es correcta derivando el resultado.

Algunas veces podremos utilizar el resultado de una integral para calcular más fácilmente otra integral.

Por ejemplo,

$$\int \cos(a\,x)\,d\,x = \frac{1}{a}\sin(a\,x) + C$$

es una regla que se deduce del ejemplo anterior y que podemos usar para integrales indefinidas que tengan esa forma.

De manera semejante se puede mostrar que:

$$\int \sin(a\,x)\,d\,x = -\frac{1}{a}\cos(a\,x) + C$$

Ejemplo 19

Calcula la integral indefinida

$$\int (x - \sin x + \cos(2x))\,d\,x$$

- Aplicamos la regla (i) primero:

$$\int (x - \sin x + \cos(2x))\, d\,x = \int x\, d\,x - \int \sin x\, d\,x + \int \cos(2x)\, d\,x$$

- Ahora aplicamos las reglas (iv), (viii) y (ix).

$$\int x\, d\,x - \int \sin x\, d\,x + \int \cos(2x)\, d\,x = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

Calcula la integral indefinida:

$$\int \csc^2(3x)\, d\,x$$

Ejemplo 20

- Definiendo $v = 3\,x$, vemos que $d\,v = 3\,d\,x$.
- Esto nos está indicando que la diferencial está incompleta.
- Aplicamos la regla (x) para integrar:

$$\int \csc^2(3x)\, d\,x = \frac{1}{3}\int \csc^2(3x)(3\,d\,x) = -\frac{\cot(3x)}{3} + C$$

Para algunas de las integrales trigonométricas vamos a requerir del uso de las identidades trigonométricas que puedes encontrar en el capítulo final del libro.

Calcula la integral indefinida:

$$\int \sin^2 x\, d\,x$$

Ejemplo 21

- Como no tenemos una regla que nos permita calcular la integral, tenemos que transformar el integrando para poderlo integrar.
- Utilizamos la identidad trigonométrica:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

  la cual transformaremos sustituyendo: $x = \alpha/2$ y elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2\,x)}{2}$$

- Entonces la integral indefinida se puede reescribir como:

$$\int \sin^2 x\, d\,x = \frac{1}{2}\int (1 - \cos(2x))\, d\,x$$

- Aplicando las reglas (i), (iii) y (ix) de integración indeterminada inmediata:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\, dx &= \frac{1}{2}\int (1-\cos(2x))\, dx\\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx\\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C\end{aligned}$$

- Y terminamos.

Ejemplo 22

Calcula la integral indefinida:

$$\int \cos^2(5x)\, dx$$

- La identidad trigonométrica que nos auxiliará a calcular esta integral es:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

que vamos a transformar para obtener:

$$\cos^2(\xi) = \frac{1+\cos(2\xi)}{2}$$

- Y la integral será:

$$\int \cos^2(5x)\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos(10x))\, dx$$

- Integramos aplicando las mismas reglas que en el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}\int \cos^2(5x)\, dx &= \frac{1}{2}\int (1+\cos(10x))\, dx\\ &= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{20}\int \cos(10x)\, dx\\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{200}\sin(10x) + C\end{aligned}$$

Más adelante vamos a estudiar cómo integrar potencias de funciones trigonométricas.

En la siguiente sección estudiaremos un método que nos ayuda a integrar funciones irracionales que contienen en sus argumentos formas como: $a^2 - v^2$, $v^2 + a^2$, $v^2 - a^2$, etc.

Ejercicios 22.2.2 Calcula cada una de las siguientes integrales indefinidas.

1) $\displaystyle\int x\cos\left(2x^2\right) dx$ $\qquad = \dfrac{1}{4}\sin\left(2x^2\right) + C$

2) $\displaystyle\int 2x\sec\left(x^2\right) dx$ $\qquad = \ln\left[\sec\left(x^2\right) + \tan\left(x^2\right)\right] + C$

3) $\displaystyle\int e^x \tan(e^x)\,dx \qquad = -\ln[\cos(e^x)] + C$

4) $\displaystyle\int (1-x)\sin\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\mathrm{d}x \qquad = \cos\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) + C$

5) $\displaystyle\int [\sin(3x) - \cos(x+5)]\,\mathrm{d}x \qquad = -\frac{1}{3}\cos(3x) - \sin(x+5) + C$

6) $\displaystyle\int \sin(\cos(2x))\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x \qquad = \frac{1}{2}\cos(\cos(2x)) + C$

7) $\displaystyle\int \cos(\sin(2x))\cdot\cos(2x)\,\mathrm{d}x \qquad = \frac{1}{2}\sin(\sin(2x)) + C$

8) $\displaystyle\int -x^2\tan\left(x^3\right)\mathrm{d}x \qquad = \frac{1}{3}\ln\left(\cos\left(x^3\right)\right) + C$

9) $\displaystyle\int \sec(\sin(2x))\cdot\cos(2x)\,\mathrm{d}x \qquad = \frac{1}{2}\ln[\sec(\sin(2x)) + \tan(\sin(2x))] + C$

10) $\displaystyle\int [\tan(2x) - \sec(7x)]\,\mathrm{d}x \qquad = \frac{1}{4}\ln\left(1+\tan^2(2x)\right) - \frac{1}{7}\ln(\sec(7x) + \tan(7x)) + C$

11) $\displaystyle\int \frac{\tan[\ln(x)]}{x}\,\mathrm{d}x \qquad = -\ln[\cos(\ln(x))] + C$

12) $\displaystyle\int \sec(x+1)\,\mathrm{d}x \qquad = \ln[\sec(x+1) + \tan(x+1)] + C$

22.2.3 Integración por sustitución trigonométrica

En esta sección vamos a estudiar el primer método para integrar funciones que no son inmediatamente integrables a partir de la tabla de integrales que tenemos.

Las siguientes sustituciones sirven para simplificar el integrando a una forma inmediatamente integrable:

Para:	**Sustituir:**	**para obtener:**		
$\sqrt{a^2 - b^2u^2}$	$u = \dfrac{a}{b}\sin z$	$a\sqrt{1-\sin^2 z}$	$=$	$a\cos z$
$\sqrt{a^2 + b^2u^2}$	$u = \dfrac{a}{b}\tan z$	$a\sqrt{1+\tan^2 z}$	$=$	$a\sec z$
$\sqrt{b^2u^2 - a^2}$	$u = \dfrac{a}{b}\sec z$	$a\sqrt{\sec^2 z - 1}$	$=$	$a\tan z$

Debes recordar siempre sustituir dx a partir del cálculo correspondiente para que la diferencial quede en términos de dz.

En el apéndice del libro se encuentran las definiciones básicas de las funciones trigonométricas y las identidades más frecuentemente usadas.

Ejemplo 1

Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{x}\,dx$$

- Empezamos observando que $a^2 = 9$, lo cual implica que $a = 3$, y $b^2 = 4$, es decir, $b = 2$.
- Entonces hacemos: $x = (a/b)\sin z$:

$$x = \frac{3}{2}\sin z \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{3}{2}\cos z\,dz$$

- Sustituyendo estos valores en la integral obtenemos:

$$\int \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{9-4\left(\frac{3}{2}\sin z\right)^2}}{\frac{3}{2}\sin z}\left(\frac{3}{2}\cos z\,dz\right)$$

- Ahora podemos simplificar dentro del signo de raíz:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-4\left(\frac{3}{2}\sin z\right)^2}}{\frac{3}{2}\sin z}\left(\frac{3}{2}\cos z\,dz\right) &= \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 z}}{\sin z}\cos z\,dz \\
&= \int \frac{3\sqrt{1-\sin^2 z}}{\sin z}\cos z\,dz
\end{aligned}$$

- Pero $1-\sin^2 z = \cos^2 z$,luego,

$$\begin{aligned}
3\int \frac{\sqrt{1-\sin^2 z}}{\sin z}\cos z\,dz &= 3\int \frac{\cos z}{\sin z}\cos z\,dz \\
&= 3\int \frac{\cos^2 z}{\sin z}\,dz \\
&= 3\int \frac{1-\sin^2 z}{\sin z}\,dz \\
&= 3\int \left(\frac{1}{\sin z} - \sin z\right)dz
\end{aligned}$$

- Ahora podemos integrar:

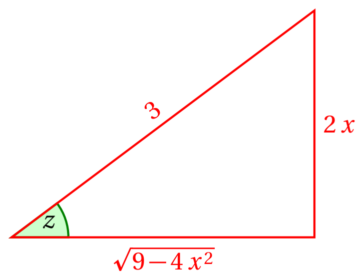
$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{x}\,dx &= 3\int \frac{1}{\sin z}\,dz - 3\int \sin z\,dz \\
&= 3\int \csc z\,dz + 3\cos z \\
&= 3\ln|\csc z - \cot z| + 3\cos z + C
\end{aligned}$$

- Hasta aquí hemos obtenido un resultado parcial.
- Recuerda que inicialmente la integral estaba dada en términos de x, no de z.

- Por lo que nosotros debemos dar el resultado en términos de x.
- Para lograr eso, vamos a representar geométricamente la sustitución inicial:

$$x = \frac{3}{2}\sin z \qquad \Rightarrow \qquad \sin z = \frac{2\,x}{3} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

- En el triángulo rectángulo tenemos[1]:



- Por la forma como se definen las funciones trigonométricas a partir de un triángulo rectángulo tenemos:

$$\csc z = \frac{3}{2\,x}, \qquad \cos z = \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{3} \qquad \text{y} \qquad \cot z = \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{2\,x}$$

- Entonces, podemos reescribir la solución como:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{x}\,d\,x &= 3\,\ln|\csc z - \cot z| + 3\,\cos z + C\\
&= 3\,\ln\left|\frac{3}{2\,x} - \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{2\,x}\right| + 3\left(\frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{3}\right) + C\\
&= 3\,\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4\,x^2}}{2\,x}\right| + \sqrt{9-4\,x^2} + C
\end{aligned}$$

Observa que hemos utilizado un artificio: como la integral no se puede integrar de manera inmediata debido a la forma que tiene, sabiendo que puede transformarse a una forma inmediatamente integrable usando una sustitución trigonométrica, vamos a utilizar la transformación sugerida en la tabla dada en la página 1001.

Después de hacer la sustitución obtenemos una integral en términos de funciones trigonométricas que se puede integrar usando la variable z.

Para regresar este resultado a términos de x, utilizamos la sustitución que tomamos de la tabla para representarla geométricamente usando un triángulo rectángulo y las definiciones de las funciones trigonométricas en él.

La integral

$$\int \frac{x\,d\,x}{\sqrt{9\,x^2-4}}$$

se puede resolver a través de la regla de integración (iv). Utiliza sustitución trigonométrica para calcularla y después la regla (iv) para verificar el resultado.

Ejemplo 2

[1] Para calcular el cateto adyancente al ángulo z hemos utilizado el teorema de Pitágoras.

- De acuerdo a la tabla de sustituciones para este tipo de integrales, haremos:

$$x = \frac{2}{3}\sec z \qquad \Rightarrow \qquad d\,x = \frac{2}{3}\sec z \tan z\,d\,z$$

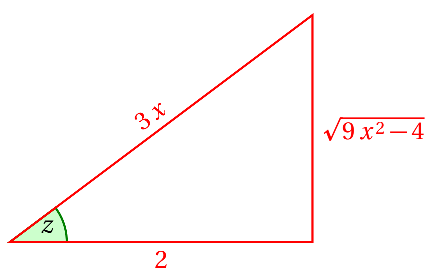
- Ahora sustituimos estos valores en la integral para transformarla:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,d\,x}{\sqrt{9\,x^2-4}} &= \int \frac{\frac{2}{3}\sec z\left(\frac{2}{3}\sec z\tan z\,d\,z\right)}{\sqrt{9\left(\frac{2}{3}\sec z\right)^2-4}}\\
&= \frac{4}{9}\int \frac{\sec^2 z\tan z\,d\,z}{\sqrt{4\sec^2 z-4}}\\
&= \frac{4}{9}\int \frac{\sec^2 z\tan z\,d\,z}{2\sqrt{\sec^2 z-1}}
\end{aligned}$$

- Pero, $\sqrt{\sec^2 z-1} = \sqrt{\tan^2 z} = \tan z$, luego

$$\int \frac{x\,d\,x}{\sqrt{9\,x^2-4}} = \frac{2}{9}\int \frac{\sec^2 z\tan z\,d\,z}{\tan z} = \frac{2}{9}\int \sec^2 z\,d\,z = \frac{2}{9}\tan z + C$$

- Ahora vamos a reescribir el resultado en términos de x.
- El triángulo rectángulo que representa la sustitución que hicimos al principio del problema es el siguiente:



- Entonces, de acuerdo a este triángulo, tenemos:

$$\tan z = \frac{\sqrt{9\,x^2-4}}{2}$$

- Y al sustituir este valor en el resultado de la integral obtenemos:

$$\int \frac{x\,d\,x}{\sqrt{9\,x^2-4}} = \frac{2}{9}\,\frac{\sqrt{9\,x^2-4}}{2} + C = \frac{\sqrt{9\,x^2-4}}{9} + C$$

- Ahora vamos a verificar el resultado usando la regla (iv):
- Para este fin, definimos: $v = 9\,x^2-4$. Entonces, $d\,v = 18\,x\,d\,x$. Luego $x\,d\,x = \dfrac{d\,v}{18}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,d\,x}{\sqrt{9\,x^2-4}} &= \int \frac{d\,v}{18\sqrt{v}} = \frac{1}{18}\int v^{-1/2}\,d\,v = \frac{1}{18}\cdot\frac{v^{1/2}}{1/2} + C\\
&= \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{1}\left(9\,x^2-4\right)^{1/2} + C\\
&= \frac{\sqrt{9\,x^2-4}}{9} + C
\end{aligned}$$

- Y terminamos.

Ejemplo 3 Calcula la integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16\,x^2+25}}$$

- Usaremos la sustitución:

$$x = \frac{5}{4}\tan z \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{5}{4}\sec^2 z\,dz$$

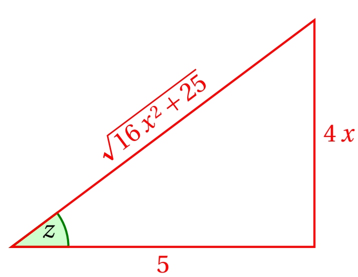
- Esto transforma la integral a:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{16\,x^2+25}} &= \int \frac{\frac{5}{4}\sec^2 z\,dz}{\sqrt{16\left(\frac{5}{4}\tan z\right)^2+25}}\\
&= \frac{5}{4}\int \frac{\sec^2 z\,dz}{\sqrt{25\tan z^2+25}}\\
&= \frac{5}{4}\int \frac{\sec^2 z\,dz}{5\sqrt{\tan z^2+1}}\\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\sec^2 z\,dz}{\sqrt{\tan z^2+1}}
\end{aligned}$$

- Pero $\sqrt{\tan z^2+1} = \sqrt{\sec^2 z} = \sec z$, luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16\,x^2+25}} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec^2 z\,dz}{\sec z} = \frac{1}{4}\int \sec z = \frac{1}{4}\ln|\sec z + \tan z| + C$$

- Para hacer el cambio a la variable x usamos el siguiente triángulo rectángulo:



- Entonces, haciendo las sustituciones de acuerdo a la definición de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo obtenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16\,x^2+25}} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{16\,x^2+25}}{5} + \frac{4\,x}{5}\right| + C$$

Ejemplo 4

Calcula la siguiente integral:
$$\int \frac{\sqrt{1-25\,x^2}}{x^2}\,dx$$

- Usaremos la sustitución:

$$x = \frac{1}{5}\sin z \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{5}\cos z\,dz$$

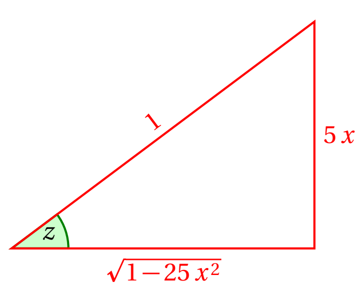
- Al sustituir estos valores en la integral obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1-25\,x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{\sqrt{1-25\left(\frac{1}{5}\sin z\right)^2}}{\left(\frac{1}{5}\sin z\right)^2}\left(\frac{1}{5}\cos z\,dz\right)\\
&= \int \frac{5\sqrt{1-\sin^2 z}}{\sin^2 z}\,(\cos z\,dz)\\
&= 5\int \frac{\cos z}{\sin^2 z}\cos z\,dz\\
&= 5\int \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}\,dz\\
&= 5\int \cot^2 z\,dz
\end{aligned}$$

- Ahora utilizaremos la identidad: $\cot^2 z = \csc^2 z - 1$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1-25\,x^2}}{x^2}\,dx &= 5\int \cot^2 z\,dz\\
&= 5\int \left(\csc^2 z - 1\right)dz\\
&= 5\int \csc^2 z - 5\int dz\\
&= -5\cot z - 5\,z + C
\end{aligned}$$

- Ahora calculamos los valores de z y $\cot z$ en términos de x a partir del triángulo rectángulo correspondiente:



$$\sin z = \frac{5\,x}{1} = 5\,x \qquad \Rightarrow \qquad z = \arcsin(5\,x)$$
$$\cot z = \frac{\sqrt{1-25\,x^2}}{5\,x}$$

- Ahora sustitumos estos valores en el valor de la integral:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1-25\,x^2}}{x^2}\,d\,x &= -5\,\cot z - 5\,z + C\\
&= -5\left(\frac{\sqrt{1-25\,x^2}}{5\,x}\right) - 5\,\arcsin(5\,x) + C\\
&= -\frac{\sqrt{1-25\,x^2}}{x} - 5\,\arcsin(5\,x) + C
\end{aligned}$$

Es importante recordate que la integral inicial estaba dada en términos de la variable x.

Si entregas un resultado en términos de z, en realidad tu resultado no es incorrecto, pero tampoco es correcto. Simplemente está incompleto.

Debes expresar el resultado en términos de la variable que aparezca la integral inicial. Por eso se requiere hacer el cambio de variable dos veces: La primera para poder hacer la integral, la segunda para entender el resultado.

Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{d\,x}{x^2\,\sqrt{x^2-4}}\,d\,x$$

Ejemplo 5

- Hacemos:

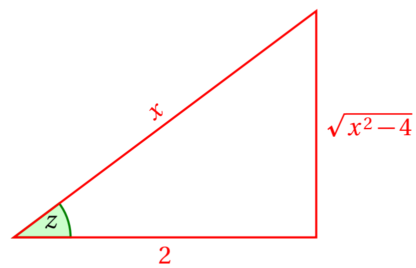
$$x = 2\,\sec z \qquad \Rightarrow \qquad d\,x = 2\,\sec z\,\tan z\,d\,z$$

- Sustituyendo estos valores en la integral obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\,x}{x^2\,\sqrt{x^2-4}}\,d\,x &= \int \frac{2\,\sec z\,\tan z\,d\,z}{4\,\sec^2 z\,\sqrt{4\,\sec^2 z - 4}}\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sec z\,\tan z\,d\,z}{2\,\sec^2 z\,\sqrt{\sec^2 z - 1}}\\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\tan z\,d\,z}{\sec z\,\tan z}\\
&= \frac{1}{4}\int \frac{d\,z}{\sec z}\\
&= \frac{1}{4}\int \cos z\\
&= \frac{1}{4}\,\sin z + C
\end{aligned}$$

- Dado que $x = 2\,\sec z$, se sigue: $\sec z = \dfrac{x}{2}$.

- El triángulo que corresponde para hacer el cambio de variable de z a x es:



- Entonces, $\sin z = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$, y la integral queda:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + C$$

Ejercicios 22.2.3 Calcula cada una de las siguientes integrales utilizando el método de integración por sustitución trigonométrica.

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{x}-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right)+C$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{9+x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}-\frac{3}{x}\right)+C$

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle= 5\ln\left(\frac{5}{4x}-\frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x}\right)+\sqrt{25-16x^2}+C$

4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle= \sqrt{x^2-9}-3\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right)+C$

5) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9x^2-16}}{x}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle= \sqrt{9x^2-16}-4\arctan\left(\frac{\sqrt{9x^2-16}}{4}\right)+C$

6) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle= -\frac{4\sqrt{4+x^2}}{x}+C$

7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ $\displaystyle= \frac{(x-2)(x+2)}{4x\sqrt{4-x^2}}+C$

8) $\displaystyle\int \sqrt{4-9x^2}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle= \frac{2}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{4-9x^2}+C$

9) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-100}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-100}-50\ln\left(\frac{x}{10}+\frac{\sqrt{x^2-100}}{10}\right)+C$

10) $\displaystyle\int \sqrt{100-x^2}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle= 50\arcsin\left(\frac{x}{100}\right)+\frac{x\sqrt{100-x^2}}{2}+C$

11) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C$

12) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle= -\frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}+4\arcsin\left(\frac{4x}{5}\right)+C$

13) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+25\,x^2}}\,dx = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{\sqrt{4+25\,x^2}}{2}+\frac{5\,x}{2}\right)+C$

14) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9\,x^2+100}}\,dx = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{9\,x^2+100}}{10}+\frac{3\,x}{10}\right)+C$

15) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx = \ln\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}+\frac{x}{3}\right)+C$

16) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{x\,\sqrt{x^2+1}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+C$

17) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{25-16\,x^2}}\,dx = \frac{25}{128}\arcsin\left(\frac{4\,x}{5}\right)-\frac{x\,\sqrt{25-16\,x^2}}{32}+C$

18) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-16}\,dx = \frac{1}{3}\left(x^2-16\right)^{3/2}+C$

19) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{8}\arcsin(x)-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{8}+\frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{4}+C$

20) $\displaystyle\int \sqrt{4+x^2}\,dx = \frac{x\,\sqrt{4+x^2}}{2}+2\ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\right)+C$

21) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{x\,\sqrt{x^2-4}}{2}-2\ln\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)+C$

22) $\displaystyle\int \sqrt{16-25\,x^2}\,dx = \frac{8}{5}\arcsin\left(\frac{5\,x}{4}\right)+\frac{x\,\sqrt{16-25\,x^2}}{2}+C$

23) $\displaystyle\int \sqrt{1-4\,x^2}\,dx = \frac{1}{4}\arcsin(2\,x)+\frac{x\,\sqrt{1-4\,x^2}}{2}+C$

24) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+25}\,dx = \frac{x\,\sqrt{x^2+25}}{2}+\frac{25}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+25}+x}{5}\right)+C$

25) $\displaystyle\int \sqrt{4\,x^2+9}\,dx = \frac{x\,\sqrt{4\,x^2+9}}{2}+\frac{9}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+9}+2\,x}{3}\right)+C$

Capítulo 23

La integral definida y los métodos de integración

Por aprender...

Por qué es importante...

La integral definida puede representar alguna magnitud física, fuerza, presión, distancia, etc., así como cualquier otra cantidad que se obtiene como el producto de otras dos. Las técnicas de integración son métodos que usaremos para calcular antiderivadas de funciones que encontraremos frecuentemente.

23.1 La Integral Definida

Ya vimos que la integral indefinida nos da como resultado una familia de funciones.

Para calcular una función de toda esa familia, debemos definir el valor de la constante de integración, generalmente imponiendo una condición, por ejemplo, que pase por un punto.

La integral definida no nos devuelve como resultado una función, sino un número real.

Estas integrales tienen gran importancia para resolver problemas de diversis tipos.

23.1.1 Notación de sumatoria

Dado que la integral definida se interpreta generalmente como un área, vamos a necesitar conocer la notación de sumatoria.

Sumatoria

La sumatoria de los primeros n términos de una sucesión $\{x_i\}$ se define como:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n$$

Definición 1

En palabras, la sumatoria es igual a la suma de los términos que vamos a considerar.

Calcula la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{10} i$$

Ejemplo 1

- En palabras, esta notación nos dice que debemos sumar los números del 1 al 10:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Teorema 1

Suma de Gauss

La suma de Gauss se refiere a la suma de los primeros n números naturales, y se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Definición 2

Calcula:

$$\sum_{i=0}^{5} (2\,i+1)$$

Ejemplo 2

- Ahora vamos a calcular la suma de los primeros 5 impares:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{4}(2\,i+1) &= [2(0)+1]+[2(1)+1]+[2(2)+1]+[2(3)+1]+[2(4)+1]\\ &= 1+3+5+7+9=25\end{aligned}$$

Definición 3

PROPIEDADES DE LA SUMATORIA

La sumatoria presenta las siguientes propiedades:

i. $\sum_{i=1}^{n} c = n\cdot c$

ii. $\sum_{i=1}^{n} c\cdot a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

iii. $\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

Además de la suma de Gauss, tenemos las sumatorias:

Teorema 2

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ \sum_{i=1}^{n} i^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

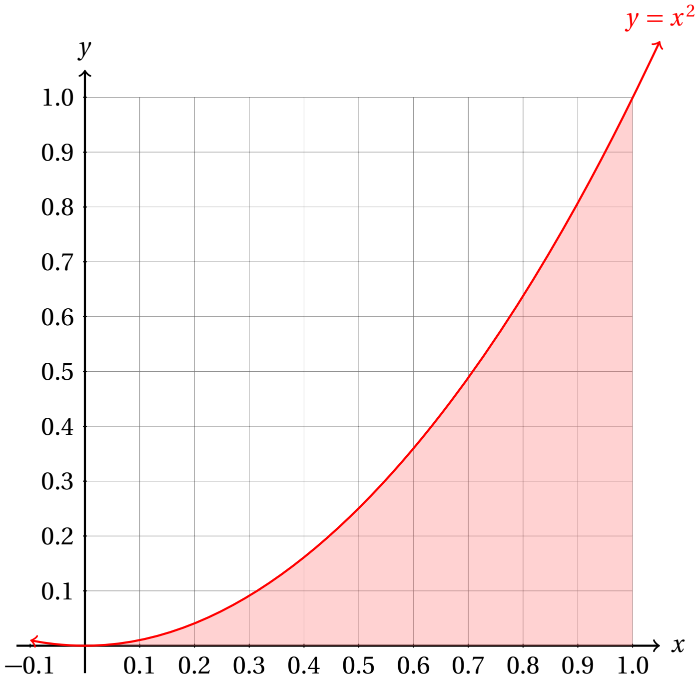
23.1.2 ÁREA BAJO UNA CURVA

Nosotros conocemos muchas fórmulas para calcular el área de diferentes figuras geométricas.

Por ejemplo, para calcular el área A de un triángulo con base b y altura h, usamos la fórmula:

$$A=\frac{b\cdot h}{2}$$

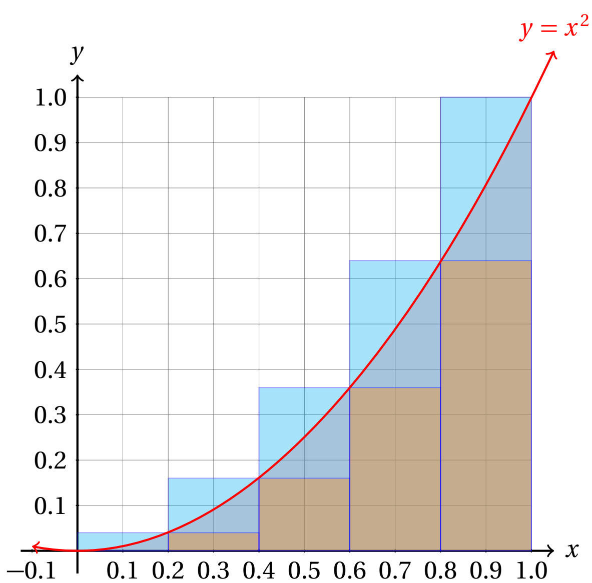
Sin embargo, no sabemos cómo calcular el área que hay entre la parábola $y=x^2$, el eje x y las rectas verticales $x=0$ y $x=1$.



Sin embargo, podemos aproximar el valor de esta área si vamos seccionando el intervalo $(0,1)$ y dibujamos rectángulos con altura igual a la ordenada $y_i = x_i^2$.

Para esto tenemos dos opciones, bien dibujamos los rectángulos de manera que una parte del mismo quede por encima de la parábola, bien los dibujamos de manera que una parte quede por debajo de la parábola.

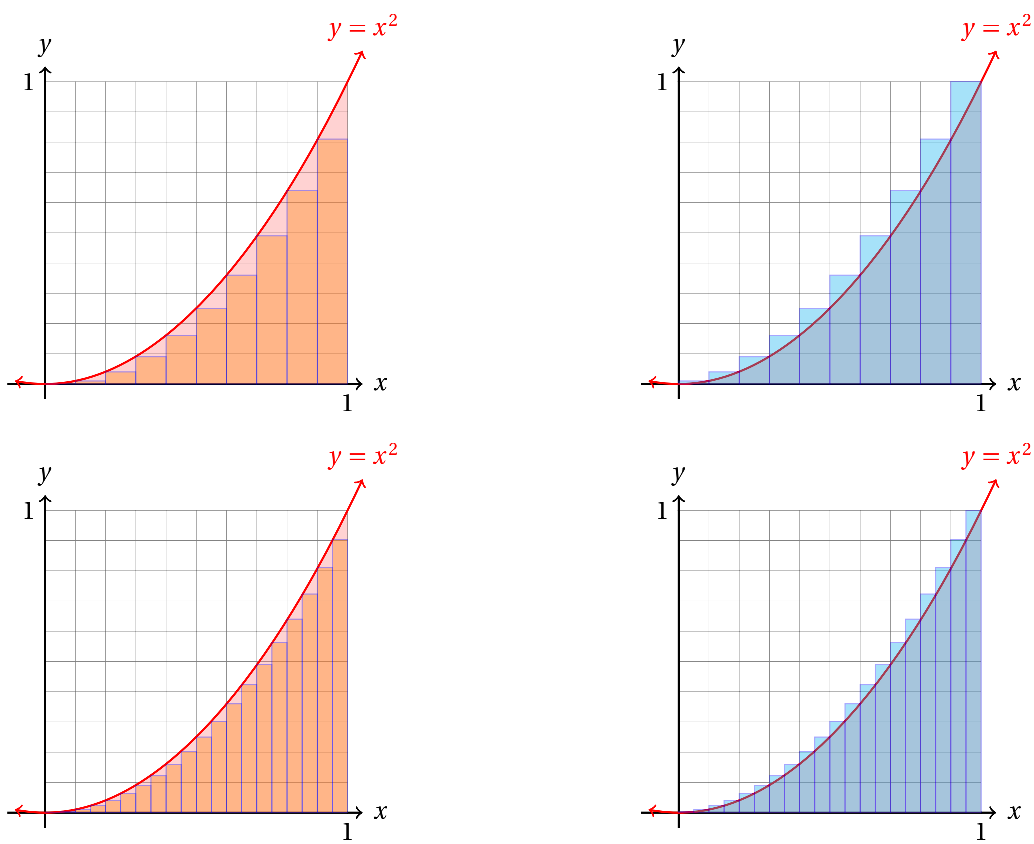
La aproximación que hagamos tendrá, en el primer caso un error por exceso, es decir, será mayor al valor del área que buscamos. En el segundo caso el área aproximada será un poco menor al área debajo de la parábola.

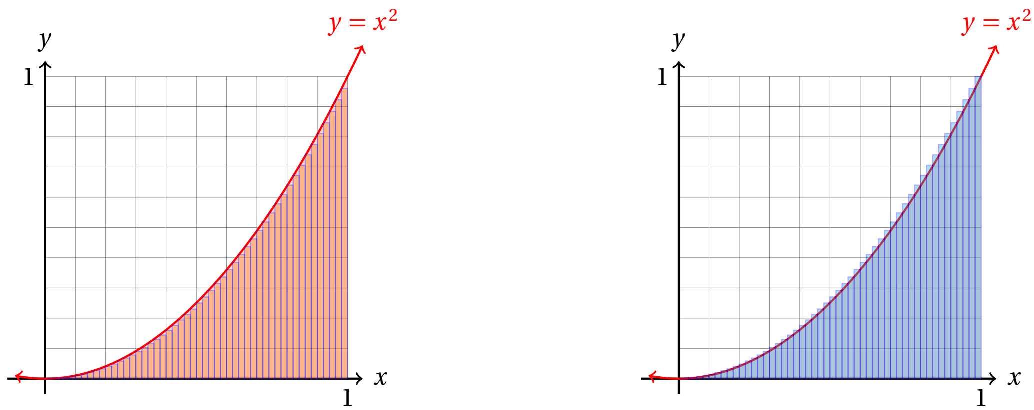


Podemos calcular el área de cada rectángulo que queda por encima de la parábola y de los que quedan por debajo y ordenar esta información en una tabla:

i	A_{inf}	A_{sup}
1	0.0	0.0080
2	0.0080	0.032
3	0.032	0.072
4	0.072	0.128
5	0.128	0.2
Totales:	0.24	0.44

El tamaño del error dependerá de la cantidad de rectángulos que dibujemos para hacer la aproximación. A mayor cantidad de rectángulos, las regiones de cada rectángulo que queden por encima o por debajo serán cada vez más pequeños que la suma de todos esos errores será despreciable:





En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos para diferente número de rectángulos en el intervalo (0,1):

Totales:

n	A_{inf}	A_{sup}
10	0.285	0.385
20	0.309	0.359
30	0.317	0.350
40	0.321	0.346
50	0.323	0.343
100	0.328	0.388

de la tabla se hace evidente que el área tiende a un número A que satisface:

$$0.328 \leq A \leq 0.388$$

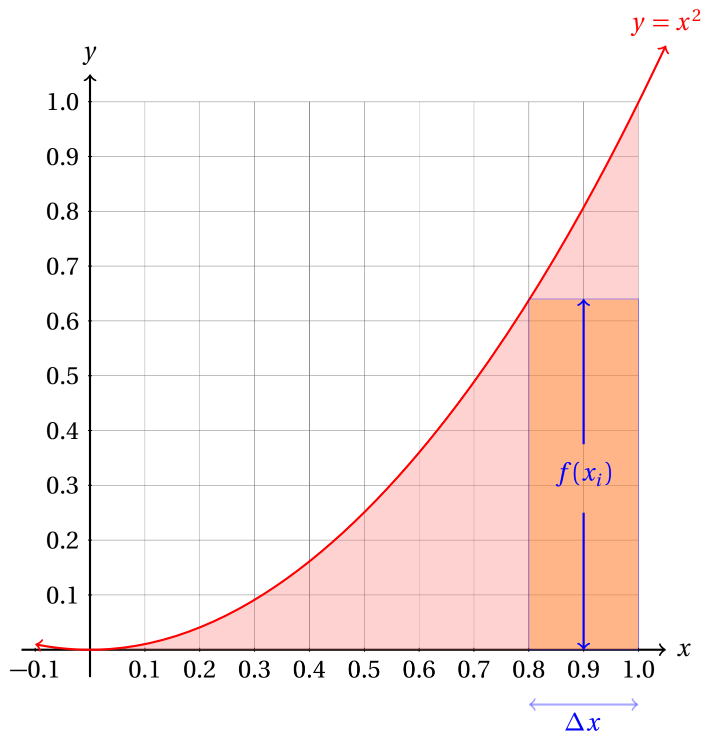
Si dibujamos más rectángulos obtendremos una mejor aproximación.

Entonces, si encontramos el límite de la suma de las áreas de todos los rectángulos que dibujamos bajo la curva cuando el número de rectángulos tiende a infinito, debemos obtener el área bajo la curva $y = f(x)$ desde desde $x = a$ hasta $x = b$. Es decir,

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

representa el área que buscamos.

Observa que la base del rectángulo mide $\Delta x = (b-a)/n$ porque hemos decidido hacer n particiones del mismo tamaño todas y que la altura del rectángulo puede ser calculada utilizando la función: $f(x_i)$.



Cuando el número de particiones (n) crece, el error que se comete al aproximar el área bajo la curva con el área del rectángulo, cada vez es más pequeño y cuando n tiende a infinito, Δx tiende a cero. Debido a esto decimos que el área bajo la curva es:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Ejemplo 1

Calcula el área bajo la parábola $y = x^2$ en el intervalo $(0,1)$ usando el límite:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

- Por definición:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\left(\frac{1-0}{n}\right)$$

- Primero haremos la suma y después vamos a calcular el límite cuando n tiende a infinito.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i^2\left(\frac{1}{n}\right) &= \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{n^3}\right)\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n} i^2
\end{aligned}$$

- Pero ya habíamos mencionado que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Entonces, podemos sustituir esto y obtener:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\left(\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

- Entonces, el área bajo la parábola $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ es $1/3$ exactamente.

Este mismo procedimiento es el que realmente hacemos cuando calculamos la integral definida, pues esta es la forma como se define.

Observa que de acuerdo a la tabla dada en la página 1017, $1/3$ siempre cumple: $A_{inf} < 1/3 < A_{sup}$, como era de esperar.

23.1.3 Diferencial de Área

Si consideramos un par rectángulos con base común que usamos para aproximar el área bajo la curva, vemos que la base es Δx, la altura del rectángulo de mayor área es $f(x_i+\Delta x)$ y la altura del otro es $f(x_i)$.

El área bajo la curva es mayor que el área del rectángulo que queda por debajo de la curva y a su vez menor que el área del rectángulo que queda por encima. Algebraicamente:

$$(\Delta x)\cdot f(x) \leq \Delta A \leq (\Delta x)\cdot f(x+\Delta x)$$

Al dividir la desigualdad entre Δx, obtenemos:

$$f(x) \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq f(x+\Delta x)$$

Si hacemos que Δx tienda a cero, obtenemos que la derivada de la función que calcula el área debajo de la función $y = f(x)$ es igual a $f(x)$:

$$f(x) \leq \frac{dA}{\mathrm{d}x} \leq f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dA}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

En palabras, si queremos calcular el área debajo de la curva de una función dada, tenemos que integrarla, dado que la operación inversa de derivar es integrar.

Y esta integral está definida por el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

que incluye información acerca de los límites de integración, es decir, en qué intervalo queremos calcular el área bajo la curva, por eso se llama integral definida.

De hecho, el símbolo de integración $\int$ representa una "S" *estirada*, para representar la suma de las áreas de los rectángulos que se dibujan (mentalmente) cuando hacemos que n tienda a infinito.

Así que para calcular áreas vamos a utilizar las mismas reglas de integración que hemos estado utilizando hasta ahora.

Definición 1

INTEGRAL DEFINIDA

La integral definida de la función contínua $y = f(x)$ desde a hasta b,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

representa el área bajo la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Ejemplo 1 Calcula el área bajo la curva $y = x^2$ y sobre el eje x en el intervalo $(0,1)$.

- Calculamos la integral:

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1$$

- Ahora hacemos la evaluación.
- Primero evaluamos el límite de integración superior y después el límite inferior:

$$\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

- Entonces, el área bajo la curva $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ es igual a $1/3$.
- Compara este resultado con los resultados que se muestran en las tablas anteriores.

Ahora, para calcular la integral definida vamos a utilizar las reglas de integración inmediata.

23.1.4 INTEGRAL DEFINIDA

La integral definida está definida como un límite. Este límite puede calcularse con las fórmulas de integración inmediata.

Para calcular el valor de la integral definida evaluamos primero el límite superior y después el límite inferior. La diferencia entre estos valores es el valor de la integral definida.

Ejemplo 1 Calcula la integral definida:

$$\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x$$

y representa geométricamente el resultado.

- Calculamos la integral:

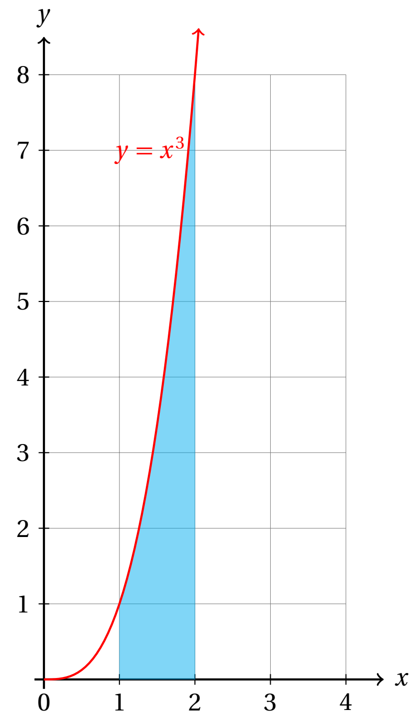
$$\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2$$

- Ahora evaluamos:

$$\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}$$

- Este resultado representa el área bajo la curva $y = x^3$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$ y sobre el eje x.
- El cálculo de esta integral definida también se puede realizar utilizando la definición:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$



Calcula la siguiente integral definida:

$$\int_2^5 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 2

- La integral da:

$$\int_2^5 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_2^5 = -e^{-5} + e^{-2} \approx 0.128597$$

- Interpreta geométricamente este resultado.

Calcula la siguiente integral definida:

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Ejemplo 3

- La integral queda:

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(x)|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

- Interpreta geométricamente este resultado.

Ejemplo 4

Calcula la integral definida:

$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

- La integral es:

$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_{0}^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

- Interpreta geométricamente este resultado.

Hasta aquí hemos considerado solamente integrandos que están definidos positivos para el intervalo de integración. Es decir, hemos considerado integrales de la forma:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \left. F(x)\right|_{a}^{b}$$

donde la función $f(x)$ es positiva para toda x que cumple $a \leq x \leq b$.

Cuando esta condición no se cumple, tenemos el problema de que la altura de algunos rectángulos que dibujamos para medir el área es negativa. Y como es de esperarse, cuando se sumen estas áreas (negativas) con el área de los rectángulos que tienen altura positiva (cuando $f(x_i) > 0$), algunos valores se van a cancelar.

Cuando deseas calcular el área entre la curva $y = f(x)$, el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$, tienes que considerar los casos en los que $f(x)$ sea cero o negativa para todo $a \leq x \leq b$. De esta manera, no vamos a restar una parte del área que queda por encima del eje x con otra que quede por debajo.

Ejemplo 5

Calcula el valor de la integral definida:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

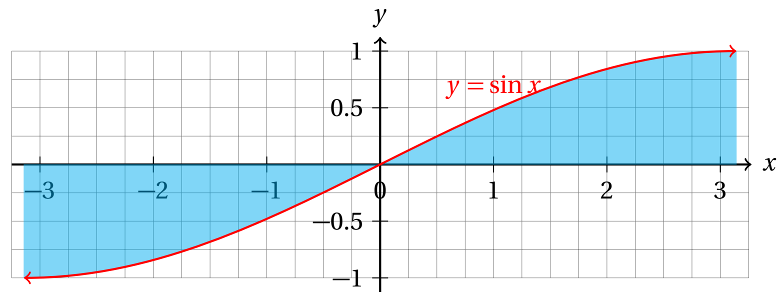
y da una interpretación del resultado.

- Calculamos primero la integral definida:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(-\pi) = 1 - 1 = 0$$

- En este caso, el valor de la integral definida no puede ser igual al área que se encierra entre la gráfica de la función, el eje x y las rectas $x = -\pi$ y $x = \pi$.

- Geométricamente tenemos la siguiente situación:



- El área de la región que está a la derecha del eje y es:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

- Observa que la gráfica de la función está por encima del eje x.
- Por eso el área es positiva, pues $\sin(x_i) > 0$ para toda x_i tal que $0 < x_i < \pi$.
- Pero el área de la región que está a la derecha del eje y es:

$$\int_{-\pi}^{0} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_{-\pi}^{0} = -\cos(0) + \cos(-\pi) = -1 - 1 = -2$$

- Esto se debe a que $\sin(x_i) < 0$ para toda x_i que cumple $-\pi < x_i < 0$.
- Como las alturas de los rectángulos son negativas, el área de cada uno de los rectángulos es negativa, dado que las bases de esos rectángulos son todas positivas.
- Cuando sumamos todos estos valores cuando n tiende a infinito, obtenemos un área negativa.
- Debido a la simetría de la función seno respecto al origen, las áreas de las dos regiones son iguales, pero con signo contrario.
- Por eso, cuando las sumamos, obtenemos cero.

Entonces, cuando obtengamos por resultado de una integral definida un número negativo, al menos una parte de la gráfica de la función está por debajo del eje x en el intervalo de integración (a, b). Es decir, si

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < 0$$

existe al menos un subintervalo $(\alpha, \beta) \in [a, b]$ tal que $f(x) < 0$ en ese subintervalo.

Para calcular el área entre la gráfica de una función, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, tenemos que tomar en cuenta cuándo la gráfica de la función queda por debajo del eje x, pues en esos casos la integral en esos intervalos será negativa, cancelándose con parte de los intervalos donde la gráfica de la función quede por arriba del eje x.

Ejemplo 6

Calcula el área encerrada por la función $y = (x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

- Recuerda que debemos tener cuidado con los intervalos donde la función toma valores negativos.
- Para calcular el área, vamos a considerar los distintos intervalos.
- Observa que la función es polinomial, de grado par y que su coeficiente principal es positivo.

$$y = (x-1)(x+1)(x+2)(x-2) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - 5x^2 + 4$$

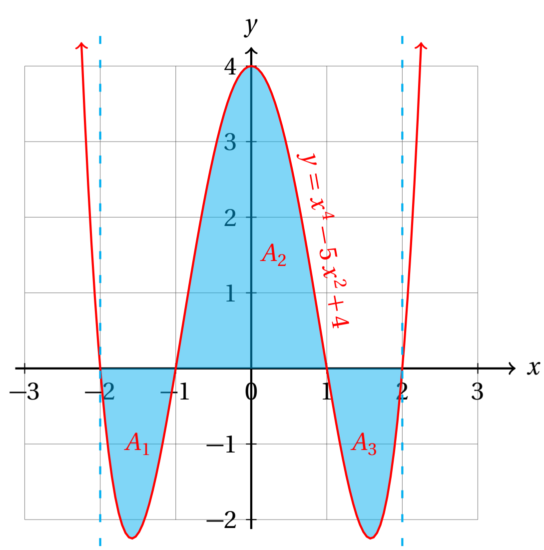
- Esto nos indica que las ramas de la función tienden a ∞ conforme x se aleje del origen.
- La función se hace cero para $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 2$.
- Así que calcularemos las integrales:

$$\begin{aligned}
A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^4 - 5x^2 + 4)\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} = -\frac{22}{15} \\
A_2 = \int_{-1}^{1} (x^4 - 5x^2 + 4)\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{76}{15} \\
A_3 = \int_{1}^{2} (x^4 - 5x^2 + 4)\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{1}^{2} = -\frac{22}{15}
\end{aligned}$$

- Al considerar todas las áreas positivas, la suma da:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{22}{15} + \frac{76}{15} + \frac{22}{15} = \frac{120}{15} = 8$$

- Geométricamente, tenemos la siguiente situación:



Ejemplo 7	Calcula la siguiente integral definida: $$\int_0^{(e-1)/2} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+2x}$$

- En primer lugar tenemos que asegurarnos que la función siempre sea positiva en el intervalo de integración.
- Cuando $x = 0$, el integrando es cero, porque el numerador es cero.
- El denominador es positivo para todo $x > 0$.
- Entonces, el integrando es siempre positivo para $x > 0$.
- No hay alguna regla de integración inmediata que nos permita calcular la integral.
- Así que tendremos que transformarla algebraicamente.
- Empezamos sumando $x - x$ y $1 - 1$ en el numerador:

$$\int_0^{(e-1)/2} \frac{x\,dx}{1+2x} = \int_0^{(e-1)/2} \left(\frac{x + x - x + 1 - 1}{1+2x}\right) dx = \int_0^{(e-1)/2} \left(\frac{(1+2x) - (x+1)}{1+2x}\right) dx$$

- Ahora podemos separar la integral en dos partes:

$$\begin{aligned} \int_0^{(e-1)/2} \frac{x\,dx}{1+2x} &= \int_0^{(e-1)/2} \left(\frac{1+2x}{1+2x}\right) dx - \int_0^{(e-1)/2} \left(\frac{x+1}{1+2x}\right) dx \\ &= \int_0^{(e-1)/2} dx - \int_0^{(e-1)/2} \left(\frac{x\,dx}{1+2x}\right) - \int_0^{(e-1)/2} \left(\frac{dx}{1+2x}\right) \end{aligned}$$

- Ya podemos calcular la primera y la tercera integrales.
- La segunda integral es la que nos pidieron integrar, así que podemos pasarla del otro lado y obtenemos:

$$2\int_0^{(e-1)/2} \frac{x\,dx}{1+2x} = \int_0^{(e-1)/2} dx - \int_0^{(e-1)/2} \left(\frac{dx}{1+2x}\right) = x\Big|_0^{(e-1)/2} - \frac{1}{2}\ln(1+2x)\Big|_0^{(e-1)/2}$$

- Pero este valor es el doble de la integral que buscamos, entonces,

$$\int_0^{(e-1)/2} \frac{x\,dx}{1+2x} = \frac{1}{2}\,x\Big|_0^{(e-1)/2} - \frac{1}{4}\ln(1+2x)\Big|_0^{(e-1)/2} = \frac{e-1}{4} - \frac{1}{4}\ln(e) = \frac{e-2}{4}$$

Calcula el valor de las siguientes integrales definidas. **Ejercicios 23.1**

1) $\displaystyle\int_0^1 2x\,dx \quad = 4$

2) $\displaystyle\int_0^3 \left(x^2+1\right) dx \quad = 12$

3) $\displaystyle\int_0^1 (2x+3)\,dx \quad = 4$

4) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2-1\right) dx \quad = \frac{4}{3}$

5) $\displaystyle\int_{2}^{4}\left(x^3-1\right)\,dx = 58$

6) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(x^3+x\right)\,dx = \frac{3}{4}$

7) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(x^2-x^3\right)\,dx = \frac{1}{12}$

8) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(x^2-x^3+1\right)\,dx = \frac{13}{12}$

9) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(x^2-x^4\right)\,dx = \frac{2}{15}$

10) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(x^3-x^4\right)\,dx = \frac{1}{20}$

11) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(x^3-x^4+1\right)\,dx = \frac{21}{20}$

12) $\displaystyle\int_{0}^{0.5}\left(x^3-2\,x^4\right)\,dx = 0.003125$

13) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(x^4-x^3\right)\,dx = \frac{49}{20}$

14) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(x^4-x^2\right)\,dx = \frac{58}{15}$

15) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\sin(x)\,dx = 1$

16) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\cos(x)\,dx = 1$

17) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x)\,dx = 2$

18) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(x)\,dx = 0$

19) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}(\sin(x)+\cos(x))\,dx = 2$

20) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}(\sin(x)-\cos(x))\,dx = 0$

23.2 Técnicas de integración

En matemáticas, cada tipo de problema sugiere un tipo de solución.

Para calcular la derivada de una función, en general, el problema es muy sencillo, pues solamente se requiere que identifiquemos el tipo de función para saber qué regla (fórmula) vamos a utilizar para derivarla.

Sin embargo, en cálculo integral se trata de otra historia completamente diferente.

Cuando queremos calcular una integral no siempre existe una fórmula con la que podamos calcular la integral inmediatamente.

Debido a esto se han creado algunos métodos para calcular las integrales de funciones que aparecen frecuentemente.

De estos métodos, los más frecuentemente usados son:

- ✓ Cambio de variable
- ✓ Integración por partes
- ✓ Integración de potencias trigonométricas
- ✓ Sustitución trigonométrica
- ✓ Fracciones parciales

Nosotros vamos a considerar solamente estos métodos para iniciarte en el arte de la integración de funciones.

23.2.1 Cambio de variable

Algunas veces para poder integrar una función conviene utilizar un cambio de variable.

Este método tiene su justificación en la regla de la cadena que utilizamos en cálculo diferencial:

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

En palabras, si tenemos una función compuesta que queremos integrar, debemos verificar que la diferencial incluye a la derivada de la función $u(x)$ para que podamos integrar.

Observa que el término $u'(x)$ solamente sirve para completar la diferencial. No es parte de la función f que vamos a integrar, de manera que no aparece en el resultado final.

Sin embargo, no debes olvidar verificar que este término se encuentre en el integrando como un factor, de otra manera, la integral estará incorrecta.

Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int (5x-7)^{12}\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 1

- Empezamos definiendo: $u(x) = 5x-7$, de donde: $u'(x) = 5$.
- Sustituyendo estos valores en la integral:

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

obtenemos:

$$\int (5\,x-7)^{12}\left(\frac{5}{5}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int (u(x))^{12}\,u'(x)\,\mathrm{d}t$$

- Observa que hemos completado la diferencial multiplicando por 5/5 en el integrando.
- Ahora solamente aplicamos la regla (iv) de integración, y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int (5\,x-7)^{12}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{5}\int (u(x))^{12}\,u'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{[u(x)]^{13}}{13}+C\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{(5\,x-7)^{13}}{13}+C\\
&= \frac{(5\,x-7)^{13}}{65}+C
\end{aligned}$$

En otros casos vamos a tener que simplificar algebraicamente el integrando para que podamos ver la forma dada en la regla para integrar usando el método de cambio de variable.

Ejemplo 2

Calcula la integral:

$$\int\left(2\,x\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+x-5}\right)\mathrm{d}x$$

- Factorizando el término común, podemos representar esta integral como:

$$\int\sqrt{x^2+x-5}\,(2\,x+1)\,\mathrm{d}x$$

- Ahora definimos:

$$u(x)=x^2+x-5 \qquad\Rightarrow\qquad u'(x)=2\,x+1$$

- Entonces, la diferencial está completa, y podemos integrar haciendo el cambio de variable como se acaba de definir:

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{x^2+x-5}\,(2\,x+1)\,\mathrm{d}x &= \int\sqrt{u(x)}\,u'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int (u(x))^{1/2}\,u'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{u(x)^{3/2}}{3/2}+C\\
&= \frac{2\left(x^2+x-5\right)^{3/2}}{3}+C
\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Calcula la integral indefinida:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\,x-1}}$$

- Podemos calcular esta integral utilizando la regla (iv) de integración:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}} = \int (2x-1)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$$

- Pero para eso, debemos hacer las definiciones:

$$u(x) = 2x-1 \qquad \Rightarrow \qquad u'(x) = 2$$

- Sustituyendo estos valores en la regla de sustitución obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}} &= \int (u(x))^{-1/2}\left(\frac{2}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int (u(x))^{-1/2}\,u'(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{(u(x))^{1/2}}{1/2} + C \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\,(2x-1)^{1/2}}{1} + C \\
&= \sqrt{2x-1} + C
\end{aligned}$$

Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{\left(5x^4-2x\right)}{x\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 4

- Observa que el integrando se puede reescribir como:

$$\int \frac{\left(5x^4-2x\right)}{x\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(5x^4-2x\right)}{\sqrt{x^5-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

- Y si definimos:

$$u(x) = x^5 - x^2 \qquad \text{tenemos que:} \qquad u'(x) = 5x^4 - 2x$$

  que es precisamente el factor que tenemos en el numerador del integrando.
- Entonces, la diferencial está completa.
- Ahora podemos reescribir la integral como:

$$\int \frac{\left(5x^4-2x\right)}{\sqrt{x^5-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^5-x^2\right)^{-1/2}\left(5x^4-2x\right)\mathrm{d}x$$

- Y la podemos integrar inmediatamente:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\left(5x^4-2x\right)}{\sqrt{x^5-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \left(x^5-x^2\right)^{-1/2}\left(5x^4-2x\right)\mathrm{d}x \\
&= \int (u(x))^{-1/2}\,u'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(u(x))^{1/2}}{1/2} + C \\
&= 2\sqrt{x^5-x^2} + C
\end{aligned}$$

Este método será muy útil cuando tengamos una expresión irracional en el denominador del integrando que no se puede simplificar usando solamente las leyes de los exponentes.

Para esto, nosotros vamos a definir una variable z de manera que nos permita simplificar el integrando, pero siempre teniendo en cuenta la regla para integrar por el método de cambio de variable.

El truco para este tipo de integrales es definir z elevado a una potencia que sea igual al índice de la raíz e igualar esta potencia al radicando (que debe estar en función de x).

Los siguientes ejemplos muestran dos casos.

Ejemplo 5

Calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

- Como tenemos una raíz en el denominador que no podemos simplificar usando las leyes de los exponentes, vamos a utilizar el siguiente cambio de variable:

$$x = z^2 \qquad \Rightarrow \qquad dx = 2\,z\,dz$$

- Observa que utilizamos z^2 porque el índice de la raíz es 2.
- Esto nos permitirá sustituir al final $\sqrt{x}$ en lugar de z.
- Sustituyendo este cambio de variable en la integral obtenemos:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2\,z\,dz}{1+z} = 2\int \frac{z\,dz}{1+z}$$

- Ahora vamos a sumar y a restar 1 en el numerador.
- Esto nos permitirá hacer:

$$\begin{aligned}
2\int \frac{1+z-1}{1+z}\,dz &= 2\int\left[\frac{1+z}{1+z} - \frac{1}{1+z}\right]dz\\
&= 2\int\left[1 - \frac{1}{1+z}\right]dz\\
&= 2\int dz - 2\int \frac{dz}{1+z}\\
&= 2\,z - 2\ln|1+z| + C
\end{aligned}$$

- Cambiando la variable z en términos de x, obtenemos:

$$2\,z - \ln|1+z| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$$

- Entonces,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$$

Como puedes ver, el álgebra nos ayudó a convertir el integrando que obtuvimos después del cambio de variable a una forma que fuera inmediatamente integrable.

Siempre que utilicemos este método, vamos a requerir de creatividad para saber qué hacer algebraicamente para convertirla a una forma integrable.

No siempre conviene sumar y restar en el numerador o para poder calcular la integral.

Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 6

- Dado que el índice de la raíz es 2, definimos: $z^2 = x+1$.
- Así, $z = \sqrt{x+1}$, y $\mathrm{d}x = 2\,z\,\mathrm{d}z$.
- Ahora sustituimos en la integral y obtenemos:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\,z(z+1)\,\mathrm{d}z}{z-1} = 2\int \frac{z^2+z}{z-1}\,\mathrm{d}z$$

- Ahora vamos a completar el cuadrado en el numerador.
- Para eso, vamos a sumar $0 = -3\,z+1+3\,z-1$. Así obtenemos:

$$\begin{aligned}
2\int \frac{z^2+z}{z-1}\,\mathrm{d}z &= 2\int \frac{z^2+z-3\,z+1+3\,z-1}{z-1}\,\mathrm{d}z\\
&= 2\int \frac{(z^2-2\,z+1)+3\,z-1}{z-1}\,\mathrm{d}z\\
&= 2\int \frac{(z-1)^2}{z-1}\,\mathrm{d}z + 2\int \frac{3\,z-1}{z-1}\,\mathrm{d}z\\
&= 2\int (z-1)\,\mathrm{d}z + 2\int \frac{3\,z-1}{z-1}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

- Ya podemos calcular la primera integral.
- Para simplificar la otra integral, vamos a sumar en el numerador: $-2+2$

$$\begin{aligned}
2\int (z-1)\,\mathrm{d}z + 2\int \frac{3\,z-1}{z-1}\,\mathrm{d}z &= \frac{2\,z^2}{2} - 2\,z + 2\int \frac{(3\,z-3)+2}{z-1}\,\mathrm{d}z\\
&= z^2 - 2\,z + 2\int \frac{3(z-1)}{z-1}\,\mathrm{d}z + 2\int \frac{2\,\mathrm{d}z}{z-1}\\
&= z^2 - 2\,z + 6\int \mathrm{d}z + 4\int \frac{\mathrm{d}z}{z-1}\\
&= z^2 - 2\,z + 6\,z + 4\,\ln(z-1) + C\\
&= z^2 + 4\,z + 4\,\ln(z-1) + C
\end{aligned}$$

- Entonces, sustituyendo z en términos de x,

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,\mathrm{d}x = (x+1) + 4\sqrt{x+1} + 4\,\ln\left(\sqrt{x+1}-1\right) + C$$

23.2.2 Integración por partes

Si consideramos la regla para derivar el producto de dos funciones:

$$\frac{d(u\cdot v)}{dx} = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$$

podemos despejar el primer término de la derecha de la igualdad y escribir:

$$u\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{d(u\cdot v)}{dx} - v\cdot\frac{du}{dx}$$

Usando el hecho de que la integración es el proceso inverso de la derivación, al integrar ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\int u\cdot \mathrm{d}v = u\cdot v - \int v\cdot \mathrm{d}u$$

Esta es la regla de integración por partes.

La recomendación para no confundirte con las definiciones que hagas para el cálculo de la integral por partes es que elabores una tabla con los valores de u, $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ y v.

Cuando tengas la tabla completa, sigue sustituir estos valores en la regla de integración por partes, y después de calcular la integral, simplificar el resultado hasta donde sea posible.

Ejemplo 1

Calcula la integral indefinida:

$$\int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

- Dado que no tenemos una regla de integración inmediata para esta función, vamos a utilizar la regla de integración por partes.
- Empezamos definiendo:

$$\begin{array}{rcl} u = x & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v = -\cos x \end{array}$$

- Ahora podemos sustituir en la regla de integración por partes:

$$\begin{aligned} \int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x &= -x\cdot\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -x\cdot\cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.

Ejemplo 2

Calcula la integral indefinida:

$$\int x\cdot e^x\,\mathrm{d}x$$

- De nuevo, definimos:

$$\begin{array}{rcl} u = x & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v = e^x \end{array}$$

- Al sustituir en la regla de integración por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^x \mathrm{d}x &= x \cdot e^x - \int e^x\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot e^x - e^x + C \\ &= e^x \cdot (x-1) + C \end{aligned}$$

Calcula la integral indefinida:

$$\int x^2 \cdot e^x\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 3

- Ahora definimos:

$$\begin{array}{rcl} u = x^2 & \Rightarrow & \mathrm{d}u = 2\,x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v = e^x \end{array}$$

- Al sustituir obtenemos:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot e^x\,\mathrm{d}x &= x^2 \cdot e^x - \int 2\,x \cdot e^x\,\mathrm{d}x \\ &= x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- Pero en el ejemplo anterior encontramos que:

$$\int x \cdot e^x \mathrm{d}x = e^x \cdot (x-1) + C$$

- Entonces,

$$\int x^2 \cdot e^x\,\mathrm{d}x = x^2 \cdot e^x - 2\,e^x \cdot (x-1) + C$$

Observa que en este ejemplo aplicamos dos veces la integración por partes.

La primera vez que la aplicamos nos generó otra integral por partes que ya habíamos resuelto antes.

Esto fue así porque teníamos x^2. Si hubieramos tenido x^3 la integral por partes se habría aplicado 3 veces.

Calcula la integral indefinida:

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

aplicando la regla de integración por partes.

Ejemplo 4

- Definimos:

$$\begin{aligned} u = \ln(x) \quad &\Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \quad &\Rightarrow \quad v = x \end{aligned}$$

- Entonces, al sustituir, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \ln(x)\,dx &= x\ln(x) - \int \frac{x\,dx}{x} \\ &= x\ln(x) - x + C \end{aligned}$$

- Y terminamos.

Ejemplo 5

Calcula la integral indefinida:

$$\int \sin^2 x\,dx$$

aplicando la regla de integración por partes.

- Definimos:

$$\begin{aligned} u = \sin x \quad &\Rightarrow \quad du = \cos x\,dx \\ dv = \sin x\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

- Sustituyendo en la regla de integración por partes obtenemos:

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx$$

- Pero, aplicando la identidad pitagórica: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, podemos reescribir la integral como:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x\,dx &= -\sin x\cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right) dx \\ &= -\sin x\cos x + \int dx - \int \sin^2 x\,dx \\ &= -\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx \end{aligned}$$

- Y la única integral que queda a la derecha es precisamente la que deseamos calcular.
- Entonces, podemos pasarla a la izquierda de la igualdad para obtener:

$$\begin{aligned} 2\int \sin^2 x\,dx &= -\sin x\cos x + x + C \\ \int \sin^2 x\,dx &= -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

- Todavía podemos simplificar más el resultado si consideramos que:

$$\sin(2\alpha) = 2\,\sin\alpha\cos\alpha$$

- Al sustituir esta equivalencia en el primer término del resultado de la integral obtenemos:

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2} + C$$

- Y terminamos.

Calcula la integral:

$$\int \sec^3 x \, dx$$

aplicando la regla de integración por partes.

Ejemplo 6

- Empezamos definiendo:

$$\begin{array}{rcl} u = \sec x & \Rightarrow & du = \sec x \tan x \, dx \\ dv = \sec^2 x \, dx & \Rightarrow & v = -\tan x \end{array}$$

- Ahora podemos sustituir estos valores en la regla de integración por partes:

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \, dx &= -\sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx \\ &= -\sec x \tan x - \int \sec x \left(\sec^2 x - 1\right) dx \\ &= -\sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \end{aligned}$$

- Pasando la integral buscada a la derecha, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2\int \sec^3 x \, dx &= -\sec x \tan x + \int \sec x \, dx \qquad \Rightarrow \\ \int \sec^3 x \, dx &= -\frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\int \sec x \, dx \\ &= -\frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln(\sec x + \tan x) + C \end{aligned}$$

- Y terminamos.

Cuando sospeches que una integral se puede resolver por el método de integración por partes, intenta definiendo u y dv, después aplica la regla de integración.

Si no funciona, cambia las definiciones y vuelve a intentar volviendo a integrar con las nuevas sustituciones.

Si de nuevo no obtienes una integral inmediata, entonces debes intentar otro método.

23.2.3 Integración de funciones trigonométricas

Ya vimos las reglas para calcular integrales de funciones trigonométricas.

Ahora vamos a considerar productos de funciones trigonométricas y potencias.

Para este tema vamos a requerir el formulario de identidades trigonométricas.

Calcula la integral indefinida:

$$\int \cos^2 x \, dx$$

Ejemplo 1

- Utilizamos la siguiente identidad:

$$\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

- Así, nuestra integral se convierte en la siguiente:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2}\int (1+\cos(2x))\, dx\\ &= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx\end{aligned}$$

- Ya podemos calcular la primera integral.
- Para la segunda, hace falta completar la diferencial:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\left(\frac{2}{2}\right) dx\\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C\end{aligned}$$

- Y terminamos.

En la sección anterior calculamos la integral $\int \sin^2 x \, dx$ utilizando integración por partes.

Se te queda como ejercicio calcularla utilizando la identidad trigonométrica:

$$\cos x = \sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

La siguiente integral no utiliza el mismo artificio. Sino el hecho de que la derivada de la función seno es la función coseno.

Ejemplo 2

Calcula la integral indefinida:

$$\int \cos^3 x \, dx$$

- Utilizando la identidad:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

podemos reescribir la integral de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \, dx &= \int \left(1-\sin^2 x\right)\cos x \, dx\\ &= \int \cos x \, dx - \int \sin^2 x \cos x \, dx\end{aligned}$$

- La primera integral es inmediata.
- Para la segunda, vamos a definir: $u(x) = \sin x$, luego, $u'(x) = \cos x$.
- Esto nos dice que podemos hacer el cambio de variable:

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x \, \mathrm{d}x &= \int \cos x \, \mathrm{d}x - \int \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= \sin x - \int [u(x)]^2 \, u'(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \sin x - \frac{[u(x)]^3}{3} + C \\
&= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

El artificio de sustituir $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ nos sirve para simplificar integrales cuyo integrando consista de la función $\cos x$ elevada a una potencial impar.

Por ejemplo, para integrar $\cos^5 x$ reescribimos este integrando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\cos^5 x &= \cos^4 x \cdot \cos x = \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x \\
&= \left(1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x\right) \cos x
\end{aligned}$$

Después podemos definir $u = \sin x$ y proceder como en el ejemplo que acabamos de resolver.

En algunos productos de potencias de las funciones $\sin x$ y $\cos x$ también podemos aplicar el mismo artificio matemático.

Solamente debemos recordar que la diferencial debe estar completa.

Calcula la integral:

$$\int \sin^3 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x$$

Ejemplo 3

- Podemos reescribir la integral de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x &= \int \sin^3 x \cos^2 x \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= \int \sin^3 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= \int \left(\sin^3 x - \sin^5 x\right) \cos x \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

- Ahora definimos: $u(x) = \sin x$, y haciendo el cambio de variable, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx &= \int \left(\sin^3 x - \sin^5 x\right) \cos x \, dx \\
&= \int \sin^3 x \cos x \, dx - \int \sin^5 x \cos x \, dx \\
&= \int [u(x)]^3 u'(x) \, dx - \int [u(x)]^5 u'(x) \, dx \\
&= \frac{[u(x)]^4}{4} - \frac{[u(x)]^6}{6} + C \\
&= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C
\end{aligned}$$

Observa que decidimos sustituir: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, pero también pudimos sustiuir: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ y poder calcular la integral. Se te queda como ejercicio calcular la misma integral haciendo esta sustitución.

Para integrar potencias de la función tangente o secante usaremos la identidad:

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

Ejemplo 4

Calcula la integral indefinida:

$$\int \tan^2 x \, dx$$

- Usando la identidad mencionada, la integral puede reescribirse como:

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (1 - \sec^2 x) \, dx = \int dx - \int \sec^2 x \, dx$$

- Ambas integrales son inmediatas:

$$\int \tan^2 x \, dx = x - \tan x + C$$

Ejemplo 5

Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int \tan^3 x \, dx$$

- El integrando puede reescribirse como:

$$\int \tan^3 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \tan x \, dx = \int \sec^2 x \tan x \, dx - \int \tan x \, dx$$

- Ahora observa que si definimos: $u(x) = \tan x$, entonces, $u'(x) = \sec^2 x$.

- Entonces, al hacer el cambio de variable, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \, dx &= \int u(x)\, u'(x) \, dx - \int \tan x \, dx \\
&= \frac{[u(x)]^2}{2} - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\
&= \frac{\tan^2 x}{2} - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx
\end{aligned}$$

- Para calcular la integral faltante, vamos a definir: $v = \cos x$.
- Entonces, $dv = -\sin x \, dx$.
- Así, podemos aplicar la regla (v) de integración:

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \, dx &= \frac{\tan^2 x}{2} - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\
&= \frac{\tan^2 x}{2} - \int \frac{-dv}{v} \\
&= \frac{\tan^2 x}{2} + \ln v + C \\
&= \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C
\end{aligned}$$

En algunos casos vamos a tener que aplicar otros métodos de integración para poder calcular una integral de potencias trigonométricas.

Calcula:

$$\int \sec^3 x \, dx$$

Ejemplo 6

- Podemos reescribir la integral de la siguiente forma:

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec^2 x \, \sec x \, dx = \int (1 + \tan^2 x) \sec x \, dx$$

- Al separar en dos integrales obtenemos:

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \, dx + \int \tan^2 x \, \sec x \, dx$$

- La primera integral es inmediata:

$$\int \sec^3 x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + \int \tan^2 x \, \sec x \, dx$$

- Para la integral que falta usaremos la regla de integral por partes.
- Así que definimos:

$$\begin{aligned}
u = \tan x \quad &\Rightarrow \quad du = \sec^2 x \, dx \\
dv = \sec x \tan x \, dx \quad &\Rightarrow \quad v = \sec x
\end{aligned}$$

- Sustituyendo estos valores en la integral faltante nos da:

$$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,\mathrm{d}x$$

- Ahora obtuvimos la integral que queremos calcular.

- Como es negativa, podemos pasarla del otro lado:

$$2\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + \sec x \tan x + C_1$$

- Y el resultado es:

$$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + \frac{1}{2}\sec x \tan x + C$$

Ejemplo 7

Calcula la integral:

$$\int \cot^6 x\,\mathrm{d}x$$

- Ahora utilizaremos la identidad:

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

para transformar el integrando las veces que sea necesaria.

- Empezamos haciendo la primera transformación:

$$\begin{aligned}\int \cot^6 x\,\mathrm{d}x &= \int \cot^4 x\left(\csc^2 x - 1\right)\mathrm{d}x\\ &= \int \cot^4 x\,\csc^2 x\,\mathrm{d}x - \int \cot^4 x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

- Ahora definimos: $u(x) = \cot x$, con lo que $u'(x) = \csc^2 x$.

- Entonces,

$$\begin{aligned}\int \cot^6 x\,\mathrm{d}x &= \int \cot^4 x\,\csc^2 x\,\mathrm{d}x - \int \cot^4 x\,\mathrm{d}x\\ &= \int [u(x)]^4 u'(x)\mathrm{d}x - \int \cot^2 x\left(\csc^2 x - 1\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\cot^5 x}{5} - \int \cot^2 x\,\csc^2 x\,\mathrm{d}x + \int \cot^2 x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

- Aplicando la definición $u(x)=\cot x$ de nuevo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int \cot^6 x\,\mathrm{d}x &= \frac{\cot^5 x}{5} - \int \cot^2 x \csc^2 x\,\mathrm{d}x + \int \cot^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\cot^5 x}{5} - \int [u(x)]^2 u'(x)\,\mathrm{d}x + \int \left(\csc^2 x - 1\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^3 x}{3} + \int \left(\csc^2 x - 1\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^3 x}{3} + \int \csc^2 x\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x \\
&= \frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^3 x}{3} + \cot x - x + C
\end{aligned}$$

- Y terminamos.

Cuando las potencias de $\tan x$ y de $\sec x$ son impares, conviente factorizar $\tan x\ \sec x$ y utilizarlo como $d\,u$, definiendo $u=\sec x$.

Todos los $\tan^2 x$ se transforman a $\sec x$ utilizando la identidad:

$$\sec^2 = 1 + \tan^2 x$$

Calcula:

$$\int \tan^5 x\ \sec^3\ x\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 8

- Empezamos factorizando $\tan x\ \sec x$:

$$\int \tan^5 x\ \sec^3\ x\,\mathrm{d}x = \int \tan^4 x\ \sec^2\ x\,[\tan x\ \sec x\,\mathrm{d}x]$$

- Ahora podemos usar la identidad: $\sec^2 = 1+\tan^2 x$:

$$\int \tan^5 x\ \sec^3\ x\,\mathrm{d}x = \int [\sec^2 x - 1]^2 \sec^2\ x\,[\tan x\ \sec x\,\mathrm{d}x]$$

- Definimos: $u=\sec x$ y sustituimos en la integral para obtener:

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x\ \sec^3\ x\,\mathrm{d}x &= \int [u^2-1]^2 \cdot u^2\,\mathrm{d}u \\
&= \int [u^4 - 2\,u^2 + 1]\cdot u^2\,\mathrm{d}u \\
&= \int u^6\,\mathrm{d}u - 2\int u^4\,\mathrm{d}u + \int u^2\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{u^7}{7} - \frac{2\,u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{2\sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

Observa que en cada integral utilizamos siempre una identidad que involucre a la función en cuestión y a su derivada.

Por ejemplo, para la función $\sin x$ usamos la identidad:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

porque ahí aparece su derivada, que es: $\cos x$.

Por otra parte, para la función $\tan x$ usamos:

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

porque la derivada de $\tan x$ es $\sec^2 x$.

Y para la función $\cot x$ utilizamos la identidad:

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

porque la derivada de $\cot x$ es la función $-\csc^2 x$.

En los productos de potencias de las funciones trigonométricas siempre debemos intentar sustituir las identidades de manera que obtengamos una forma integrable.

23.2.4 Integración por fracciones parciales

Cuando debemos calcular la integral de una función racional algunas veces necesitamos transformar el integrando de la función de tal manera que obtengamos una que se pueda integrar inmediatamente.

Para eso utilizamos el método de fracciones parciales.

En este tipo de integrales estudiaremos los dos casos más sencillos.

- ✓ Cuando el denominador tiene factores lineales.
- ✓ Cuando el denominador tiene factores cuadráticos.

23.2.5 Denominadores con factores lineales

Cuando al sumar dos fracciones algebraica obtenemos una nueva fracción con denominador que se puede factorizar hasta tener factores lineales, significa que los denominadores de cada fracción, bien eran lineales todos, bien uno de los factores era cuadrático factorizable.

Estos son los casos que estudiatemos en esta sección.

La idea para resolver este tipo de integrales consiste en que tenemos que expresar una fracción que no se integra de manera inmediata como suma de otras fracciones que sí se pueden integrar inmediatamente.

Ejemplo 1

Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{3\,x - 1}{x^2 - x}\,dx$$

- Empezamos notando que la integral no es inmediata, así que tenemos que transformarla.

- Para empezar, podemos factorizar el denominador:

$$\int \frac{3x-1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x$$

- Ahora, dado que cuando sumamos dos fracciones en el denominador obtenemos el producto de los denominadores de las fracciones que se sumaron, tal vez sea posible expresar el radicando como la suma de dos fracciones.

- Es decir, debemos encontrar A y B tales que:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{3x-1}{x(x-1)}$$

- Para eso, primero vamos a realizar la suma de fracciones:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}=\frac{(A+B)x-A}{x(x-1)}$$

- En la fracción inicial, teníamos por numerador: $3x-1$.

- El coeficiente de x del numerador es 3 y de acuerdo a la suma de las fracciones, debe cumplir: $A+B=3$.

- Por otra parte, el término independiente debe ser -1, y por la suma de las fracciones tenemos: $-A=-1$.

- Entonces, $A=1$ y $B=2$.

- Esto significa que podemos reescribir la integral como:

$$\int \frac{3x-1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{x-1}$$

- Estas integrales son inmediatas:

$$\int \frac{3x-1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x=\ln x+2\,\ln(x-1)+C$$

- Y terminamos.

Observa que suponemos que existen dos valores A, B que satisfacen las condiciones para que:

$$\frac{A}{mx+b}+\frac{B}{nx+c}=\frac{kx+l}{(mx+b)(nx+c)}$$

Eso significa que:

$$\frac{A(nx+c)+B(mx+b)}{(mx+b)(nx+c)}=\frac{(An+Bm)x+(Ac+Bd)}{(mx+b)(nx+c)}=\frac{kx+l}{(mx+b)(nx+c)}$$

Pero para que A, B satisfagan la igualdad en las fracciones, se requiere que los coeficientes de los términos del mismo grado sean iguales, es decir, el coeficiente del término lineal sea igual para ambas fracciones $(An+Bm=k)$, así como para el término independiente $(Ac+Bd=l)$.

Así que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} n\,A + m\,B &= k \\ c\,A + \ d\,B &= \ l \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tendrá solución siempre que el determinante:

$$\begin{vmatrix} n & m \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Esto significa que no siempre es posible expresar una fracción como la suma de otras dos, por lo que este método no siempre funcionará.

Ejemplo 2

Calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{5\,x + 17}{x^2 + 6\,x + 5}\,\mathrm{d}x$$

- Primero debemos observar que el denominador del integrando se puede factorizar:

$$\frac{5\,x + 17}{x^2 + 6\,x + 5} = \frac{5\,x + 17}{(x + 1)(x + 5)}$$

- Ahora buscamos dos números A, B que cumplan:

$$\frac{5\,x + 17}{(x + 1)(x + 5)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 5}$$

- Empezamos haciendo la suma de fracciones:

$$\frac{5\,x + 17}{(x + 1)(x + 5)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 5} = \frac{A(x + 5) + B(x + 1)}{(x + 1)(x + 5)} = \frac{(A + B)\,x + (5\,A + B)}{(x + 1)(x + 5)}$$

- Esto implica:

$$\begin{aligned} A + B &= \ \ 5 \\ 5\,A + B &= 17 \end{aligned}$$

- La solución de este sistema de ecuaciones se obtiene multiplicando la primera ecuación por -1 y sumando.
- Así obtenemos la ecuación: $4\,A = 12$, que implica $A = 3$.
- De la primera ecuación: $A + B = 5$ y dado que $A = 3$, se obtiene: $B = 2$.
- Entonces, podemos expresar la integral como:

$$\begin{aligned} \int \frac{5\,x + 17}{x^2 + 6\,x + 5}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x + 5}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x + 1} + \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x + 5} \end{aligned}$$

- Estas integrales son inmediatas:

$$\int \frac{5\,x + 17}{x^2 + 6\,x + 5}\,\mathrm{d}x = 3\,\ln(x + 1) + 5\,\ln(x + 5) + C$$

- Y terminamos.

Ejemplo 3

Calcula la integral:

$$\int \frac{7\,x-6}{x\,(x+2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$$

- Empezamos notando que el denominador está factorizado y que todos sus factores son lineales.
- Dado que son tres factores, debemos encontrar tres números A, B, C, tales que:

$$\frac{7\,x-6}{x\,(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

- Al hacer la suma de las fracciones obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} &= \frac{A(x+2)(x-3) + B\,x(x-3) + C\,x(x+2)}{x\,(x+2)(x-3)}\\ &= \frac{(A+B+C)\,x^2 + (2C - A - 3B)\,x - 6A}{x\,(x+2)(x-3)}\end{aligned}$$

- Observa que el coeficiente del término cuadrático debe ser igual a cero, debido a que en la fracción de la integral inicial éste no aparece.
- Entonces, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0\\ -A - 3\,B + 2\,C &= 7\\ -6\,A &= -6\end{aligned}$$

- De la tercera ecuación encontramos inmediatamente que $A = 1$.
- Sustituyendo este valor en las otras dos ecuaciones obtenemos un S.E.L. de 2×2:

$$\begin{aligned} B + C &= -1\\ -3\,B + 2\,C &= 8\end{aligned}$$

- La solución de este sistema de ecuaciones es: $B = -2$, y $C = 1$.
- Ahora podemos sustituir los valores de A, B y C en la fracción parcial:

$$\int \frac{7\,x-6}{x\,(x+2)(x-3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x-3}$$

- Cada una de las integrales es inmediata:

$$\int \frac{7\,x-6}{x\,(x+2)(x-3)}\,\mathrm{d}x = \ln x - 2\,\ln(x+2) + \ln(x-3) + C$$

En todos los ejemplos que hemos resueltos hemos obtenido valores de los coeficientes A, B y C enteros. Pero eso no siempre ocurrirá.

Ejemplo 4

Calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x+5)(2x-1)}\,\mathrm{d}x$$

- Empezamos escribiendo el integrando como suma de fracciones:

$$\frac{1\,x+2}{(x-1)(x+5)(2x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{2x-1}$$

- Ahora necesitamos calcular A, B y C que hagan que esta igualdad se cumpla.
- Al hacer la suma de fracciones y simplificar obtenemos:

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+5)(2x-1)} = \frac{(2A+2B+C)\,x^2+(9A-3B+4C)\,x-5A+B+4C}{(x-1)(x+5)(2x-1)}$$

- Esto nos sugiere resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2A+2B+C &= 0\\ 9A-3B+4C &= 1\\ -5A+B+4C &= 2 \end{aligned}$$

- La solución de este S.E.L. es: $A=-1/10$, $B=-1/10$, y $C=2/5$.
- Al sustituir estos valores en la integral obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{(x-1)(x+5)(2x-1)}\,\mathrm{d}x &= \int\left(-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x+5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2x-1}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+5}+\frac{1}{5}\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{2x-1}\\ &= -\frac{1}{10}\ln(x-1)-\frac{1}{10}\ln(x+5)+\frac{1}{5}\ln(2x-1)+C \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{9x^2+4x-11}{(x+1)(x+2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$$

- Como los factores en el denominador son todos lineales, suponemos que hay números reales A, B, C que satisfacen:

$$\frac{9x^2+4x-11}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

- Al realizar la suma de fracciones que quedó indicada obtenemos:

$$\frac{9x^2+4x-11}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{(A+B+C)\,x^2+(-A-2B+3C)\,x+(-6A-3B+2C)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

- Entonces, el sistema de ecuaciones lineales que debemos resolver es:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 9 \\ -A - 2B + 3C &= 4 \\ -6A - 3B + 2C &= -11 \end{aligned}$$

- La solución de este S.E.L. es: $A = 2$, $B = 3$ y $C = 4$.
- Entonces, la integral puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \int \frac{9x^2 + 4x - 11}{(x+1)(x+2)(x-3)}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx \\ &= \int \frac{2}{x+1} + \int \frac{3}{x+2}\,dx + \int \frac{4}{x-3}\,dx \\ &= 2\ln(x+1) + 3\ln(x+2) + 4\ln(x-3) + C \end{aligned}$$

- Y terminamos.

Recuerda que no siempre es posible expresar una fracción como suma de varias fracciones.

23.2.6 Denominadores con factores cuadráticos

El siguiente caso de integrales que se resuelven por el método de fracciones parciales es en el que en el denominador tenemos factores cuadráticos.

En este caso, tendremos un factor que no se puede factorizar como un polinomio lineal. Por ejemplo: $x^2 + 5$.

Supongamos que deseamos expresar la siguiente fracción como la suma de otras fracciones:

$$\frac{ax + b}{x\,(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1}$$

Nosotros suponemos que hay números A, B, C que satisfacen la ecuación anterior. Si eso es verdad, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{x\,(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ &= \frac{A(x^2+1) + (Bx + C)x}{x\,(x^2+1)} \\ &= \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x\,(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x\,(x^2+1)} \end{aligned}$$

Como mencionamos en la sección anterior, para que la igualdad se cumpla se requiere que los coeficientes de términos semejantes sean iguales en los dos lados de la igualdad. Eso se cumplirá cuando:

$$\begin{aligned} A + B \quad &= 0 \\ C &= a \\ A \quad\quad &= b \end{aligned}$$

Por la primera ecuación tenemos que $B = -A$, pero por la tercera ecuación tenemos que $A = b$, luego, $B = -b$. También, por la segunda ecuación tenemos que $C = a$.

Entonces, podemos escribirla fracción inicial dela siguiente forma:

$$\frac{a\,x+b}{x\,(x^2+1)}=\frac{b}{x}+\frac{-b\,x+a}{x^2+1}$$

El siguiente ejemplo muestra un caso numérico de este análisis.

Ejemplo 1

Calcula la integral:

$$\int\frac{2\,x+1}{x\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

- De acuerdo al análisis anterior, tenemos:

$$\frac{2\,x+1}{x\,(x^2+1)}=\frac{1}{x}+\frac{-x+2}{x^2+1}$$

- En este caso $a=2$, $b=1$.
- Vamos a verificar que este resultado es correcto.
- Empezamos haciendo la suma de fracciones:

$$\begin{aligned}\frac{2\,x+1}{x\,(x^2+1)} &= \frac{A}{x}+\frac{B\,x+C}{x^2+1}\\ &= \frac{A(x^2+1)+(B\,x+C)\,x}{x\,(x^2+1)}\\ &= \frac{(A+B)\,x^2+C\,x+A}{x\,(x^2+1)}\end{aligned}$$

- Entonces, para que se cumpla la igualdad se requiere:

$$\begin{aligned}A+B &= 0\\ C &= 2\\ A &= 1\end{aligned}$$

- De aquí que: $A=1$, $B=-1$ y $C=2$.
- Al sustituir estos valores en las fracciones obtenemos:

$$\frac{2\,x+1}{x\,(x^2+1)}=\frac{1}{x}+\frac{-x+2}{x^2+1}$$

- Entonces, la integral se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}\int\frac{2\,x+1}{x\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{x}+\frac{-x+2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\frac{-x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln x-\frac{1}{2}\int\frac{2\,x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2+1}\\ &= \ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\end{aligned}$$

- Ahora debemos calcular la integral pendiente.
- Pero esta integral aparece en el formulario de reglas de integración (regla (xvi)).
- Entonces,

$$\int \frac{2\,x+1}{x\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan(x^2+1) + C$$

Igual puede ocurrir que aparezca un factor lineal elevado al cuadrado en el denominador de la fracción que queremos expresar como suma de otras fracciones.

Calcula la integral:

$$\int \frac{5\,x-3}{(2\,x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 2

- Empezamos expresando la fracción del integrando como suma de fracciones:

$$\begin{aligned}
\frac{5\,x-3}{(2\,x+1)^2} &= \frac{A}{2\,x+1} + \frac{B}{(2\,x+1)^2}\\
&= \frac{A(2\,x+1)+B}{(2\,x+1)^2}\\
&= \frac{(2\,A)\,x+[A+B]}{(2\,x+1)^2}
\end{aligned}$$

- De aquí que: $2\,A=5$, que implica: $A=5/2$.
- También, $A+B=-3$, que implica: $B=-11/2$.
- La integral puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
\int \frac{5\,x-3}{(2\,x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{5/2}{2\,x+1} - \frac{11/2}{(2\,x+1)^2}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{5}{2}\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{2(2\,x+1)} - \frac{11}{2}\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{2(2\,x+1)^2}\\
&= \frac{5}{4}\ln(2\,x+1) + \frac{11}{4}\cdot\frac{1}{2\,x+1} + C
\end{aligned}$$

- Obseva que para calcular la última integral utilizamos la regla (vi) donde $v=2\,x+1$, y $n=-2$.

---

calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{15\,x-5}{(x^2+1)(2\,x^2+7)}\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 3

- Expresamos la fracción del integrando como la suma de fracciones:

$$\begin{aligned}
\frac{15\,x-5}{(x^2+1)(2\,x^2+7)} &= \frac{A\,x+B}{x^2+1}+\frac{C\,x+D}{2\,x^2+7}\\
&= \frac{(A\,x+B)(2\,x^2+7)+(C\,x+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(2\,x^2+7)}\\
&= \frac{(2\,A+C)\,x^3+(2\,B+D)\,x^2+(7\,A+C)\,x+[7\,B+D]}{(x^2+1)(2\,x^2+7)}
\end{aligned}$$

- Para que la igualdad se cumpla se requiere que:

$$\begin{array}{rcl}
2\,A+C=0 & \Rightarrow & C=-2\,A\\
2\,B+D=0 & \Rightarrow & D=-2\,B\\
7\,A+C=15 & \Rightarrow & 5\,A=15\Rightarrow\\
7\,B+D=-5 & \Rightarrow & 5\,B=-5\Rightarrow B=-1
\end{array}$$

- De aquí que: $A=3$, $B=-1$, $C=-6$, $D=2$.
- Entonces, la integral se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
\int\frac{15\,x-5}{(x^2+1)(2\,x^2+7)}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{3\,x-1}{x^2+1}+\frac{-6\,x+2}{2\,x^2+7}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int\frac{3\,x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{-6\,x+2}{2\,x^2+7}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

- Ahora vamos a separar cada integral en dos partes:

$$\begin{aligned}
\int\frac{15\,x-5}{(x^2+1)(2\,x^2+7)}\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{2}\int\frac{2\,x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}-\frac{6}{4}\int\frac{4\,x\,\mathrm{d}x}{2\,x^2+7}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{2\,x^2+7}\\
&= \frac{3}{2}\ln(x^2+1)-\arctan(x^2+1)-\frac{3}{2}\ln(2\,x^2+7)+2\int\frac{\mathrm{d}x}{2\,x^2+7}
\end{aligned}$$

- Ahora vamos a definir: $v^2=2\,x^2$, que implica: $v=\sqrt{2}\,x$, y también: $\mathrm{d}v=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$.
- También definimos: $a^2=7$, que significa que: $a=\sqrt{7}$.
- Sustituyendo estos valores obtenemos:

$$\int\frac{15\,x-5}{(x^2+1)(2\,x^2+7)}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\ln(x^2+1)-\arctan(x^2+1)-\frac{3}{2}\ln(2\,x^2+7)+\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+C$$

Hasta aquí, todos los coeficientes que hemos calculado para reescribir la fracción del integrando como suma de otras fracciones han sido enteros. Es obvio suponer que eso no siempre se cumplirá.

Ejemplo 4

Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int\frac{3\,x+2}{(x+1)(x^2+5)}\,\mathrm{d}x$$

- Reescribimos el integrando como una suma de fracciones:

$$\begin{aligned}
\frac{3\,x+2}{(x+1)(x^2+5)} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B\,x+C}{x^2+5}\\
&= \frac{A(x^2+5)+(B\,x+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+5)}\\
&= \frac{(A+B)\,x^2+(B+C)\,x+[5\,A+C]}{(x+1)(x^2+5)}
\end{aligned}$$

- Ahora tenemos que resolver el siguiente S.E.L.:

$$A+B=0 \qquad B+C=3 \qquad \text{y} \qquad 5\,A+C=2$$

- La solución de este S.E.L. es: $A=-1/6$, $B=1/6$ y $C=17/6$.
- Sustituyendo estos valores en la integral tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3\,x+2}{(x+1)(x^2+5)}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{-1/6}{x+1}+\frac{-(1/6)\,x+17/6}{x^2+5}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+\frac{1}{(6)(2)}\int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+5}+\frac{17}{6}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+5}\\
&= -\frac{1}{6}\ln(x+1)+\frac{1}{12}\ln(x^2+5)+\frac{17}{6\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+C
\end{aligned}$$

Como podrás ver, en general, para integrar una función de la forma:

$$\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{P_n(x)}{(a_1\,x+b_1)(a_2\,x+b_2)\cdots(a_m\,x+b_m)}\,\mathrm{d}x$$

donde $Q_m(x)$ es un polinomio de grado m que es factorizable en m factores lineales que no se repiten, buscamos números $A_1, A_2, \cdots, A_m$ tales que:

$$\frac{P_n(x)}{(a_1\,x+b_1)(a_2\,x+b_2)\cdots(a_m\,x+b_m)}=\frac{A_1}{a_1\,x+b_1}+\frac{A_2}{a_2\,x+b_2}+\cdots+\frac{A_m}{a_m\,x+b_m}$$

Para el caso en que uno o varios de los factores se repitan usamos un término para cada uno de los factores con exponentes $1, 2, \cdots, k$, donde k es el número de veces que se repite el factor que estamos considerando.

Por ejemplo, para expresar:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}+\frac{B_3}{(x+2)^3}$$

En este caso $k=3$, por eso usamos 3 términos para expresar en fracciones parciales.

Este mismo argumento aplica a los denominadores que se factorizan con polinomios cuadráticos.

Cuando un denominador es cuadrático, en el numerador escribiremos: $A\,x+B$. Por ejemplo:

$$\frac{2\,x+1}{(x-7)(x^2+11)}=\frac{A}{x-7}+\frac{B\,x+C}{x^2+11}$$

Observa que el grado del polinomio que escribimos en el numerador siempre es menor al grado del denominador en una fracción.

Para el caso de factores cuadráticos repetidos, tenemos:

$$\frac{2x+1}{(x-7)(x^2+11)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+11} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+11)^2}$$

Con estos trucos, puedes calcular muchas integrales usando este método.

Ejercicios 23.2

Calcula cada una de las siguientes integrales indefinidas por el método de cambio de variable. Recuerda completar la diferencial.

1) $\displaystyle\int (5x^2+1)^{12}\,x\,dx = \frac{(5x^2+1)^{13}}{130} + C$

2) $\displaystyle\int \left(8x^{10}+4\right)^{34} x^9\,\mathrm{d}x = \frac{\left(8x^{10}+4\right)^{35}}{280} + C$

3) $\displaystyle\int \left(2x^{12}-1\right)^{20} x^{11}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(2x^{12}-1\right)^{21}}{42} + C$

4) $\displaystyle\int \left(5x^{14}-6\right)^{27} x^{13}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(5x^{14}-6\right)^{28}}{140} + C$

5) $\displaystyle\int \left(10x^{7}-4\right)^{32} x^{6}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(10x^{7}-4\right)^{33}}{330} + C$

6) $\displaystyle\int \left(10x^{8}+1\right)^{29} x^{7}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(10x^{8}+1\right)^{30}}{300} + C$

7) $\displaystyle\int \left(4x^{7}-6\right)^{38} x^{6}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(4x^{7}-6\right)^{39}}{156} + C$

8) $\displaystyle\int \left(10x^{12}+11\right)^{15} x^{11}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(10x^{12}+11\right)^{16}}{160} + C$

9) $\displaystyle\int \left(4x^{7}+7\right)^{31} x^{6}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(4x^{7}+7\right)^{32}}{128} + C$

10) $\displaystyle\int \left(1x^{7}+4\right)^{21} x^{6}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(1x^{7}+4\right)^{22}}{22} + C$

11) $\displaystyle\int \left(10x^{15}+9\right)^{27} x^{14}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(10x^{15}+9\right)^{28}}{280} + C$

12) $\displaystyle\int \left(8x^{6}+4\right)^{29} x^{5}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(8x^{6}+4\right)^{30}}{240} + C$

13) $\displaystyle\int \left(5x^{14}+2\right)^{29} x^{13}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(5x^{14}+2\right)^{30}}{150} + C$

14) $\displaystyle\int \left(4x^{14}+6\right)^{26} x^{13}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(4x^{14}+6\right)^{27}}{108} + C$

15) $\displaystyle\int \left(3x^{9}+10\right)^{22} x^{8}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(3x^{9}+10\right)^{23}}{69} + C$

16) $\int \left(8\,x^8-4\right)^{30} x^7\,\mathrm{d}x \;=\dfrac{\left(8\,x^8-4\right)^{31}}{248}+C$

17) $\int \left(9\,x^{13}-4\right)^{28} x^{12}\,\mathrm{d}x \;=\dfrac{\left(9\,x^{13}-4\right)^{29}}{261}+C$

18) $\int \left(5\,x^5-8\right)^{32} x^4\,\mathrm{d}x \;=\dfrac{\left(5\,x^5-8\right)^{33}}{165}+C$

19) $\int \left(9\,x^6+8\right)^{28} x^5\,\mathrm{d}x \;=\dfrac{\left(9\,x^6+8\right)^{29}}{261}+C$

20) $\int \left(11\,x^{15}+9\right)^{37} x^{14}\,\mathrm{d}x \;=\dfrac{\left(11\,x^{15}+9\right)^{38}}{418}+C$

21) $\int \left(5\,x^7+11\right)^{31} x^6\,\mathrm{d}x \;=\dfrac{\left(5\,x^7+11\right)^{32}}{160}+C$

Instrucciones

Resuelve cada una de las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes.

22) $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x \;=\cos(x)+x\sin(x)+C$

23) $\displaystyle\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x \;=x^2\sin(x)-2\sin(x)+2\,x\cos(x)+C$

24) $\displaystyle\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x \;=-x^2\cos(x)+2\cos(x)+2\,x\sin(x)+C$

25) $\displaystyle\int x^3 e^x\,\mathrm{d}x \;=\left(-6+6\,x-3\,x^2+x^3\right)e^x+C$

26) $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x \;=\frac{1}{2}\,x^2\ln(x)-\frac{1}{4}\,x^2+C$

27) $\displaystyle\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x \;=\frac{1}{3}\,x^3\ln(x)-\frac{1}{9}\,x^3+C$

28) $\displaystyle\int x^2\ln\left(x^2\right)\mathrm{d}x \;=\frac{1}{3}\,x^3\ln(x)-\frac{1}{9}\,x^3+C$

29) $\displaystyle\int x^2 e^{2x+1}\mathrm{d}x \;=\frac{1}{2}\,x^2 e^{2x+1}-\frac{1}{2}\,e^{2x+1}x+\frac{1}{4}\,e^{2x}e$

30) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx \;=-x^2 e^{-x}-2\,e^{-x}x-2\,e^{-x}$

31) $\displaystyle\int x\ln\left(x^2\right)\mathrm{d}x \;=\frac{1}{2}\,x^2\ln\left(x^2\right)-\frac{1}{2}\,x^2+C$

32) $\displaystyle\int x\ln\left(x^3\right)\mathrm{d}x \;=\frac{1}{2}\,x^2\ln\left(x^3\right)-\frac{3}{4}\,x^2+C$

33) $\displaystyle\int x^2 \ln\left(x^2\right) dx = \frac{1}{3}x^3 \ln\left(x^2\right) - \frac{2}{9}x^3 + C$

Resuelve cada una de las siguientes integrales utilizando el método más conveniente. **Instrucciones**

34) $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos(x)\, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

35) $\displaystyle\int \cos^5 x\, dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

36) $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$

37) $\displaystyle\int \sin^5 x\, dx = -\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x - \frac{4}{15}\sin^2 x\cos x - \frac{8}{15}\cos x + C$

38) $\displaystyle\int \sin^6 x\, dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{5}{16}\sin x\cos x + \frac{5}{16}x + C$

39) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\, dx = -\frac{1}{4}\cos^3 x\sin x + \frac{1}{8}\sin x\cos x + \frac{1}{8}x + C$

40) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\, dx = -\frac{1}{5}\cos^4 x\sin x + \frac{1}{15}\cos^2 x\sin x + \frac{2}{15}\sin x + C$

41) $\displaystyle\int \cos^2 x\sin^3 x\, dx = -\frac{1}{5}\cos^3 x\sin^2 x - \frac{2}{15}\cos^3 x + C$

42) $\displaystyle\int \cos^3 x\sin^3 x\, dx = -\frac{1}{6}\cos^4 x\sin^2 x - \frac{1}{12}\cos^4 x + C$

43) $\displaystyle\int \cos^4 x\sin^3 x\, dx = -\frac{1}{7}\cos^5 x\sin^2 x - \frac{2}{35}\cos^5 x + C$

44) $\displaystyle\int \sec x\tan^2 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x\tan x - \frac{1}{2}\ln(\sec x + \tan x) + C$

45) $\displaystyle\int \sec^2 x\tan x\, dx = \frac{1}{2}\sec^2 x + C$

46) $\displaystyle\int \sec^2 x\tan^3 x\, dx = \frac{1}{4}\tan^4 x + C$

47) $\displaystyle\int \sec x\tan^3 x\, dx = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$

48) $\displaystyle\int \csc^3 x\cot x\, dx = -\frac{1}{3}\csc^3 x + C$

49) $\displaystyle\int \csc x\cot^3 x\, dx = -\frac{1}{3}\csc^3 x + \csc x + C$

50) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \ln(\sec x + \tan x) - \sin x + C$

Instrucciones Resuelve cada una de las siguientes integrales utilizando el método de las fracciones parciales. Recuerda verificar primero que la fracción dada está simplificada al iniciar.

51) $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2+2x-35}\,dx = \ln(x+7)+C$

52) $\displaystyle\int \frac{x^2-4}{x^2-x-6}\,dx = x+\ln(x-3)+C$

53) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-2x-8}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x-8\right)+C$

54) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-6x+13}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-6x+13\right)+C$

55) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+25} = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{x+5}{x-5}\right)+C$

56) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+25} = \frac{1}{40}\ln\left(\frac{x+5}{x-5}\right)+C$

57) $\displaystyle\int \frac{5x^2-3}{x\cdot(x^2-1)}\,dx = \ln\left(x^5-x^3\right)+C$

58) $\displaystyle\int \frac{4x^2-1}{x^2-1}\,dx = 4x+3\ln(x-1)+\ln x$

59) $\displaystyle\int \frac{2x-7}{x^3-x^2}\,dx = \frac{7}{x}+9\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+C$

60) $\displaystyle\int \frac{3x^2-4}{x^2-1}\,dx = 3x+\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C$

61) $\displaystyle\int \frac{1-2x^2}{x^3+3x^2+2x}\,dx = \ln\left(\frac{x^2+x}{(x+2)^{7/2}}\right)+C$

62) $\displaystyle\int \frac{3+x}{x^2-4x-12}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-4x-12\right)+\frac{5}{8}\ln\left(\frac{x-6}{x+2}\right)+C$

63) $\displaystyle\int \frac{1-x}{x^2+5x+6}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+5x+6\right)+\frac{7}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)+C$

64) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2+2x-35}\,dx = \ln\left(x^2+2x-35\right)+\frac{7}{12}\ln\left(\frac{x+7}{x-5}\right)+C$

65) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^2-x-6}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left(x^2-x-6\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)+C$

66) $\displaystyle\int \frac{8\,dx}{x^3-3x^2} = \frac{8}{3x}+\frac{8}{9}\ln\left(\frac{x-3}{x}\right)+C$

67) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^3-4x^2}\,dx \quad = \frac{5}{16}\ln\left(\frac{x-4}{x}\right) - \frac{3}{4x} + C$

68) $\displaystyle\int \frac{x+7}{x^3-5x^2}\,dx \quad = \frac{12}{25}\ln\left(\frac{x-5}{x}\right) + \frac{7}{5x} + C$

69) $\displaystyle\int \frac{2x-17}{x^2-5x-50}\,dx \quad = \ln\left(x^2-5x-50\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\frac{x+5}{x-10}\right) + C$

70) $\displaystyle\int \frac{5x-7}{x^2-x-42}\,dx \quad = \frac{5}{2}\ln\left(x^2-x-42\right) + \frac{9}{26}\ln\left(\frac{x+6}{x-7}\right) + C$

71) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-9}\,dx \quad = \ln\left(x^2-9\right) + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right) + C$

72) $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2-1}\,dx \quad = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right) + \frac{5}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C$

73) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-4x-12}\,dx \quad = \ln\left(x^2-4x-12\right) + \frac{1}{8}\ln\left(\frac{x-6}{x+2}\right) + C$

74) $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^2+11x-7}\,dx \quad = \frac{1}{11}\ln\left(\frac{3x-7}{2x-1}\right) + C$

75) $\displaystyle\int \frac{x+1}{10x^2+3x-4}\,dx \quad = \frac{3}{5}\ln(5x-4) - \frac{1}{2}\ln(2x-1) + C$

Capítulo 24

Teorema fundamental del Cálculo y las aplicaciones de la integral definida

Por aprender...

Por qué es importante...

El Teorema Fundamental del Cálculo nos muestra que los procesos de derivación e integración son opuestos uno del otro. Con él resolveremos problemas diversos.

24.1 El teorema fundamental y sus aplicaciones

El teorema fundamental del cálculo es el teorema más importante del cálculo infinitesimal.

Si f es una función contínua y no-negativa para toda x en el intervalo $[a, b]$, entonces el área A delimitada por $y = f(x)$, y el eje x desde a hasta b está dada por:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f.

Teorema 1

En palabras, el teorema fundamental del cálculo nos dice que para calcular el cambio total desde a hasta b de una cantidad que cambia contínamente con razón de cambio: $f = dF/dx$, usamos $F(b) - F(a)$.

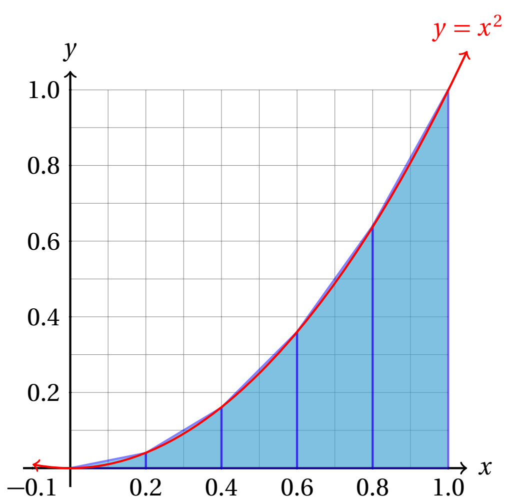
24.1.1 Integración aproximada: Regla del trapecio

Algunas veces no es nada sencillo calcular la antiderivada de una función dada. En esos casos es mejor hacer una aproximación al valor del área debajo de la curva utilizando métodos numéricos ampliamente conocidos.

La regla del trapecio consiste utilizar trapeciod en lugar de rectángulos al hacer la aproximación del área bajo la curva.

En la sección 23.1.2 hicimos la primera aproximación del valor del área bajo la parábola $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Ahora vamos a hacer la misma aproximación usando trapecios.



Ahora, la comparación de las aproximaciones usando rectángulos por un lado y trapecios por otro, se muestra enseguida:

Usando rectángulos:

i	A_{inf}	A_{sup}
1	0.0	0.0080
2	0.0080	0.032
3	0.032	0.072
4	0.072	0.128
5	0.128	0.2
Totales:	0.24	0.44

Usando trapecios:

i	dA
1	0.0040
2	0.02
3	0.052
4	0.1
5	0.164
Totales:	0.34

Solo para ver la diferencia, recuerda que el área bajo la curva es exactamente de $1/3$.

Si comparas esta gráfica con la de la página 1015,donde utilizamos rectángulos en lugar de trapecios, verás por qué esta nueva aproximación es mucho mejor: los trapecios se acercan mucho mejor a la curva que los rectángulos.

Esa es la idea que está detrás de la regla del trapecio.

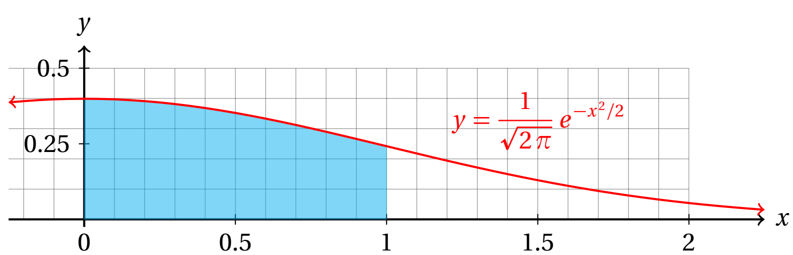
Ejemplo 1

Calcula el área bajo la curva de la función:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

- Geométricamente, tenemos que calcular la siguiente área:



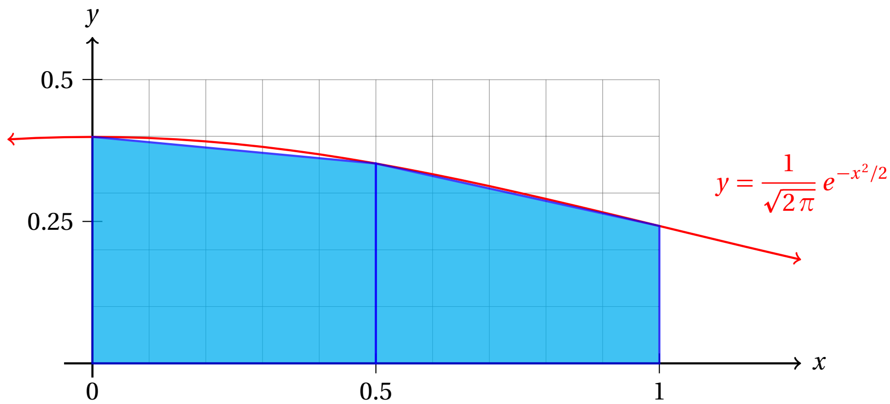
- Si intentamos calcular la antiderivada para aplicar el teorema fundamental del cálculo tendremos serias dificultades.
- En términos de integral definida, el problema se puede pronunciar como:

Comentario

Calcular:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

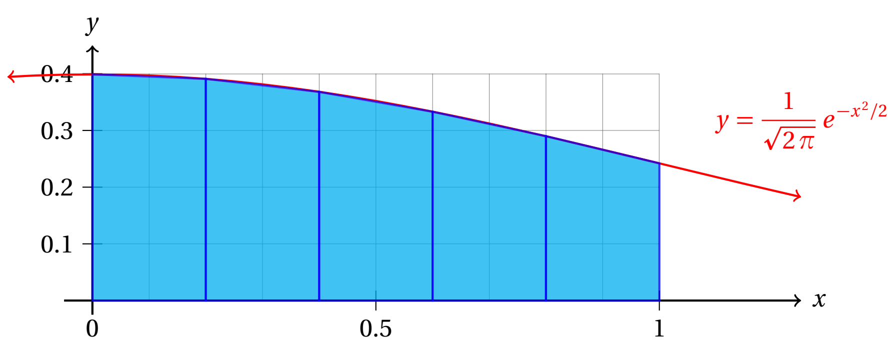
- Calcular la antiderivada de esta función es posible a través de métodos de cálculo avanzado.
- Así que lo más recomendable por ahora es hacer una aproximación.
- Podemos hacer una primera aproximación ocupando rectángulos como hicimos en la sección 23.1.2 (página 1014).
- Pero podemos mejorar la solución si en lugar de dibujar rectángulos en su lugar utilizamos trapecios como se muestra enseguida:



- Usando dos trapecios en el intervalo obtenemos los siguientes resultados:

i	dA
1	0.18775
2	0.14851
Total:	0.33626

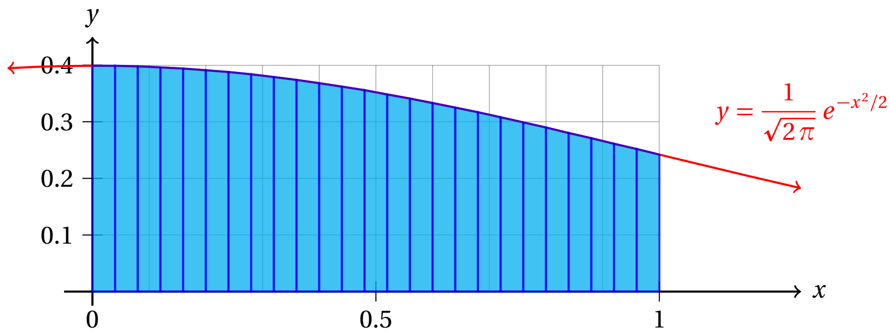
- Igual, podemos aumentar el número de particiones y comparar los resultados.
- Vamos a utilizar $n = 5$ para hacer la comparación con la aproximación anterior ($n = 2$).



- Y las áreas de cada una de las particiones es:

i	dA
1	0.079
2	0.07593
3	0.07015
4	0.06229
5	0.05317
Total:	0.34054

- Si ahora hacemos $n = 25$ obtenemos una muy buena aproximación al valor real:



- En la siguiente tabla se muestran las áreas de cada trapecio dibujado en la gráfica anterior.

i	dA	i	dA	i	dA	i	dA	i	dA
1	0.01595	6	0.01557	11	0.01461	16	0.01317	21	0.0114
2	0.01593	7	0.01542	12	0.01435	17	0.01283	22	0.01102
3	0.01588	8	0.01525	13	0.01408	18	0.01249	23	0.01064
4	0.0158	9	0.01506	14	0.01379	19	0.01213	24	0.01026
5	0.0157	10	0.01484	15	0.01349	20	0.01177	25	0.00987

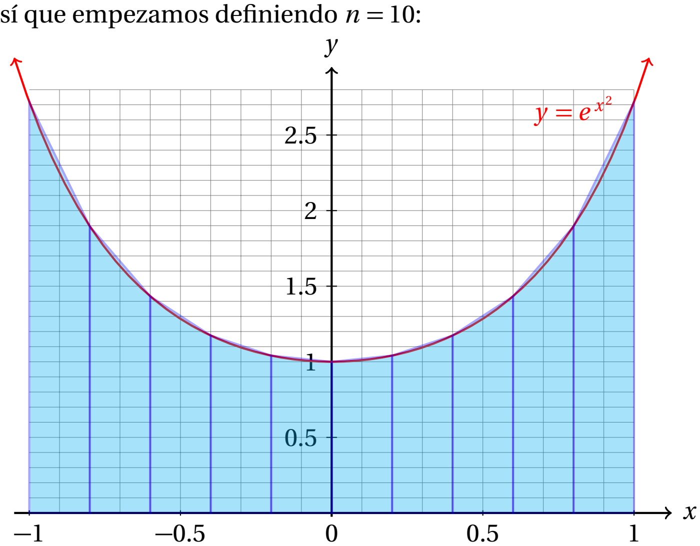
- Y la aproximación del área bajo la curva en este caso es: 0.34131 unidades de área.

Ejemplo 2

Utiliza la regla del trapecio para aproximar la integral definida:

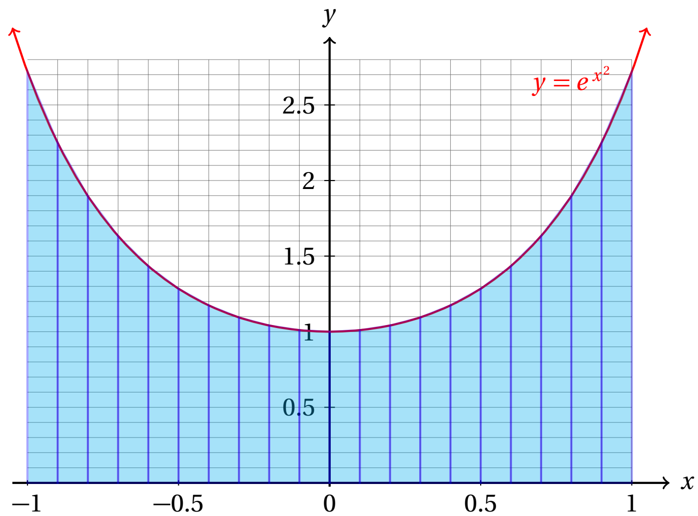
$$\int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dx$$

- El cálculo de esta integral de manera analíica es imposible por los métodos que hemos estudiado.
- Así que empezamos definiendo $n = 10$:



i	dA
1	0.46148
2	0.33298
3	0.26068
4	0.22143
5	0.20408
6	0.20408
7	0.22143
8	0.26068
9	0.33298
10	0.46148
Total:	2.96131

- Y haciendo $n = 20$, obtenemos:



- Y el valor de esta aproximación es: 2.93435 unidades de área.
- El valor del área buscada (correcto a 8 decimales) es de 2.925303492 unidades de área.

Observa que para calcular el área dA de un trapecio utilizamos la fórmula:

$$dA = \left(\frac{f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{2}\right) \cdot \Delta x$$

y para calcular la aproximación del área debajo de la curva usando trapecios en lugar de rectángulos ocupamos la sumatoria de todas las áreas de los n trapecios que hemos dibujado debajo de la curva:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{2}\right) \cdot \Delta x$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$.

Si definimos: $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, podemos reescribir la expresión anterior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{2}\right) \cdot \Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\right) \cdot \Delta x \\
&= \frac{\Delta x}{2} \cdot \big([f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + f(x_3)] + \cdots + [f(x_{n-1}) + f(x_n)]\big) \\
&= \frac{\Delta x}{2} \cdot \big[f(x_1) + 2\,f(x_2) + 2\,f(x_3) + \cdots + 2\,f(x_{n-1}) + f(x_n)\big] \\
&= (\Delta x) \cdot \big(f(x_2) + f(x_3) + \cdot + f(x_{n-1})\big) + (\Delta x) \cdot \left(\frac{f(x_1) + f(x_n)}{2}\right)
\end{aligned}$$

Mucho software computacional que se utiliza para calcular integrales utiliza algún método como el que se acaba de explicar.

La computadora es programada para realizar los cálculos. El usuario solamente debe indicar el número de intervalos que desea utilizar.

Ejemplo 3

Utiliza la regla trapezoidal para aproximar:

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

haciendo $n = 10$.

- Nosotros haremos $n = 10$, luego:

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0.1$$

- De acuerdo a la regla trapezoidal, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx (\Delta x)\cdot\big(f(x_2)+f(x_3)+\cdot+f(x_{n-1})\big)+(\Delta x)\cdot\left(\frac{f(x_1)+f(x_n)}{2}\right)\\ &= (0.1)\big[f(1.1)+f(1.2)+\cdots+f(1.9)\big]+(0.1)\left(\frac{f(1)+f(2)}{2}\right)\end{aligned}$$

- En este caso particular, $f(x) = 1/x$, así que:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} &\approx (0.1)\big[f(1.1)+f(1.2)+\cdots+f(1.9)\big]+(0.1)\left(\frac{f(1)+f(2)}{2}\right)\\ &= (0.1)\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.9}\right)+(0.1)\left(\frac{1+0.5}{2}\right)\\ &= (0.1)(6.187714032)+(0.1)(0.75)\\ &= 0.6187714032+0.075 = 0.6937714032\end{aligned}$$

- Nosotros ya sabemos que:

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln(2)-\ln(1) \approx \ln 2 = 0.6931471806$$

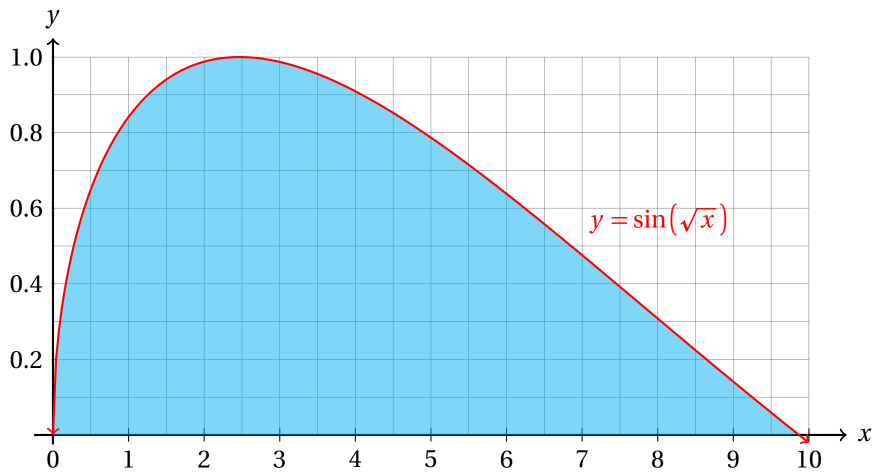
- Así que hemos una aproximación correcta hasta 3 decimales.
- Representa geométricamente la aproximación que hemos calculado usando la regla del trapecio en papel milimétrico.

Ejemplo 4

Aplicando la regla del trapecio aproxima:

$$\int_0^{\pi^2} \sin\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$$

- Geométricamente, tenemos que calcular el área sombreada en la siguiente gráfica:



- Observa que el integrando se hace cero exactamente en π^2:

$$\sin\left(\sqrt{\pi^2}\right) = \sin\pi = 0$$

- Empezamos la primera aproximación haciendo $n = 10$.
- Entonces, $\Delta x = 0.1\,\pi^2$, y sustituyendo en la regla del trapecio obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\pi^2} \sin\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x &\approx \left(f(x_2)+f(x_3)+\cdot+f(x_{n-1})\right)+\left(\frac{f(x_1)+f(x_n)}{2}\right)\\
&= \left(\sin\sqrt{0.2\,\pi^2}+\cdots+\sin\sqrt{0.9\,\pi^2}\right)+\frac{\sin(0.1\,\pi^2)+\sin(\pi^2)}{2}\\
&= 6.0706 \text{ unidades de área.}
\end{aligned}$$

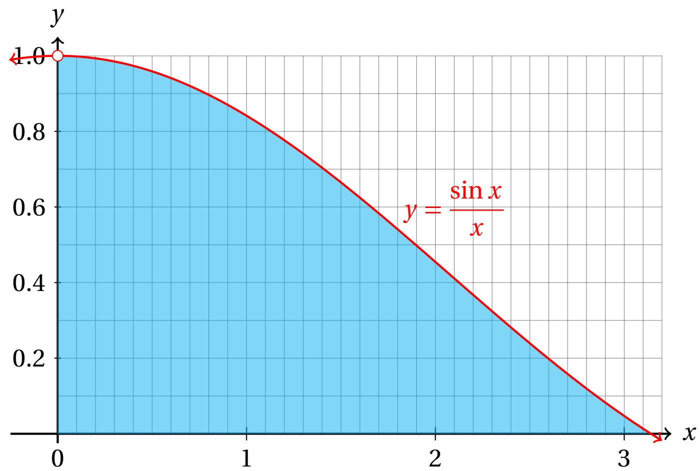
- Si usamos $n = 20$ obtenemos una mejor aproximación: 6.20862 unidades de área.
- Por otra parte, para $n = 50$ obtenemos: 6.26451 unidades de área.
- El área buscada es exactamente: $2\pi \approx 6.283185307$ unidades cuadradas.

Ejemplo 5

Utiliza la regla del trapecio para aproximar:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

- Geométricamente, tenemos:



- Observa que el integrando no está definido para $x = 0$.
- Pero eso no es problema, porque podemos acercarnos tanto como queramos a $x = 0$, pero sin llegar a cero.
- Podemos, por ejemplo, empezar desde $x = 0.0001$ y el error cometido al hacer la aproximación es muy pequeño, además de que el integrando sí está definido en ese punto.
- Empezamos haciendo $n = 10$, con lo que obtenemos la primera aproximación: 1.84921 unidades de área.
- Para $n = 20$ obtenemos: 1.85118 unidades de área.
- Para $n = 50$ obtenemos: 1.85173 unidades de área.
- el valor aproximado de esta integral definida es: 1.851837052 unidades de área.

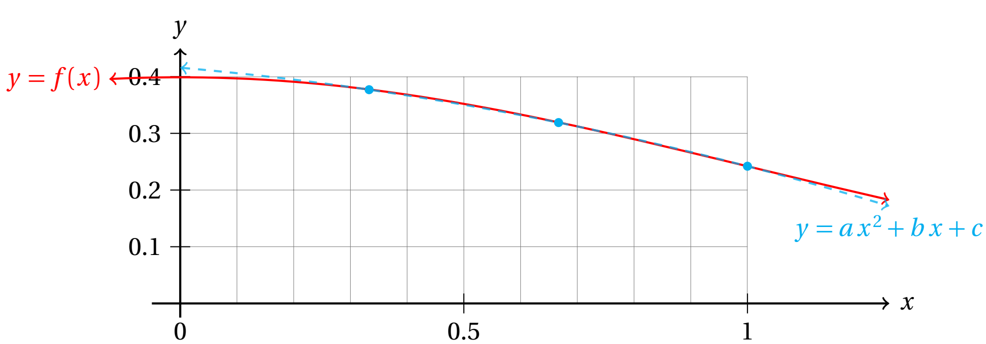
24.1.2 Integración aproximada: Regla de Simpson

Otro método para aproximar integrales definidas es el conocido como la regla de Simpson.

Simpson fue todavía más allá. En lugar de utilizar trapecios a partir de dos puntos mejoró la aproximación utilizando parábolas que pasen por tres puntos por los cuales pasa la función.

Elegimos 3 puntos: $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ y $C(x_3, f(x_3))$.

Con estos tres puntos vamos a calcular la parábola que pasa por ahí. Es decir, tenemos que determinar los parámetros a, b, c tales que $y = a\,x^2 + b\,x + c$ pasa por los puntos A, B, C.



Utilizando esta idea, podemos aplicar el mismo método que usamos para el método del trapecio y finalmente encontramos:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\Delta x}{3}\big(f(x_1)+4\,f(x_2)+2\,f(x_3)+4\,f(x_4)+\cdots+4\,f(x_{n-1})+f(x_n)\big)$$

para n par y $\Delta x = (b-a)/n$.

Aproxima la integral definida:

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

haciendo $n = 10$.

Ejemplo 1

- Aplicamos directamente la regla de Simpson:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} &\approx \frac{0.1}{3}\left[\frac{1}{1}+\frac{4}{1.1}+\frac{2}{1.2}+\frac{4}{1.3}++\frac{2}{1.4}+\frac{4}{1.5}+\frac{2}{1.6}+\frac{4}{1.7}+\frac{2}{1.7}+\frac{4}{1.9}+\frac{1}{2}\right]\\ &\approx 0.693150\end{aligned}$$

- Recuerda que con el método del trapecio, en el cual obtuvimos una aproximación de 0.6937714032 unidades de área.
- Y el valor del área buscada es de: $\ln 2 \approx 0.693147180559945$.
- El método de Simpson nos da una mejor aproximación, como era de esperarse.

Utilizando la regla de Simpson, aproxima el valor de la integral definida:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

haciendo $n = 10$.

Ejemplo 2

- Para este caso tenemos: $\Delta x = 0.1$.
- Aplicando la regla de Simpson, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{0.1}{3}\left[e^{0^2}+4\,e^{0.1^2}+2\,e^{0.2^2}+\cdots+4\,e^{0.9^2}+e^{1^2}\right]\\ &\approx 1.462653625\end{aligned}$$

Utilizando la regla de Simpson, aproxima el valor de la integral definida:

$$\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

haciendo $n = 15$.

Ejemplo 3

- Ahora $\Delta x/3 \approx 1.047197551$.
- Aplicando la regla obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx &\approx \frac{\pi}{3}\left[\sin(0)+4\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)+\cdots+4\sin\left(\frac{14\pi}{15}\right)+\sin(\pi)\right]\\ &\approx 2.000001339\end{aligned}$$

- Podemos verificar el resultado haciendo el cálculo exacto:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

Ejemplo 4

Utilizando la regla de Simpson, aproxima el valor de la integral definida:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

considerando los valores $n = 5, 10, 15, 20, 25$.

- Aplicamos la regla de Simpson y calculamos la aproximación para diferentes valores de n.
- Obtenemos los siguientes resultados:

n	**Aproximación:**
05	2.000109517
10	2.000006785
15	2.000001339
20	2.000000423
25	2.000000173

- De la tabla se hace evidente que conforme n crece la aproximación tiende a 2.

Ejemplo 5

Utilizando la regla de Simpson, aproxima el valor de la integral definida:

$$\int_1^{2} \frac{dx}{x}$$

considerando los valores $n = 5, 10, 15, 20, 25$.

- De nuevo, aplicamos la regla de Simpson para diferentes valores de n:

n	**Aproximación:**
05	0.6931502307
10	0.6931473747
15	0.6931472190
20	0.6931471927
25	0.6931471856

- Recuerda que el valor exacto de la integral es: $\ln(2) \approx 0.693147180559945$.

Muchas veces en ingeniería se requiere del cálculo de una integral definida, sin embargo, la antiderivada del integrando es sumamente difícil de calcular.

Para esos casos se utilizan métodos numéricos, como la regla de Simpson.

Los métodos numéricos son técnicas computacionales que ayudan a los ingenieros y científicos a aproximar las soluciones de ecuaciones muy difíciles de resolver de manera analítica, así como a la aproximación de cálculos que de otra manera sería prácticamente imposible de obtener.

Calcula el valor aproximado para cada una de las siguientes integrales usando el método y el valor de n para las particiones indicados.

Ejercicios 24.1

1) $\displaystyle\int_0^1 \left(x - x^2\right) dx$, por la regla del trapecio, $n = 5$. ≈ 0.16

2) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\, dx$, por la regla del trapecio, $n = 5$. ≈ 0.3846315356

3) $\displaystyle\int_1^2 x \cdot \ln(x)\, dx$, por la regla del trapecio, $n = 10$. ≈ 0.6368718799

4) $\displaystyle\int_0^2 e^{-x^2} dx$, por la regla del trapecio, $n = 10$. ≈ 0.8818388107

5) $\displaystyle\int_0^5 e^{-x^2} dx$, por la regla del trapecio, $n = 25$. ≈ 0.8862269254

6) $\displaystyle\int_0^1 \left(x - x^2\right) dx$, por la regla de Simpson, $n = 10$ ≈ 0.1666666667

7) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx$, por la regla de Simpson, $n = 10$ ≈ 0.7468241838

8) $\displaystyle\int_0^2 e^{-x^2} dx$, por la regla de Simpson, $n = 10$ ≈ 0.8820809834

9) $\displaystyle\int_0^2 e^{-x^2} dx$, por la regla de Simpson, $n = 20$ ≈ 0.8820813652

10) $\displaystyle\int_1^5 \ln\left(x^2\right) dx$, por la regla de Simpson, $n = 20$ ≈ 8.094376951

11) $\displaystyle\int_2^5 \ln\left(x+x^2\right) \mathrm{d}x$, por la regla de Simpson, $n=20$ ≈ 8.115615101

12) $\displaystyle\int_1^5 \ln\left(x+x^2-1\right) \mathrm{d}x$, por la regla de Simpson, $n=10$ ≈ 49.33333333

13) $\displaystyle\int_1^5 \ln\left(x^2\right) \mathrm{d}x$, por la regla de Simpson, $n=10$ ≈ 8.094345674

14) $\displaystyle\int_1^5 \sin\left(x^3\right) \mathrm{d}x$, por la regla de Simpson, $n=10$ ≈ 0.4625805504

15) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(\cos(x)) \mathrm{d}x$, por la regla de Simpson, $n=10$ ≈ 0.8932441650

16) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(e^x) \mathrm{d}x$, por la regla del trapecio, $n=20$ ≈ 0.6136302658

17) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos(x)} \mathrm{d}x$, por la regla del trapecio , $n=20$ ≈ 3.977463260

18) $\displaystyle\int_1^{10} \sin(\ln(x)) \mathrm{d}x$, por la regla de , $n=20$ ≈ 7.542965509

19) $\displaystyle\int_1^{10} \sin(\ln(x)) \mathrm{d}x$, por la regla de Simposon, $n=20$ ≈ 7.560894406

20) $\displaystyle\int_1^{10} \sin(\ln(x)) \mathrm{d}x$, por la regla del trapecio, $n=50$ ≈ 7.558030283

24.2 Área entre dos funciones

En algunas aplicaciones de ingeniería y de administración se requiere conocer el área entre dos curvas.

En estos casos usamos la misma idea de la integral de Riemann pero ahora vamos a calcular la diferencia de las alturas de las funciones y a considerar una pequeña *banda* vertical como un pequeño incremento en x (es decir, como Δx) y calcular el área en el intervalo de interés.

Calcula el área entre las funciones: $y = x$, y $y = x^2$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$. **Ejemplo 6**

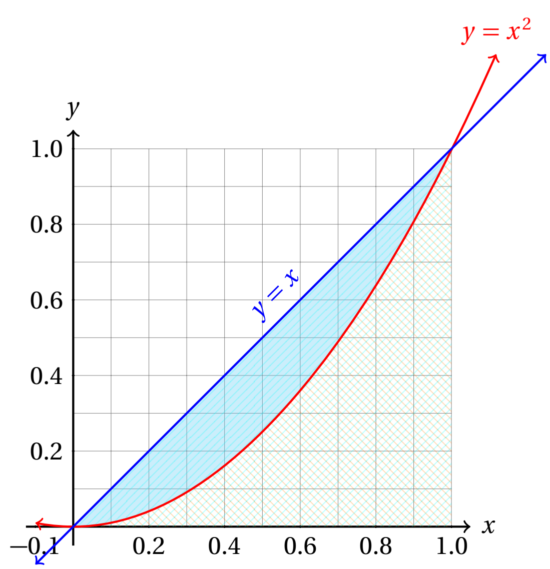
- Tenemos dos formas distintas de calcular el área buscada.
- En el primer método calculamos las áreas por separado y calculamos la diferencia entre ambas:
- Empezamos calculando el área debajo de la recta:

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

- Por otra parte, el área debajo de la parábola es:

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

- Geométricamente tenemos la siguiente situación:



- Evidentemente, si al área que está debajo de la recta le restamos el área que está por debajo de la parábola, obtenemos el área entre las dos curvas:

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

- En el segundo método vamos a calcular la diferencia de las alturas de las funciones para cada punto.

- Esa distancia es la altura de cada diferencial de área:

$$\int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

- Observa que la recta está por encima de la parábola.

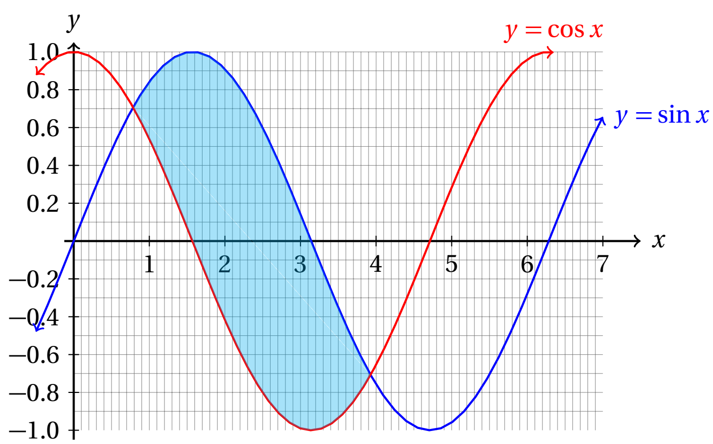
- Esa es la razón por la cual restamos la que está por debajo a la que está por arriba.

- Así la altura de cada diferencial es positiva y obtenemos un resultado positivo.

Ejemplo 7 Calcula el área entre las funciones: $y = \cos x$, y $y = \sin x$ desde $x = \pi/4$ hasta $5\pi/4$.

- De la gráfica de las dos funciones, nos damos cuenta que en esos puntos las dos gráficas se cortan.

- Además, en ese intervalo $\sin x$ queda por encima del $\cos x$.

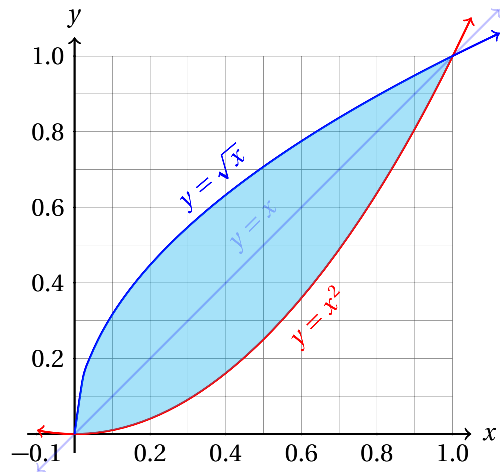


- Entonces, el área se calcula con:

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x = (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}$$

Ejemplo 8 Calcula el área entre las funciones: $y = \sqrt{x}$, y $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta 1.

- La representación geométrica del problema es la siguiente:



- En el intervalo $(0,1)$, la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ está por encima de la gráfica de la función $y = x^2$.

- Entonces, el área se calcula con:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2\,x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

- Por simetría es evidente que el área que ahora buscamos es igual al doble de la que está entre la recta $y = x$ y $y = x^2$.

- Observa que el resultado está de acuerdo con el primer ejemplo.

Calcula el área entre las funciones: $y = x/2$, y $y = \sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$. **Ejemplo 9**

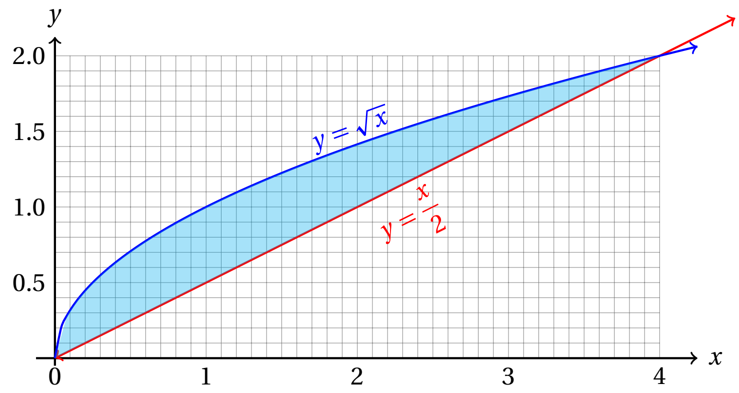
- Los puntos de intersección de las dos curvas son: $(0,0)$ y $(4,2)$.

- En el intervalo $(0,4)$, la función $y = \sqrt{x}$ está por encima de la de la función $y = x/2$.

- El área encerrada por estas dos funciones es:

$$\int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{2\,x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

- Geométricamente, tenemos la siguiente situación:



Ejemplo 10 Calcula el área encerrada entre las funciones: $y = x^2 - 1$, y $y = 1 - x^2$.

- Primero debemos calcular los puntos de intersección de las dos curvas.
- Para eso igualamos los valores de y y resolvemos para x:

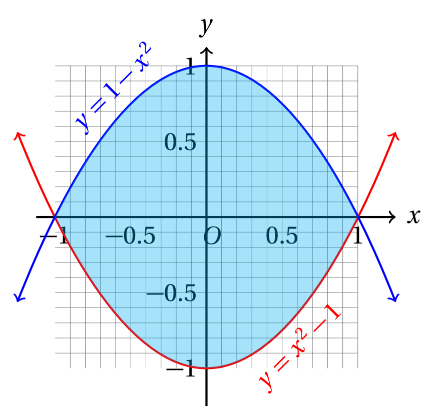
$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 1 - x^2 \\ 2x^2 &= 2 \\ x^2 &= 1 \qquad x = \pm 1 \end{aligned}$$

- Para calcular el valor de y, sustituimos en cualquiera de las funciones:

$$y(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \qquad\qquad y(1) = (1)^2 - 1 = 0$$

- Entonces, los puntos de intersección de las dos funciones son: $A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$.
- El área encerrada por las dos parábolas es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} \left[(1 - x^2) - (x^2 - 1)\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \left[2 - 2x^2\right] \\ &= \left(2x - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

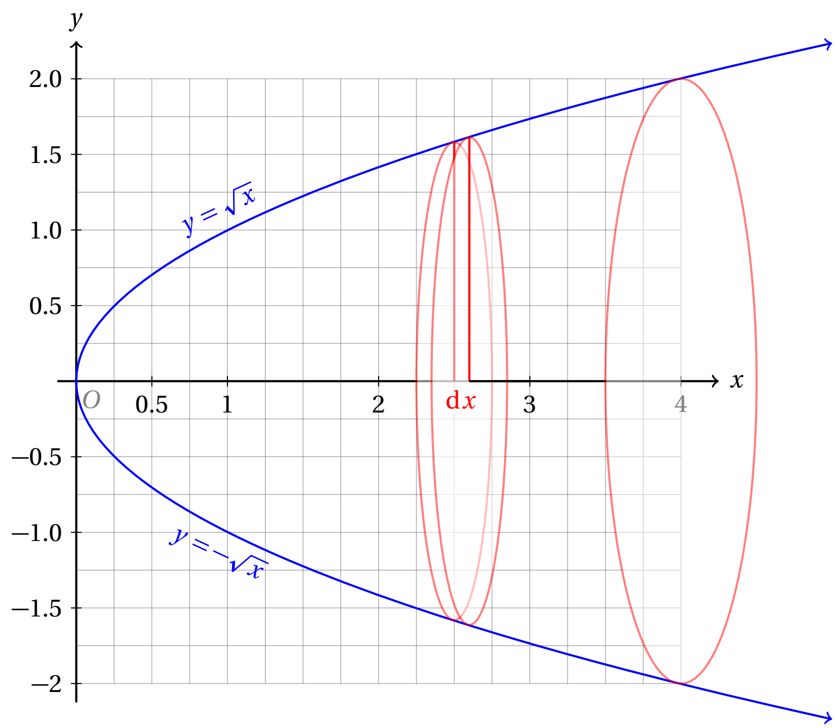


24.3 Aplicaciones de la integral definida

En esta sección vamos a estudiar algunas otras aplicaciones de la integral definida.

Calcula el volumen generado cuando la función: $y = \sqrt{x}$ gira alrededor del eje x desde $x = 0$ hasta $x = 4$. **Ejemplo 11**

- La idea geométrica se muestra en la siguente gráfica:



- Tenemos que generar discos a partir de cada diferencial $\mathrm{d}x$.
- Si calculamos el área de una cara del disco y la multiplicamos por su altura ($\mathrm{d}x$), obtenemos el volumen del disco.
- Al sumar el volumen de todos los discos obtendremos una aproximación al volumen que se genera al girar la función alrededor del eje x.
- Cuando hacemos que el número de particiones tienda a infinito, obtenemos el volumen buscado.
- Es fácil reconocer de la gráfica que el radio del disco es igual a $y = \sqrt{x}$.
- Entonces, el área de un disco es:

$$\mathrm{d}A = \pi\, r^2 = \pi \left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi\, x$$

- Y la aproximación al volumen del diferencial es:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}A \cdot \mathrm{d}x = \pi\, x\, \mathrm{d}x$$

donde $\mathrm{d}x = 4/n$, suponiendo n particiones del intervalo $(0, 4)$.

- La aproximación al volumen entonces es:

$$\sum_{i=0}^{n} \pi\, x\, \mathrm{d}x$$

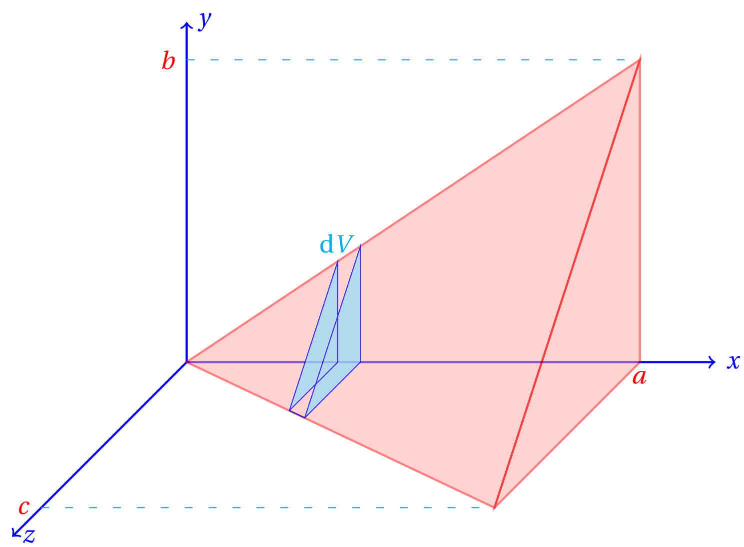
- Cuando hacemos que n tienda a infinito obtenemos una integral:

$$\int_{0}^{4} \pi\, x\, \mathrm{d}x = \pi\, \frac{x^2}{2}\bigg|_0^4 = 8\,\pi$$

- Entonces, el volumen que se genera haciendo girar la función $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje x desde el origen hasta $x = 4$ es $8\,\pi$ unidades de volumen.

Ejemplo 12 Calcula el volumen del sólido tetraédrico cuyos vértices están en los puntos: $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $C(a,b,0)$, y $D(a,0,c)$.

- El sólido es una pirámide cuyos vértices se enlistan antes.
- Geométricamente, deseamos calcular el volumen del siguiente sólido:



- Vamos a considerar diferenciales de volumen perpendiculares al eje x.
- La recta que forma una de las aristas del sólido es: $y = b\,x/a$.
- La otra arista está sobre la recta: $z = c\,x/a$.
- Los triángulos que se forman son rectángulos, porque la base del sólido es paralela al plano $y\,z$.
- Observa que la base de cada triángulo que se forma con las diferenciales es: $y_i = b\,x_i/a$.
- De manera semejante, $z_i = c\,x_i/a$.

- Entonces, el área de una cara de la diferencial de volumen es:

$$A(x) = \frac{1}{2}\,y\,z = \frac{b\,c\,x^2}{2\,a^2}$$

- Cuando hacemos que el número de diferenciales tienda a infinito, obtenemos una integral.
- Los límites de la integral en este caso van desde $x = 0$ hasta $x = a$.
- Entonces, el volumen del sólido es:

$$\int_0^a \frac{b\,c\,x^2}{2\,a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a\,b\,c}{6}$$

- Verifica este resultado buscando en algún libro la fórmula para calcular el volumen de una pirámide conocida el área de su base.

En física, el centro de gravedad de un cuerpo es un punto en el cual se puede considerar que está concentrada toda la masa del mismo.

CENTRO DE GRAVEDAD

El centro de gravedad de un cuerpo es el punto en el cual se puede considerar que se ejerce la fuerza de atracción debido a la gravedad sobre ese cuerpo.
Si el cuerpo tiene n partículas en las posiciones $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$, y los pesos de cada una de las partículas es: $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ las coordenadas del centro de gravedad $C(\bar{x}, \bar{y})$ se pueden calcular con:

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\,x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

$$\bar{y} = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2 + \cdots + w_n y_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\,y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Definición 1

Realiza el cálculo del centro de gravedad de un cuerpo para el caso contínuo. **Ejemplo 13**

- Nosotros vamos a considerar que el número de partículas n tienda a infinito.
- Entonces, la sumatoria se convertirá en una integral.
- Observa que si multiplicamos la densidad lineal (masa por unidad de distancia) del cuerpo por una distancia, obtenemos la masa del material contenida en esa distancia.
- Supuesto que nosotros conozcamos la función $\delta(x)$ que nos dé la densidad lineal del cuerpo en x_i, podremos escribir:

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\,x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\int_a^b x\,\delta(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x}$$

- De manera semejante para la coordenada $\bar{y}$, obtenemos:

$$\bar{y} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\displaystyle\int_a^b y\,\delta(y)\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_a^b \delta(y)\,\mathrm{d}y}$$

donde $\delta(y)$ es la función que nos da la densidad lineal del material en la dirección del eje y.

Para resolver el siguiente ejemplo requeriremos de las siguientes definiciones.

Definición 2

TRABAJO

En física, el trabajo W realizado por una fuerza F sobre un cuerpo es igual al producto del desplazamiento por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.

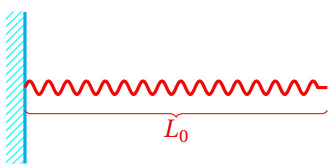
Es decir, si el desplazamiento es cero, el trabajo es nulo.

Definición 3

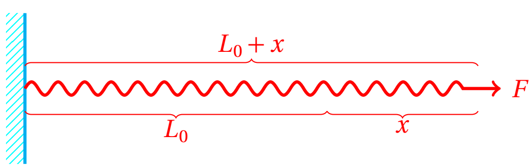
LEY DE HOOKE

Cuando un resorte es deformado (dentro de ciertos límites), éste ejerce una fuerza opuesta a la deformación que es proporcional a la magnitud de la deformación sobre el resorte.

Si el resorte tiene inicialmente una longitud L_0:



y se estira hasta alcanzar una distancia $L_0 + x$, la deformación causa que el resorte se oponga a la fuerza que la está deformando,



La ley de Hooke, matemáticamente expresa:

$$F = k\,x$$

donde k es una constante que es característica de cada resorte que se llama coeficiente de rigidez y sus unidades son [N/m][1].

Ejemplo 14

Calcula el trabajo realizado por una fuerza al deformar un resorte, cuya constante de rigidez es k, una distancia de x unidades de distancia.

- Empezamos considerando una pequeña deformación sobre el resorte.
- Esta deformación mide $\mathrm{d}x$ unidades de distancia.

[1] Newton/metro.

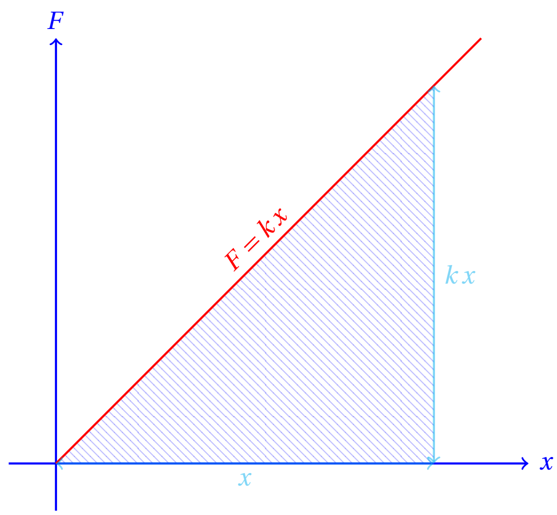
- Conforme se aplica la fuerza, la deformación va creciendo y podemos considerar que vamos a sumar un número infinito de diferenciales.

- En este caso, el diferencial del desplazamiento viene siendo $\mathrm{d}x$, y el trabajo es:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} k\,x\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{x} k\,x\,\mathrm{d}x = \frac{k\,x^2}{2}$$

- Observa que en realidad estamos calculando el área de un triángulo de base x y de altura $k\,x$.

- Esto es evidente al considerar la interpretación geométrica de la integral:



- El área de este triángulo es igual al semi-producto de su base por su altura:

$$W = \frac{1}{2}(x)(k\,x) = \frac{k\,x^2}{2}$$

Otras aplicaciones de la integral definida en ciencias naturales son las siguientes. **Ejemplo 15**

- **Impulso.** Cuando una partícula de masa m es impulsada por una fuerza F variable, que depende del tiempo, el impulso p (también llamado momento de la partícula) se puede calcular usando:

$$\int_{a}^{b} F(t)\,\mathrm{d}t$$

  El proceso de deducción de esta integral requiere de ciertos conceptos de física.

- **Conducción del calor.** Cuando se transfiere energía térmica a través de un medio contínuo como una varilla metálica, la temperatura de la varilla puede ser una función de la distancia desde donde se aplica la energía térmica, digamos, $T(x)$. Si suponemos que la temperatura del medio ambiente es constante e igual a T_0 la cantidad de calor que pierde la varilla en un intervalo (a, b) es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas en esos puntos: $E \propto T(b) - T(a)$. La pérdida de calor es entonces, para un diferencial de distancia: $k(T(b)-T(a))\Delta x$, y al considerar un número infinito de diferenciales obtenemos la integral:

$$k\int_a^b (T(x)-T_0)\,\mathrm{d}x$$

El resultado será la cantidad de calor que la varilla pierde por unidad de tiempo en el intervalo $a \leq x \leq b$.

- **Presión de un fluido.** La presión hidrostática que ejerce un fluido (como el agua) en una pared que le sirve de frontera contenedora, es igual al peso de una columna del fluido que tiene una profundidad h y superficie unitaria. La suma de las presiones ejercidas por muchas de esas columnas hará la presión total. La presión P que un líquido ejerce sobre una pared, es entonces,

$$P = \int_a^b W\,x\,y\,\mathrm{d}x$$

donde W es el peso de un litro del líquido considerado, a y b son las coordenadas de la superficie superior y profundidad del líquido, respectivamente, y y es una función de x que representa la pared que sirve de frontera al fluido.

- **Acondicionamiento de edificios.** El costo de acondicionar el ambiente de un edificio para que la temperatura interna sea confortable depende principalmente de la temperatura exterior y de la cantidad de luz solar que llegan a sus paredes. Hay otros factores que tienen menor importancia (como el viento) que aquí no se consideran. Si C es el costo de acondicionar un metro cúbico del volumen edificio, este costo, obviamente depende de la hora t del día (porque a diferente hora la cantidad de calor que ganan las paredes por la luz del sol es diferente, al igual que la temperatura atmosférica cambia), así que podemos escribir: $C = C(t)$. Si consideramos muchos intervalos de tiempo muy pequeños $\mathrm{d}t$, y sumamos los costos de acondicionar el ambiente del edificio para cada uno, obtendremos el costo diario de acondicionar ese edificio:

$$\int_0^{24} C(t)\,\mathrm{d}t$$

Las integrales definidas también se utilizan en probabilidad, administración, economía, ecología, computación, arquitectura, en las ingenierías (civil, eléctrica, mecánica, etc.) y en muchas otras ramas de las ciencias.

Algunos resultados importantes en ingeniería se demuestran con el uso de las integrales definidas.

Por ejemplo, el hecho de que un cuerpo sea una lámina plana nos asegura que su centro de masas C esté dentro de ese cuerpo. Lo mismo ocurre si el cuerpo es una varilla en forma de línea recta.

Ejercicios 24.3.0 Calcula o al menos deja expresadas en forma de integral definida las cantidades indicadas en cada uno de los siguientes ejercicios.

1) La densidad de un material se define como la razón de la masa m del cuerpo a su volumen V:

$$\delta = \frac{m}{V}$$

Un molde cuya forma sigue la función $y = \sqrt{x}$ girando alrededor del eje x, se usa para crear un cuerpo de densidad δ constante. Indica la masa del cuerpo como una integral. Los límites de integración

van desde $x = 0$ hasta $x = a$.
Sugerencia: Puedes basarte en el ejemplo 1 de esta sección.

2) Expresa como una integral definida la masa de un cilindro de altura h y radio r y densidad δ constante.

3) Expresa como una integral definida la masa de un cilindro de altura x y radio r y densidad variable: $\delta = f(x)$.

4) Expresa como una integral definida y calcula la masa de un cilindro cuya densidad varía linealmente de 1 000 kg/m^3 en su la base superior a 1 200 en su base inferior.

5) Expresa como una integral la masa de un tetraedro de densidad δ constante.
Sugerencia: Puedes basarte en el ejemplo 2 de esta sección.

6) Expresa como una integral la masa de un tetraedro de densidad $\delta = f(x)$ variable.

7) Expresa en forma de integral el volumen de un cono de altura h y radio r.

8) Expresa como una integral definida el área limitada por el triángulo que forman la recta $x/a + y/b = 1$, y los ejes coordenados.

9) Expresa como una integral definida el área limitada por la función $y = x - x^2$ y el eje x.

10) Investiga el método de diferenciales cilíndricas para calcular integrales indefinidas. (Internet)

11) Investiga los dos Teoremas de Pappus. (Internet)

12) Investiga el Teorema del Valor Medio para el Cálculo Integral.

Capítulo 25

Apéndices

Ap. A Álgebra básica

Leyes de los exponentes

Regla 1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Regla 2. $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$

Regla 3. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

Regla 4. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$

Regla 5. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Regla 6. $x^0 = 1$ $\qquad x \neq 0$

Regla 7. $\dfrac{1}{x^m} = x^{-m}$

Regla 8. $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$

Productos notables y factorización

- $x\,(y+z) = x\,y + x\,z$
- $(x+y)^2 = x^2 + 2\,x\,y + y^2$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3\,x^2\,y + 3\,x\,y^2 + y^3$
- $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
- $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + a\,b$
- $x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}\,y + x^{n-3}\,y^2 + \cdots + x\,y^{n-2} + y^{n-1}\right)$

Ap. B Geometría plana

Figura	Perímetro ($P =$)	Área ($A =$)	Volumen ($V =$)
Triángulo	$a + b + c$	$\dfrac{b\,h}{2}$	N/A
Rectángulo	$2\,b + 2\,h$	$b\,h$	N/A
Cuadrado	$4\,l$	l^2	N/A
Paralelogramo	$2(a + b)$	$b\,h$	N/A
Trapezoide	$a + b + c + d$	$\dfrac{(b_1 + b_2)\,h}{2}$	N/A
Círculo	$2\,\pi\,r$	$\pi\,r^2$	N/A
Prisma*	N/A		$A_B\,h$
Cilindro	N/A		$\pi \cdot r^2 \cdot h$
Cono	N/A		$\dfrac{A_B\,h}{3}$
Esfera	N/A	$4\,\pi\,r^2$	$\dfrac{4\,\pi\,r^3}{3}$

* Con bases paralelas.

Notación:

- ✓ a, b, c, d $\Rightarrow$ longitudes de los lados.
- ✓ h $\Rightarrow$ altura.
- ✓ l $\Rightarrow$ longitud del lado del cuadrado.
- ✓ b_1, b_2 $\Rightarrow$ longitudes de las bases.
- ✓ r $\Rightarrow$ radio de la base (circular).
- ✓ A_b $\Rightarrow$ área de la base.

Ap. C Logaritmos

Definición 1

Logaritmo

Sean a, x números reales positivos con $a > 0, a \neq 1$. El logaritmo de x en la base a es el número de veces que se debe multiplicar el número a para obtener como resultado el número x.

$$\log_a x = y \qquad \Leftrightarrow \qquad a^y = x$$

La función $y = \log_a x$ se conoce como la función logarítmica en la base a.

De la definición de logaritmo se deduce inmediatamente:

i. $\log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$

ii. $\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$

Las propiedades más básicas de los logaritmos son:

i. $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

ii. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

iii. $\log_a(u^n) = n \log_a u$

iv. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

De las propiedades de los logaritmos se deduce:

i. $\log_a\left(\frac{1}{u}\right) = -\log_a(u)$, porque $\log_a(1) = 0$.

ii. $\log_a(a^x) = x$, porque $a^x = a^x$

iii. $a^{\log_a(x)} = x$, porque $y = \log_a(x) \quad \Rightarrow \quad a^y = a^{\log_a(x)} = x$

Estas tres propiedades ayudan mucho a simplificar expresiones exponenciales y logarítmicas.

Una forma de explicar la simplificación de expresiones exponenciales es que el estudiante observe que en los últimos dos casos se repite la base a:

$$\log_a(a^x) = x \qquad \Rightarrow \qquad \log_{\cancel{a}}(\cancel{a}^x) = x$$

Puede imaginar que en este caso se *cancela* la base por estar repetida.

En el siguiente caso podemos suponer lo mismo:

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad \Rightarrow \qquad \cancel{a}^{\log_{\cancel{a}}(x)} = x$$

Esto puede ayudarte a recordar cómo simplificar las expresiones logarítmicas y exponenciales a los estudiantes.

Ap. D Geometría Analítica

Sistemas de Ejes coordenados

Distancia entre dos puntos: La longitud D del segmento $\overline{PQ}$ siendo $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$, es:

$$D = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$$

Punto de división: Las coordenadas del punto $M(x_m, y_m)$ que divide al segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$, en la razón r son:

$$x_m = \frac{r\,x_q + x_p}{1 + r} \qquad\qquad y_m = \frac{r\,y_q + y_p}{1 + r}$$

Punto medio: Las coordenadas del punto medio $M(\bar{x}, \bar{y})$ del segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$, son:

$$\bar{x} = \frac{x_q + x_p}{2} \qquad\qquad \bar{y} = \frac{y_q + y_p}{2}$$

Pendiente: La pendiente m de la recta pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Condición de paralelismo: Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas ℓ_1 y ℓ_2, entonces, $m_1 = m_2$ implica que $\ell_1 \parallel \ell_2$.

Condición de perpendicularidad: Si m_1 y m_2 son las pendientes de dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 perpendiculares ($\ell_1 \perp \ell_2$), entonces,

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Ángulo entre dos rectas: Si ϕ es el ángulo entre las rectas ℓ_1, ℓ_2, con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Fórmula de Herón: El área del triángulo con lados de longitud a, b, c, respectivamente y semiperímetro p es:

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}$$

Nota: El semiperímetro es igual a la mitad del perímetro:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

LA LÍNEA RECTA

Ec. Recta F. Punto-pendiente: La recta pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ con pendiente m:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Ec. Recta F. Dos puntos: La recta pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

Ec. Recta F. Pendiente-ordenada al origen: La recta tiene pendiente m y corta al eje y en el punto $B(0, b)$:

$$y = m\,x + b$$

Ec. Recta F. Simétrica: Las intersecciones con los ejes son $A(a, 0)$ y $B(0, b)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ec. Recta F. General: La ecuación de cualquier recta se puede escribir con:

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

donde A y B no son simultáneamente cero.

Ec. Recta F. Normal: Útil para calcular la distancia de un punto a una recta:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Distancia de un punto a una recta: La distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $\ell :\ A\,x + B\,y + C = 0$, es:

$$D_{P\ell} = \frac{A\,x_1 + B\,y_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

La Circunferencia

Ec. Circunferencia F. ordinaria: Centro en el origen y radio r:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ec. Circunferencia F. ordinaria: Centro en el punto $C(h, k)$ y radio r:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ec. Circunferencia: Forma general:

$$x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

Si el centro de la circunferencia es el punto $C(h, k)$ y su radio es r se cumple:

$$\begin{array}{rcl} D & = & -2\,h \\ E & = & -2\,k \\ F & = & h^2 + k^2 - r^2 \end{array}$$

La Parábola

Ec. Parábola vertical F. ordinaria: Vértice en el origen:

$$x^2 = 4\,p\,y$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba. Si $p < 0$ abre hacia abajo.

Ec. Parábola vertical F. ordinaria: Vértice en el punto $V(h, k)$:

$$(x-h)^2 = 4\,p\,(y-k)$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba. Si $p < 0$ abre hacia abajo.

Ec. Parábola horizontal F. ordinaria: Vértice en el origen :

$$y^2 = 4\,p\,x$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha. Si $p < 0$ abre hacia la izquierda.

Ec. Parábola vertical F. ordinaria: Vértice en el punto $V(h, k)$:

$$(y-k)^2 = 4\,p\,(x-h)$$

Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha. Si $p < 0$ abre hacia la izquierda.

Otras fórmulas: Parábola con vértice en el punto $V(h, k)$:

Parábola	Vertical	Horizontal
Lado Recto	$4\,\lvert p\rvert$	$4\,\lvert p\rvert$
Foco	$F(h, k+p)$	$F(h+p, k)$
Directriz	$y = k - p$	$x = h - p$
Ec. General	$x^2 + D\,x + E\,y + F = 0$	$y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$
D	$-2\,h$	$-4p$
E	$-4\,p$	$-2\,k$
F	$h^2 + 4\,p\,k$	$k^2 + 4\,p\,h$

La Elipse

Ec. Elipse F. ordinaria: Horizontal con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ec. Elipse F. ordinaria: Vertical con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ec. Elipse F. ordinaria: Horizontal con centro en el punto $C(h,k)$:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ec. Elipse F. ordinaria: Vertical con centro en el punto $C(h,k)$:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Otras fórmulas: Elipse con centro en el punto $C(h,k)$:

- ✓ Longitud del eje mayor: $2a$.
- ✓ Longitud del eje menor: $2b$.
- ✓ Distancia entre los focos: $2c$.
- ✓ Relación entre a, b y c: $a^2 = b^2 + c^2$.
- ✓ Excentricidad: $e = c/a < 1$

Elipse	**Vertical**	**Horizontal**
Lado Recto	$2b^2/a$	$2b^2/a$
Focos	$F(h, k \pm c)$	$F(h \pm c, k)$
Vértices	$V(h, k \pm a)$	$F(h \pm a, k)$
Ec. General	$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$	
A	a^2	b^2
B	b^2	a^2
D	$-2a^2h$	$-2b^2h$
E	$-2b^2k$	$-2a^2k$
F	$a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$	$b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$

La Hipérbola

Ec. Hipérbola F. ordinaria: Horizontal con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ec. Hipérbola F. ordinaria: Vertical con centro en el origen:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ec. Hipérbola F. ordinaria: Horizontal con centro en el punto $C(h,k)$:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Ec. Hipérbola F. ordinaria: Vertical con centro en el punto $C(h,k)$:

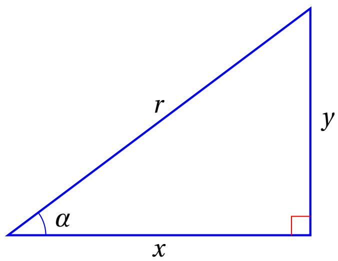
$$-\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Otras fórmulas: Hipérbola con centro en el punto $C(h,k)$:

- ✓ Longitud del eje transverso: $2a$.
- ✓ Longitud del eje conjugado: $2b$.
- ✓ Distancia entre los focos: $2c$.
- ✓ Relación entre a, b y c: $a^2=c^2-b^2$.
- ✓ Excentricidad: $e=c/a>1$.

Hipérbola	Vertical	Horizontal
Lado Recto	$2b^2/a$	$2b^2/a$
Focos	$F(h,k\pm c)$	$F(h\pm c,k)$
Vértices	$V(h,k\pm a)$	$F(h\pm a,k)$
Ec. General	$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$	
A	b^2	$-b^2$
B	$-a^2$	a^2
D	$-2b^2h$	$2b^2h$
E	$2a^2k$	$-2a^2k$
F	$b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2$	$-b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2$

Ap. E Trigonometría



Definiciones

✓ $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$ ✓ $\csc\alpha = \dfrac{r}{y}$

✓ $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ ✓ $\sec\alpha = \dfrac{r}{x}$

✓ $\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$ ✓ $\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$

Identidades recíprocas

1) $\sin\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha}$

2) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}$

3) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$

4) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

5) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Propiedades de las funciones trigonométricas

1) $\sin\alpha = \cos(90^{o} - \alpha)$

2) $\cos\alpha = \sin(90^{o} - \alpha)$

3) $\tan\alpha = \cot(90^{o} - \alpha)$

4) $\cot\alpha = \tan(90^{o} - \alpha)$

5) $\csc\alpha = \sec(90^{o} - \alpha)$

6) $\sec\alpha = \csc(90^{o} - \alpha)$

Identidades trigonométricas pitagóricas.

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$

3) $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$

Identidades de suma y diferencia de ángulos.

1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha$

2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$

3) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\,\cos\alpha$

4) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta$

5) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta}$

6) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\,\tan\beta}$

7) $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\,\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

8) $\cot(\alpha-\beta) = \dfrac{\cot\alpha\,\cot\beta + 1}{\cot - \cot\alpha}$

Suma de funciones trigonométricas.

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

4) $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$

Leyes de senos y de cosenos.

1) $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

2) $a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\,\cos\alpha$

3) $b^2=a^2+c^2-2\,a\,c\,\cos\beta$

4) $c^2=a^2+b^2-2\,a\,b\,\cos\gamma$

5) $A=\begin{cases}\dfrac{a\,b\,\sin\gamma}{2}\\[1ex]\dfrac{a\,c\,\sin\beta}{2}\\[1ex]\dfrac{b\,c\,\sin\alpha}{2}\end{cases}$

Donde: A es el área del triángulo con lados a, b, c.

Otras Identidades trigonométricas.

1) $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

2) $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

3) $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

4) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

5) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

6) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

7) $\tan\alpha=\dfrac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

8) $\sin\alpha=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

9) $\cos\alpha=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Ap. F Reglas de derivación

Las siguientes son las reglas de derivación de funciones algebraicas.

i. $\dfrac{dc}{dx} = 0$

ii. $\dfrac{dx}{dx} = 1$

iii. $\dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

iv. $\dfrac{d(c \cdot v)}{dx} = c\,\dfrac{dv}{dx}$

v. $\dfrac{d(u \cdot v)}{dx} = u\,\dfrac{dv}{dx} + v\,\dfrac{du}{dx}$

vi. $\dfrac{d(v^n)}{dx} = n\,v^{n-1}\,\dfrac{dv}{dx}$

vii. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\dfrac{du}{dx} - u\,\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

viii. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dx}$

ix. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

Las siguientes son las reglas de derivación de funciones trascendentes.

i. $\dfrac{d(\sin v)}{dx} = \cos v\,\dfrac{dv}{dx}$

ii. $\dfrac{d(\cos v)}{dx} = -\sin v\,\dfrac{dv}{dx}$

iii. $\dfrac{d(\tan v)}{dx} = \sec^2 v\,\dfrac{dv}{dx}$

iv. $\dfrac{d(\cot v)}{dx} = -\csc^2 v\,\dfrac{dv}{dx}$

v. $\dfrac{d(\sec v)}{dx} = \sec v\,\tan v\,\dfrac{dv}{dx}$

vi. $\dfrac{d(\csc v)}{dx} = -\csc v\,\cot v\,\dfrac{dv}{dx}$

vii. $\dfrac{d(\arcsin v)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,\dfrac{dv}{dx}$

viii. $\dfrac{d(\arccos v)}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-v^2}}\,\dfrac{dv}{dx}$

ix. $\dfrac{d(\arctan v)}{dx} = \dfrac{1}{1+v^2}\,\dfrac{dv}{dx}$

x. $\dfrac{d(\operatorname{arccot} v)}{dx} = \dfrac{-1}{1+v^2}\,\dfrac{dv}{dx}$

xi. $\dfrac{d(\operatorname{arcsec} v)}{dx} = \dfrac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\,\dfrac{dv}{dx}$

xii. $\dfrac{d(\operatorname{arccsc} v)}{dx} = \dfrac{-1}{v\sqrt{v^2-1}}\,\dfrac{dv}{dx}$

xiii. $\dfrac{d(\ln v)}{dx} = \dfrac{1}{v}\,\dfrac{dv}{dx}$

xiv. $\dfrac{d(\log_a v)}{dx} = \dfrac{\log_a e}{v}\,\dfrac{dv}{dx}$

xv. $\dfrac{d(a^v)}{dx} = a^v\,\ln a\,\dfrac{dv}{dx}$

xvi. $\dfrac{d(e^v)}{dx} = e^v\,\dfrac{dv}{dx}$

xvii. $\dfrac{d(u^v)}{dx} = \left(v \cdot u^{v-1} + \ln u \cdot u^v\right)\dfrac{dv}{dx}$

Ap. G TABLA DE INTEGRALES

A continuación se da una pequeña tabla de integrales.

i. $\displaystyle\int (dv + dw) = \int dv + \int dw$

ii. $\displaystyle\int a\,dv = a\int dv$

iii. $\displaystyle\int dx = x$

iv. $\displaystyle\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}$

v. $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \ln|v|$

vi. $\displaystyle\int a^v\,dv = \frac{a^v}{\ln a}$

vii. $\displaystyle\int e^v\,dv = e^v$

viii. $\displaystyle\int \ln v\,dv = v\ln v - v$

ix. $\displaystyle\int \sin v\,dv = -\cos v$

x. $\displaystyle\int \cos v\,dv = \sin v$

xi. $\displaystyle\int \sec^2 v\,dv = \tan v$

xii. $\displaystyle\int \csc^2 v\,dv = -\cot v$

xiii. $\displaystyle\int \sec v\tan v\,dv = \sec v$

xiv. $\displaystyle\int \sec v\,dv = \ln(\sec v + \tan v)$

xv. $\displaystyle\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+v}{a-v}\right)$

xvi. $\displaystyle\int \frac{dv}{a^2 + v^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{v}{a}\right)$

xvii. $\displaystyle\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{v-a}{v+a}\right)$

xviii. $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \arcsin\left(\frac{v}{a}\right)$

xix. $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right)$

xx. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - v^2}\,dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{v}{a}\right)$

xxi. $\displaystyle\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\,dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right)$

xxii. $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

Sustituciones Trigonométricas

✓ $\sqrt{a^2 - u^2}$ $\to$ hágase $u = a\sin z \to a\cos z$

✓ $\sqrt{a^2 + u^2}$ $\to$ hágase $u = a\tan z \to a\sec z$

✓ $\sqrt{u^2 - a^2}$ $\to$ hágase $u = a\sec z \to a\tan z$

Cada una de las fórmulas debe incluir una constante sumada al final.

Referencias

[1] Boyce W. E., DiPrima R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Séptima edición. EE.UU. Ed. John Wiley & Sons. 2001.

[2] Briggs, George R. *The Elements of Plane Analytic Geometry*. New York, U.S.A. Robert Drumond & Company. 1909.

[3] Brown, Richard G., *Et. Al. Algebra: Structure and Method*. 2 tomos. EE.UU. Ed. Houghton Mifflin Company. 1994.

[4] Budnick, Frank S. *Curso Breve de Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. Ed. McGraw Hill. México, 1995.

[5] Bugrov Y. S., Nikolski S. M. *Cálculo Diferencial e Integral*. Ex-URSS. Ed. MIR Moscú. 1984.

[6] Collins, Williams, *Et. Al. Algebra: Integration, Applications, Connections*. 2 tomos. EE.UU. Ed. McGraw-Hill. 1998.

[7] Dossey, John A., *Et. Al. Addison-Wesley Secondary Math: Focus on Advanced Algebra*. EE.UU. Ed. Addison-Wesley publishing Company. 1996.

[8] Euclides (300 A.C. Alejandría)

[9] Freund, John E. *College Mathematics with Business Applications*. EE.UU. Ed. Prentice Hall, Inc. 1969.

[10] Fuller, Gordon. *Analytic Geometry*. EE.UU. Ed. Addison Wesley Publishing Co. 1954.

[11] Gorini, Catherine A. *Geometry handbook*. Ed. Facts on file, INC. 2003. EE.UU.

[12] Grossman, Stanley I. *Álgebra Lineal*. 2da Edición. México. Grupo Editorial Iberoamérica. 1983.

[13] *Euclid's Elements in Greek* Heiberg, J.L. (editor), Richard Fitzpatrick (traductor al Inglés)

[14] Hirsch, Christian R., *et. al. Geometry*. Ed. Scott Foresman and Company. 1984. EE.UU.

[15] Larson, Roland E., Hostetler, Robert P. *Intermediate Algebra*. 1ra Edición. EE.UU. Ed. D.C. Heath and Company. 1992.

[16] Longley W. R., Smith P. F., Wallace A. W. *Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal*. México. Ed. Reverté. 1959.

[17] Moise, Edwin E. *Elementos de Geometría Superior*. Primera edición en Español. Ed. CECSA. 1968. México

[18] Robbins, Robert R. *Plane geometry*. Ed. American Book Company. 1906. EE.UU.

[19] Sienko Michelle J., Plane Robert A. *Química*. España. Ed. Aguilar. 1964.

[20] Smith, P. F.; Sullivan Gale, M. *The Elements of Analytic Geometry*. EE.UU. Ed. Ginn and Company. 1904.

[21] Soto Apolinar, Efraín. *Enseñanza Efectiva de las Matemáticas*. 1ra Edición [Versión electrónica] México. 2008. `http://www.aprendematematicas.org.mx/` (visitado el 20 de diciembre del 2011)

[22] Vance E. P. *An Introduction to Modern Mathematics*. EE.UU. Ed. Addison Wesley. 1968.

[23] Wentworth, George; Smith, David E. *Geometría plana y del espacio*. Primera edición en Español. Ed. CECSA. 1915. EE.UU.

[24] Yefimov, N. *A Brief Course in Analytic Geometry*. Moscow, Russia. Peace publishers.

CRÉDITOS

Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más.	**Albert Einstein**

Este material se extrajo del libro *Matemáticas Preuniversitarias* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

Autor: Efraín Soto Apolinar

Edición: Efraín Soto Apolinar

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar

Productor general: Efraín Soto Apolinar

Año de edición: 2010

Año de publicación: Pendiente.

Última revisión: 02 de enero del 2013.

Espero que este libro se distribuya entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sea divulgado entre otros profesores y sus alumnos.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

efrain@aprendematematicas.org.mx